

Л. С. Полак

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

**Их развитие
и применения в физике**

Издание второе,
исправленное



URSS

МОСКВА

Полак Лев Соломонович

Вариационные принципы механики: Их развитие и применения в физике. Изд. 2-е, испр. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 600 с.

Вниманию читателей предлагается книга выдающегося отечественного физика и физико-химика Л. С. Полака (1908–2002), в которой рассматриваются развитие вариационных принципов механики, а также некоторые их применения в физике, в том числе их роль в термодинамике, теории поля, квантовой механике и т. д. Книга являлась докторской диссертацией автора, опубликованной в виде монографии, и была оценена современниками как фундаментальный вклад в аналитическую механику, историю науки и в теоретическую физику в целом.

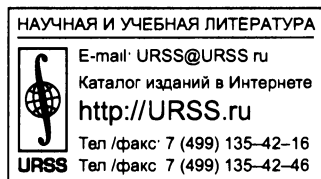
Книга будет интересна физикам, математикам, историкам науки, аспирантам и студентам соответствующих специальностей.

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»»
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9
Формат 60×90/16. Печ. л. 37,5 Зак. № 1630

Отпечатано в ООО «ПК «Заураль»»
640022, Курганская обл., Курган, ул. К. Маркса, 106

ISBN 978–5–397–01138–9

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009



5247 ID 59539



9 785397 011389

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава I. Принцип наименьшего действия от Ферма до Лагранжа ...	7
1. Принцип Ферма	7
2. Оптико-механическая аналогия И. Бернулли	13
3. Действие у Лейбница	18
4. Принцип наименьшего действия у Мопертюи	22
5. Принцип наименьшего действия у Эйлера	36
6. Принцип наименьшего действия у Лагранжа	53
7. Скобки Пуассона и принцип наименьшего действия у Пуассона	80
8. Вывод уравнений движения из принципа наименьшего действия	
О. Родригесом	93
Глава II. Оптико-механическая аналогия Гамильтона и принцип	
Гамильтона—Остроградского	98
1. Биография и методологическая концепция Гамильтона	98
2. Оптико-механическая аналогия Гамильтона	116
3. Динамика Гамильтона	149
4. Динамика Якоби	175
5. Исследования М. В. Остроградского	193
6. Касательные преобразования Софуса Ли	208
Глава III. Развитие математической формы и обобщение вариацион-	
ных принципов классической механики	228
1. Вторая вариация интеграла действия	228
2. Изохронная и изоэнергетическая вариации в работах русских уче-	
ных	232
3. Смысл вариаций и обобщение вариационных принципов у Гельдера	
и Фосса	250
4. Распространение вариационных принципов на неголономные системы	
.....	254
5. Уравнения движения для неголономных систем	260
6. Геометризация проблем динамики	266
7. Задача интегрирования уравнения Гамильтона—Якоби	275
8. Уравнения Рауса	282
9. Интегральные инварианты Пуанкаре	286
10. Принцип Гаусса	295
11. Принцип Герца	300
12. Заключительные замечания	310
Глава IV. Некоторые замечания о вариационных принципах в меха-	
нике и физике	314
1. Теорема независимости Д. Гильберта	314
2. Теорема Э. Нетер	322

3. Сравнительная характеристика принципа Гамильтона—Остроградского и принципа наименьшего действия	337
4. Вариационные принципы механики и принцип Гюйгенса	346
5. Вариационные принципы в теории полей	351
6. Гамильтонов и лагранжев формализм	358
7. Вариационные принципы, телеология и причинность	361
8. Метод аналогий в развитии физики	367
Глава V. Вариационные принципы и теория теплоты	371
1. Вариационные принципы механики и второе начало термодинамики в работах Клаузиуса	371
2. Вариационные принципы механики и скрытые движения в обосновании второго начала термодинамики Гельмгольцем	390
3. Вариационные принципы механики и теория теплоты в работах Больцмана, Дж. Дж. Томсона, Планка	413
4. Заключительные замечания	443
Глава VI. Вариационные принципы в классической и релятивистской теории поля	446
1. Вариационные принципы механики и уравнения электромагнитного поля в исследованиях Лармора и Лоренца	446
2. Электродинамика Г. Ми	463
3. Вариационные принципы и уравнения электромагнитного поля у М. Планка	470
4. Вариационные принципы механики в специальной теории относительности	474
5. Вариационные принципы в общей теории относительности и в единых теориях поля	493
Глава VII. Вариационные принципы в теории атома Бора и формировании квантовой механики	506
1. Роль действия и вариационных принципов механики в квантовой теории атома Бора	506
2. Оптико-механическая аналогия де Бройля и возникновение волновой механики	528
3. Оптико-механическая аналогия Шредингера и возникновение квантовой механики	539
Глава VIII. Значение вариационных принципов в построении квантовой теории полей	574
1. Постановка задачи построения квантовой теории полей	574
2. Лагранжиан, физические величины и перестановочные соотношения	579
3. Конкретное решение задач в гейзенберговском представлении	583
4. Шредингеровское представление и представление взаимодействия	585
5. Заключительные замечания	587
Именной указатель	588
Предметный указатель	593

ПРЕДИСЛОВИЕ

В предлагаемой вниманию читателя книге рассматривается развитие вариационных принципов механики, а также некоторые их применения в физике. Вряд ли нужно говорить о поистине необъятном материале, связанном с этими проблемами. В самом деле, вариационные принципы механики, лежащие в основании динамики в форме Гамильтона—Якоби, находятся в тесной связи с общей теорией групп преобразований, вариационным исчислением, общей теорией поверхностей и общей теорией дифференциальных уравнений. Весь этот материал, конечно, далеко не исчерпан в нашей работе; в большинстве случаев, особенно в вопросах, пограничных с другими областями науки, приходилось ограничиваться лишь беглыми замечаниями. В частности, совершенно не рассмотрены применения вариационных методов к решению задач математической физики, техники, так называемые прямые методы и т. п.

Мне казалось, что задача книги такого типа состоит в том, чтобы показать во всей сложности развитие научных идей напомнить читателю некоторые из забытых проблем, а забытые рассмотреть под несколько необычным углом зрения.

При изложении результатов, полученных различными учеными, работавшими на протяжении трех веков, передо мной возникали две трудности: сохранять ли терминологию, зачастую устаревшую, воспроизводить ли ход математических рассуждений, зачастую неуклюжих, как он был дан тем или иным ученым, или излагать их на современном математическом языке. Невозможно было также сохранить на протяжении такой книги единую систему обозначений.

В книге принято компромиссное решение: устаревшая терминология воспроизводится только постольку, поскольку она представляет интерес, а математическое изложение модернизируется там, где мне казалось, что это не скроет от читателя существенных обстоятельств в развитии рассматриваемых проблем.

Существенные для понимания вопросов, затронутых в гл. V—VIII, принципиальные идеи рассмотрены с общей точки зрения в гл. IV.

Естественно, что в книге много недостатков как в распределении и отборе материала, так и в освещении большого круга вопросов

которые пришлось затронуть. Всестороннее освещение проблемы вариационных принципов — дело будущих исследований.

Глава восьмая, в которой кратко рассматриваются некоторые вопросы современной теоретической физики, написана совместно с Анатолием Моисеевичем Бродским.

Мне хотелось бы посвятить эту книгу светлой памяти Алексея Николаевича Крылова и Всеволода Константиновича Фредерикса, долгим беседам с которыми я многим обязан; большое значение для меня имели также беседы с Юрием Александровичем Крутковым.

Якову Лазаревичу Геронимусу и Борису Николаевичу Окуневу выражаю свою глубокую признательность за ценные советы и замечания. Некоторые разделы первой части этой работы были обсуждены сектором физико-математических наук Института истории естествознания и техники Академии наук СССР; приношу свою признательность сотрудникам сектора за сделанные замечания.

Автор

ГЛАВА I

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ ОТ ФЕРМА ДО ЛАГРАНЖА

1. Принцип Ферма

Вариационный принцип для физической проблемы был впервые отчетливо сформулирован в геометрической оптике в XVII в. и применен к решению задач отражения и преломления света. Это был принцип кратчайшего времени или принцип Ферма¹. Естественно, возникает вопрос о том, почему экстремальный принцип возник первоначально в оптике, а не в механике, хотя и в последней уже в то время имелось достаточно высказываний отдельных ученых о простоте законов движения или, в телеологическом варианте, о том, что природа достигает своих целей простейшими средствами.

Дело здесь в том, что для оптической задачи величина, которая должна быть минимумом в конкретных явле-

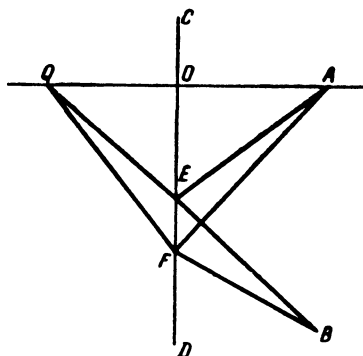


Рис. 1.

¹ Еще Герон Александрийский открыл принцип наименьшего времени для частного случая отражения света. Рассмотрим ход его рассуждений.

Пусть A — источник света, B — глаз, CD — зеркало, AEB — действительный путь света, AFB — какой-либо другой возможный путь луча, испытавшего отражение (рис. 1). $AO \perp CD$; продолжим BE до встречи в G с продолжением AC . Так как углы падения и отражения равны, то $AE = EG$ и $AF = FG$. Из $GF + FB > GB$ следует, что путь $AFB >$ пути AEB ; так как AFB — произвольный путь, то AEB есть кратчайший из всех возможных путей луча, отраженного от зеркала.

Утверждение Герона было обобщением наглядного опыта, который показывает, что когда свет распространяется от одной точки к другой, его путь есть прямая линия, т. е. кратчайшее расстояние между двумя точками (Heron Alexandrinus, Opera, т. 2, Mechanica et Catoptrica, Recensuerunt L. Nix et W. Schmidt, Lipsiae, 1900).

ниях, чрезвычайно доступна и не требует дальнейших исследований. Это — время. Как бы ни относиться к философским проблемам, связанным с категорией времени, наглядные и издревле измеряемые



П. ФЕРМА (1601—1665)

интервалы времени в достаточно широких пределах не нуждаются в другом определении, кроме возможности сравнения их по величине. В механике же совсем не очевидно, какая величина в процессе движения должна иметь минимум (или максимум) и, как мы теперь знаем, структура этой величины отнюдь не проста.

Поэтому, хотя поиски экстремальных соотношений в оптике и механике начались на самой заре развития вариационного исчисле-

ния, которое и возникло в связи с ними и при решении соответствующих частных задач (например, задачи о брахистохроне), однако оформились они в виде ясных математических выражений раньше всего в оптике, где не требовалось ни введения такого сложного понятия как «действие», ни выяснения характера его варьирования.

Однако время входит основным элементом и в картину механического движения; поэтому почти одновременно с открытием принципа кратчайшего времени в оптике возникла идея о применении его в механике, а также более глубокая идея о разработке в механике самостоятельного, но аналогичного по структуре принципа. Механистическая концепция единой физической картины мира подсказывала возможность единого принципа для оптики и механики — еще неясная, но чреватая многочисленными последствиями первая идея оптико-механической аналогии.

Закон преломления света был установлен Снеллиусом и Декартом. Выводя этот закон, Декарт сделал ряд допущений, из которых наименее обоснованным являлось утверждение, что скорость света в более плотной среде больше, чем в менее плотной. Против этого допущения выступили английский философ Гоббс, а в 1662 году знаменитый французский математик Ферма (1601—1665).

Пьер Ферма положил в основу исследования закона преломления света принцип кратчайшего времени. В заметке «*Synthesis ad Refractiones*»¹ он вывел закон преломления света геометрическим способом, исходя из этого принципа. По мнению Ферма, «природа действует наиболее легкими и доступными путями», а отнюдь не более краткими, как это думают многие. Конкретизируя эту идею, он говорит: «Подобно тому как Галилей, когда рассматривал движение тяжелых тел в природе, измерял отношения этого движения не столько расстоянием, сколько временем, мы также рассматриваем не кратчайшие расстояния или линии, а те, которые могут быть пройдены легче, удобнее и за более короткое время».¹

Геометрический вывод закона преломления, который основывается на этом положении, очень громоздок. Во всех изложениях² своеобразная прелесть рассуждений Ферма почти исчезает.

Как известно, принцип Ферма является наиболее общей математической формой выражения законов геометрической оптики.

По существу Ферма показал, что закон преломления Снеллиуса удовлетворяет гипотезе, что время, взятое для траектории соседней с действительной, отличается от времени прохождения этой последней на величину второго порядка малости. В доказательстве Ферма

¹ Fermat P., Oeuvres, т. 1, Paris, 1891, стр. 173—179; см. также Сб. Вариационные принципы механики, под ред. Л. С. Полака, Физматгиз, М., 1959, стр. 7 (далее цитируется: «Сборник»).

² См., например: М а х, Механика Пер. Котляр, 1909, стр. 360—362.

в сущности фигурирует утверждение, что вариация¹ некоторого определенного интеграла, взятого вдоль действительной траектории луча, равна нулю. Это условие необходимо, но недостаточно для того, чтобы время было минимумом. В простом случае, рассмотренном Ферма, условие минимальности и вариационное условие совпадают, но в более сложных случаях это не имеет места.

Принцип Ферма привел не только к экспериментально изученному факту, но также и к новому результату, что коэффициент преломления равен отношению скоростей света в двух средах. Ферма хотел доказать, что его точка зрения о том, что свет распространяется медленнее в более плотной среде, соответствует действительности, в то время как Декарт защищал противоположное утверждение. Во всяком случае принцип наименьшего времени, по крайней мере отчасти, выведен *a priori*, а не индуктивным путем.

Первое настоящее оправдание принципа Ферма дал Гюйгенс², который на основе своей «волновой» теории вывел, что коэффициент преломления на границе двух сред равен отношению скоростей света в этих средах. Доказательство Гюйгенса показывает, что время, необходимое свету, чтобы пройти путь между двумя точками, действительно является минимумом.

Пусть AB — преломляющая поверхность, P — начальная, Q — конечная точки (рис. 2). Действительный путь PRQ , а PSQ — какой-либо другой путь. Проведем $SU \parallel RP$, $PU \perp RP$. Пусть $RT \perp SU$ и $SV \perp RQ$.

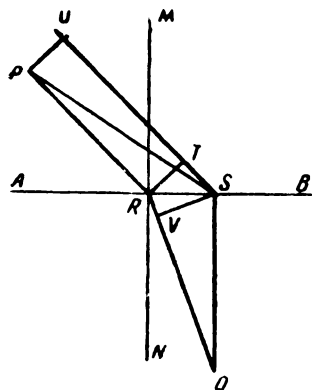


Рис. 2.

Скорость света выше поверхности AB пусть будет v_1 , а ниже v_2 . Запишем закон Снеллиуса в форме

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2},$$

где i — угол падения PRM , r — угол преломления NRQ .

Легко видеть отсюда, что

$$\frac{TS}{RV} = \frac{v_1}{v_2},$$

т. е. времена, нужные для прохождения TS и RV , равны. А так как $TU = RP$, то и времена их прохождения равны, но так как $SQ > QV$, то время прохождения SQ больше времени прохождения QV . Следовательно, время, необходимое для света на пути USQ , больше, чем вдоль PRQ , а так как $PS > US$, то время по PSQ

¹ Мы говорим здесь о вариации, хотя общее понятие вариации функции было введено почти сто лет спустя Лагранжем.

² Гюйгенс Х., Трактат о свете. Пер. под ред. В. Фредерикса, ГТТИ, М.—Л., 1935.

больше времени по пути PRQ . Аналогичный результат будет и в том случае, когда S лежит слева от R . Таким образом, во всех случаях время для PRQ меньше, чем на любом другом пути из P в Q .

Более строгое доказательство можно получить, воспользовавшись волновой теорией света. Математическое выражение принципа Ферма

$$\delta \int_P^Q \frac{ds}{v} = 0,$$

т. е. вариация интеграла равна нулю.

Остановимся еще на вопросе, какая скорость входит в интеграл Ферма — фазовая или групповая, что имеет значение в диспергирующей среде. Волновая оптика показывает, что это волновая (фазовая) скорость.

Итак, принцип кратчайшего времени был сформулирован и продемонстрирован в геометрической оптике. Немедленно и закономерно возникла проблема отыскания аналогичных задач о минимальном значении времени в механике. Одна из них связана с возникновением вариационного исчисления и в дальнейшем привела к формулированию вариационного принципа в механике.

Вариационное исчисление возникло в связи с задачей отыскания кривой, обладающей некоторым свойством максимума или минимума. Первой задачей такого рода была задача, приведенная Ньютоном в его «Началах»¹, решение которой он привел без указания метода, которым оно было найдено: какую форму надо придать твердому телу вращения, движущемуся вдоль оси, для того, чтобы испытываемое им сопротивление было бы наименьшим².

У Галилея мы находим задачу, в некоторой степени предвосхищающую задачу о брахистохроне. Он впервые поставил вопрос о кривой спуска в книге «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению», вышедшей в 1638 г. Приведем это интересное место: «Теорема XXII, Предложение XXXVI: Если из нижней точки круга, возвышающегося над горизонтом, провести плоскость, отсекающую дугу, меньшую квадранта, и из конечных точек этой плоскости провести в какой-либо промежуточной точке дуги две какие угодно плоскости, то время падения по этим двум

¹ Ньютон И., Математические начала натуральной философии, пер. с лат. А. Н. Крылова. Собр. трудов А. Н. Крылова, т. 7, Изд. АН СССР, М.—Л., 1936, стр. 426—427.

² К переводу Мотта «Начал» на английский язык сделано небольшое прибавление, в котором дано решение задачи о теле наименьшего сопротивления. Перевод этот сделан в 1727—1729 гг., а поэтому решение может служить примером того, как решались подобные задачи математиками современниками Ньютона. Оно изложено в примечании А. Н. Крылова к этому разделу «Начал» (стр. 430—433).

последним плоскостям будет меньше, чем по одной первоначальной плоскости, и меньше, чем по нижней из двух последних плоскостей¹.

Теорема Галилея означает лишь, что движение по дуге круга происходит быстрее, чем по соответствующей хорде или любой другой вписанной ломаной линии; однако Галилей нигде не доказы-



И. НЬЮТОН (1643—1727)

вает, что это движение является наибо́льшей. Поэтому неверно часто встречающееся утверждение о том, что Галилей ошибочно считал дугу окружности абсолютной брахистохроной. Обычно основываются на начальной фразе замечания к теореме XXII: «...быстрейшее движение от одной конечной точки до другой совершается не по кратчайшей линии, каковой является прямая, апо дуге окружности»². Однако все доказательство Галилея и заключительная фраза того же замечания содержит лишь утверждение,

¹ Галилео Галилей, Соч., т. I, ГТТИ, М.—Л., 1934, стр. 405.

² Там же, стр. 408.

что «...чем более вписанный многоугольник приближается к окружности, тем быстрее совершается падение между двумя конечными точками A и C ». Это положение, конечно, правильно и не находится в противоречии с понятием об абсолютной брахистохроне.

2. Оптико-механическая аналогия И. Бернулли

В 1696 г. в июньской книге лейпцигского журнала «Acta Eruditorum» (стр. 269) И. Бернулли опубликовал заметку «Problema novum, ad cuius solutionem mathematice invitantur» (Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики). В этой заметке говорилось: «В вертикальной плоскости даны две точки A и B . Определить путь AMB , спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести, тело M , начав двигаться из точки A , дойдет до другой точки B в кратчайшее время. Для того чтобы вызвать интерес со стороны любителей подобных вопросов и побудить их охотнее предпринять попытку разрешения указанной задачи, довожу до их сведения, что эта задача не сводится к пустой умственной спекуляции, лишенной какого бы то ни было практического значения, как это может кому-либо показаться. В действительности она представляет большой практический интерес и притом, кроме механики, также и для других дисциплин, что может всем показаться неправдоподобным»¹. Это была знаменитая задача о брахистохроне² или кривой наискорейшего ската: даны две точки в вертикальной плоскости, не лежащие на одной вертикали; найти вид кривой линии, спускаясь по которой тяжелое тело прошло бы путь между этими точками в наименьшее время. Решение этой по словам Лейбница «столь прекрасной и до сих пор неслыханной задачи»³ было дано самим И. Бернулли, Лейбницем, Ньютоном, Я. Бернулли и Лопиталем.

Задача, предложенная И. Бернулли, является одним из истоков возникновения вариационного исчисления. В современной формулировке основная задача вариационного исчисления такова: в некоторой области пространства вещественных переменных $x, y_1, \dots, y_n$ для любых конечных вещественных значений $z_1, \dots, z_n$ задана непрерывная по совокупности всех своих аргументов вещественная функция

$$f(x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n) = f(x, Y, Z),$$

где Y, Z означают векторы $\{y_1, \dots, y_n\}, \{z_1, \dots, z_n\}$.

¹ Галилео Галилей, Соч. т. I, ГТТИ, М.-Л., 1934, стр. 409.

² Бернулли И., Избранные сочинения по механике, ГТТИ, М.—Л., 1937, стр. 19—20.

³ Название задачи происходит от греческих слов *βραχίστος* — кратчайший и *χρόνος* — время.

⁴ Leibniz G., Mathematische Schriften, Hrsg. von C. J. Gerhardt, т. III, Halle, 1856, стр. 288.

Рассматривается совокупность M всех кусочногладких пространственных кривых $Y = Y(x)$, лежащих в области G и соединяющих две заданные точки $(a, a_1, \dots, a_n) = (a_1 A)$ и $(b, b_1, \dots, b_n) = (b_1 B)$. На каждой такой кривой интеграл

$$\int_a^b f(x, Y, Y') dx$$

имеет вполне определенное значение. Ищется та кривая или те



И. БЕРНУЛЛИ (1667—1748)

кривые, на которых этот интеграл имеет экстремальное, т. е. максимальное или минимальное значение. Частным случаем этой задачи является задача о брахистохроне¹.

Множество всех кусочногладких вектор-функций в заданном интервале $[a, b]$ является одним из так называемых функциональных пространств. Вышеприведенный интеграл по термини-

¹ См., напр., Ахизер Н. И., Лекции по вариационному исчислению, Гостехиздат, М., 1955.

нологии функционального анализа является функционалом от Y на многообразии M , т. е. некоторой функцией точки в определенном функциональном пространстве.

Функционалами¹ называются переменные величины, значения которых определяются выбором одной или нескольких функций. Например, функционалом является длина дуги кривой, соединяющей две заданные точки, так как эта величина определяется выбором функции $y = y(x)$, график которой проходит через заданные точки. Вариационное исчисление изучает методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов. Вариация функционала является аналогом дифференциала функции, т. е. вариация есть главная, линейная по отношению к вариации аргумента функционала $y(x)$ часть приращения функционала.

На решение предложенной задачи И. Бернулли дал полугодовой срок, но за это время решение прислал только Лейбниц. Поэтому по его предложению И. Бернулли продлил срок до пасхи 1697 г. В этот срок задача была решена также Ньютоном, Яковом Бернулли и Лопиталем, которые нашли, что кривой наибо́льшего спуска является циклоида. Решение Ньютона было напечатано в майском номере «Philosophical Transactions» за 1697 г. (№ 224, стр. 384) без подписи автора.

В майском же номере «Acta Eruditorum» за 1697 г., в котором опубликовал свое решение И. Бернулли, была напечатана статья его старшего брата Я. Бернулли (стр. 211) и статья Лопиталья (стр. 217) с аналогичными решениями.

В решении И. Бернулли речь идет одновременно об оптике и механике, о движении луча и тяжелой частицы. Указав на то, что Ферма вывел закон преломления света из принципа кратчайшего времени (при $v = \text{const}$ принцип кратчайшего времени Ферма переходит в принцип кратчайшего пути), И. Бернулли рассматривает задачу о кривизне луча в неоднородных прозрачных средах. Этому вопросу им посвящена работа «Кривизна луча в неоднородных прозрачных средах и решение задачи, предложенной мной в «Acta» за 1696 г., стр. 269, о нахождении брахистохронной линии, т. е. такой линии, по которой тело должно проходить от одной заданной точки до другой в кратчайшее время; затем о построении синхронной кривой, т. е. «волны лучей»². И. Бернулли не ищет общих методов решения задачи отыскания максимума или минимума какой-либо функции, он указывает, что сомневается и в самой возможности существования таких общих методов. Его цель — дать метод решения специальной задачи — задачи о брахистохроне, метод, который

¹ Термин функционал введен в 1903 г. Адамаром.

² Опубликовано в Acta Eruditorum, 1697, Mai, стр. 206. В Opera Omnia статья помещена в т. I, стр. 187—193; русск. перев. Б е р н у л л и И., Избранные сочинения по механике, стр. 26—39.

степень разреженности среды на высотах AC , или скорости луча, либо шарика в точках M . Искомый искривленный луч будет AMB . Введем обозначения $AC = x$, $CH = t$, $CM = y$, дифференциал $Cc = dx$, дифференциал $mt = dy$, дифференциал $Mm = dz$. Некоторую произвольно взятую постоянную величину обозначим через a . Mm — будет полным синусом, так как до Эйлера под синусом угла понималась просто длина перпендикуляра, опущенного из конца подвижного радиуса на неподвижный, а полным синусом в соответствии с этим назывался радиус круга. Синусом угла преломления будет mn , а так как он находится в постоянном отношении к HC , то

$$\frac{dy}{t} = \frac{dz}{a},$$

откуда

$$ady = t dz,$$

или

$$a^2 dy^2 = t^2 dz^2 = t^2 dx^2 + t^2 dy^2.$$

Отсюда для кривой AMB найдем общее дифференциальное уравнение

$$dy = \frac{tdx}{\sqrt{(a^2 - t^2)}}. \quad (1)$$

Получив этот результат, И. Бернулли не без гордости пишет: «Я, таким образом, одновременно решил две замечательные задачи — одну оптическую, другую механическую, т. е. я сделал больше того, что требовал от других. Я показал, что хотя эти две задачи взяты из совершенно различных частей науки, тем не менее они имеют одинаковую природу»¹. Задавшись законом, доказанным Галилеем, что скорости падающих весоных тел находятся между собой в отношении корней квадратных из пройденных высот, т. е. в нашем случае $t = \sqrt{ax}$, получим после подстановки в уравнение (1)

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx,$$

откуда очевидно, что брахистохронная кривая является обыкновенной циклоидой. Рассмотрев далее некоторые частные вопросы, связанные с этой кривой, И. Бернулли снова возвращается к вопросу о тождестве таутохроны и брахистохроны: «Раньше, чем закончить, я не могу воздержаться от того, чтобы еще раз не выразить своего изумления по поводу отмеченного неожиданного тождества между гюйгенсовой таутохроной и нашей брахи-

¹ Бернулли И., Избр. соч., стр. 33.

стохроной. Сверх того, я считаю нужным отметить, что это тождество вытекает только из основного положения Галилея; уже из этого можно было бы заключить, что это положение находится в согласии с природой. Природа всегда действует простейшим образом, как и в данном случае она с помощью одной и той же линии оказывает две различные услуги¹.

Это столь характерное для взглядов ученых-механиков XVII в. представление о том, что природа всегда действует простейшим образом² основано у И. Бернулли в данном случае на том, что, как показал Гюйгенс, циклоида, помещенная в вертикальной плоскости так, чтобы линия ее основания была горизонтальной и лежала выше производящего круга, обладает тем замечательным свойством, что из какой бы точки на этой кривой тело не начало спускаться, оно придет в низшее положение за одно и то же время (таухрона).

Решение задачи о брахистохроне не только открыло путь для развития вариационного исчисления, но послужило отправным пунктом для разработки принципа наименьшего действия в его конкретном динамическом смысле.

3. Действие у Лейбница

Для того, чтобы перейти к механике в целом, необходимо было выяснить, какая величина может быть минимальной (или максимальной) в процессе движения. Эта проблема, которая так же, как и принцип Ферма, возникла еще в XVII в., была более или менее отчетливо выяснена только в середине XVIII в. и доведена до такой же математической ясности и определенности, как и принцип Ферма, только в конце XVIII — начале XIX в.

Впервые понятие действия сформулировано Лейбницем (1646—1716), на которого в этом отношении ссылается и Мопертюи. Оно изложено в труде по динамике, над которым Лейбниц работал во время путешествия по Италии в 1669 г., но который остался незавершенным и только в 1860 г. был издан К. И. Гергардтом³ по рукописи, сохранившейся в королевской библиотеке в Ганновере. Лейбниц называет эту величину «*actio formalis*».

¹ Бернулли И., Избр. соч., стр. 36—37.

² Ср. хотя бы первое правило умозаключений в физике Ньютона: «Не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений. По этому поводу философы утверждают, что природа ничего не делает напрасно, а было бы напрасным совершать многим то, что может быть сделано меньшим. Природа проста и не роскошествует излишними причинами вещей». (И. Ньютон, Математические начала..., стр. 502.)

³ Leibniz G., Mathematische Schriften, Hrsg. von C. J. Gerhardt, т. II, 1860, стр. 345—366.

В неопубликованном при жизни Лейбница большом произведении «*Dynamica de Potentia et Legibus Naturae corporeae*»¹ в третьем отделе излагаются основные понятия динамики Лейбница — действие, потенция, эффект движения. Для своеобразной терминологии Лейбница характерно следующее: все то, что присуще всякому движению, всякое свойство, общее всем движениям, Лейбниц



Г. ЛЕЙБНИЦ (1646—1716)

называет формальным (*formalis*). В более современной терминологии понятие формального у Лейбница можно было бы выразить как существенное свойство или, с некоторыми ограничениями, просто как сущность. Сам Лейбниц так поясняет понятие формального: «Как эффект, так и действие я называю здесь формальным потому, что они в данном случае присущи просто движению как таковому. Совсем иными являются те эффекты действия, которые возникают благодаря какому-либо препятствию, — например, вследствие силы тяготения, притягивающей тела к центру Земли,

¹ Leibniz G., *Mathematische Schriften* ... т. III, 1856, стр. 288.

вследствие сопротивления среды или связи или вследствие необходимости преодолеть какую-либо пружину, — вообще вследствие каких-либо подобных причин, связанных с конкретной материей¹. Определение 3 Лейбница таково: «Величина формального действия в движении есть то, мерой чего является определенное количество материи, передвинувшееся на определенное расстояние (при поступательном равномерном движении) в течение определенного времени». Для измерения формального действия Лейбниц в предложении 10 устанавливает: «Формальные действия движения пропорциональны произведению формальных эффектов и скоростей, т. е. произведению количества материи, расстояний, на которые они передвигаются, и скоростей². В современной записи это будет — mv .

Лейбниц дал и второе определение формального действия, также вполне совпадающее с современным понятием действия. В предложении 17 он говорит: «Формальные действия движений пропорциональны произведению движущихся тел, пройденных промежутков времени и квадратов скорости. В самом деле, действия пропорциональны произведению скоростей и эффектов (по предл. 10), а эффекты пропорциональны произведению скоростей, промежутков времени и движущихся тел (по предыдущ. предл. 16). Следовательно, действия пропорциональны произведению квадрата скорости, первой степени промежутка времени и движущегося тела³. В современной записи это даст $kmv^2\Delta t$, где коэффициент пропорциональности k может быть, при соответствующем выборе единиц, сделан равным 1 и тогда получится просто $mv^2\Delta t$.

Необходимо отметить, что в XVII и XVIII вв. понятие скорости не заключало в себе указания на направление. Это была чисто алгебраическая, а у Декарта даже чисто арифметическая величина. Направление движения было отдельным понятием, которое не зависело от скорости. До начала XIX в. в научной литературе по механике употребляли выражение «направление тела», а не «направление скорости».

В соответствии с предложенными Ньютоном понятиями движущей силы (соответствующей современному понятию силы) и силы ускоряющей (соответствующей ускорению, вызванному силой в данной точке) механики XVIII в. различали эти два понятия. Обе эти величины в понимании ученых XVII и первой половины XVIII в. отличаются от соответственных величин современной механики постоянным множителем dt : под движущей силой тогда понимали mdv (где dv есть приращение скорости за элемент времени dt); под ускоряющей силой (ускорением) тогда понимали просто дифференциал скорости.

¹ Leibniz G., Mathematische Schriften..., «Dynamica de Potentia...» от-дел III, гл. I.

² Там же.

³ Там же.

В дальнейшем изложении Лейбниц тщательно, можно сказать даже пространно, обсуждает выбор этой меры и старается показать, что эта мера при прочих равных условиях, (при одинаковых массе и скорости) должна быть пропорциональна пройденному пространству. Но зависимость ее от скорости Лейбниц обосновывает посредством одной, или собственно, двух новых предпосылок, из которых он, однако, только первую отчетливо формулирует как аксиому, а именно: «при одном и том же количестве материи и при одном и том же пройденном пути, чем меньше время, тем больше действие»¹.

В ходе рассуждений Лейбница хорошо видно, что для него дело заключается в том, чтобы обязательно доказать правильность определения величины действия, и поэтому пробелы в своих рассуждениях он по возможности заполняет более или менее вероятными предположениями. Естественно сделать отсюда вывод, что у него перед глазами была цель, для которой ему была нужна именно эта величина. Однако эта цель не обнаруживается, так как указанная работа по динамике не завершена. Лейбниц пишет И. Бернулли, что написанную им в Италии книгу он оставил для издания во Флоренции превосходному, дружески расположенному математику барону фон Боденгаузену. На подлинной рукописи имеются заметки на полях, которые указывают на намерение пересмотреть ее. Из нее была опубликована только короткая выдержка в *Acta Eruditorum* в 1695 г., вторая же часть осталась неопубликованной. В ней находится исследование понятия действия, но ничего нет о мере действия. Обстоятельность изложения и обоснования свидетельствуют лишь о том, какое большое значение Лейбниц² придавал этому понятию. В опубликованном тексте единственное употребление, которое он из него сделал, заключается в том, что им обосновывается один из путей определения величины эквивалента работы (потенция) движущегося тела. Однако из его рассуждений все же становится ясным, что побудило его понимать продолжение направленного движения не только как пассивное состояние, как инерцию, но как действие, так как именно оно является носителем потенции, неразрушимость которой он подразумевает и переход которой в другие эквивалентные формы работы ему уже известен.

Но если Лейбниц имел в виду из понятия действия найти лишь величину энергии, то это представляется весьма странным обходным путем, который едва ли был способен произвести впечатление на его противников картезианцев.

В работе Лейбница о динамике и в его переписке с И. Бернулли по этому вопросу, где он защищает свое определение величины дей-

¹ Leibniz G., *Mathematische Schriften... Dynamica...*, отдел III, гл. I.

² Couturat L., *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris, 1901.

ствия, не содержится никаких определенных указаний на принцип наименьшего действия, между тем очевидно, что до открытия принципа наименьшего действия ему оставался всего один шаг. При таком положении вещей подлинность опубликованного Самуилом Кенигом в 1751 г. отрывка из письма, якобы направленного Лейбницем базельскому математику Германну, кажется очень вероятной. В нем говорится:

«В действие входит не только время, как Вы полагаете, но оно есть произведение массы на время или времени на живую силу. Я заметил, что в изменениях движений оно остается обычно максимумом или минимумом. Отсюда можно вывести различные предложения...»¹.

Даже не рассматривая вопроса о подлинности этого письма, надо признать, что здесь отнюдь не сформулирован универсальный закон Мопертюи о минимуме количества действия. На это указывает и оговорка «обычно» и указание на «максимум или минимум». Возможно, что именно потому, что Лейбниц не мог найти условий обязательности для действия быть минимумом, он не опубликовал своих соображений. Во всяком случае Мопертюи не знал этих соображений Лейбница.

4. Принцип наименьшего действия у Мопертюи

В 1744 г. Мопертюи (1698—1759) сформулировал принцип наименьшего действия. Он возвел его в ранг наиболее общих законов природы, управляющих физическими явлениями и находящих свое основание в бесконечной мудрости «творца» и целесообразности устройства вселенной.

Это была прямая атака на то течение французской науки, которое, если и не было целиком атеистическим, то во всяком случае стремилось внутри науки избавиться от опеки религии и теологической аргументации. Крупнейшие научные силы приняли активное участие в обсуждении этого принципа. Нельзя забывать, что связь науки с проблемами общего миропонимания расширила границы дискуссии об этом принципе за пределы механики, поднимая это спор об обосновании физической науки на высоту борьбы за общее направление развития познания, в смысле решения основной дилеммы: материализм или идеализм.

Почему же принцип наименьшего действия стал предметом такого оживленного внимания, такой дискуссии, рамки которой раздвинулись далеко за пределы собственно механических проблем? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, надо вспомнить историческую обстановку, в которой протекали обсуждение и разработка принципа Мопертюи.

¹ Leibniz G., Acta Eruditorum, 1751, стр. 156.

В эпоху, непосредственно предшествующую французской революции 1789 г., в литературе и науке происходит ожесточенная борьба. Обострившиеся классовые противоречия находят резкое выражение и на самых отдаленных от практики участках науки.

В области теоретической механики борьба класса, доживавшего свой последний исторический час, и «третьего сословия» отразилась



П. МОПЕРТЮИ (1698—1759)

в известной попытке обосновать механику теологией и тем самым подкрепить теологию со стороны механики при помощи «принципа наименьшего количества действия». В этой исторической обстановке 15-го апреля 1744 г. (т. е. за несколько месяцев до появления эйлерова труда¹) Пьер-Луи Моро де Мопертюи, бывший драгунский капитан, выступавший как геометр, геодезист, географ, астроном, биолог, моралист, лингвист и, прежде всего, метафизик, пропитанный насковозь духом теологической системы, но не лишенный фантазии, автор «проекта» создания города, где говорили бы только по латыни, и «теории», объяснявшей образование зародыша при

¹ Эйлер Л., Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, М.—Л., ГТТИ, 1934.

помощи сил тяготения, представил Парижской Академии мемуар «*Accord de différentes lois de la Nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles*»¹. В нем Мопертюи говорит прежде всего о распространении света. Еще раньше, в 1740 г. Мопертюи заявил, что в простейших случаях равновесия некоторая функция сил имеет максимум или минимум². Этот закон был рассмотрен затем в 1748 и 1749 гг. Куртивоном³ (1715—1785) и в 1751 г. Эйлером.

Только в 1746 г. Мопертюи объявил об универсальном законе движения и равновесия — принципе наименьшего количества действия. Термин «количество действия» понимается им в смысле «действительности» и измеряется произведением mv , где m — масса, v — скорость, s — путь, пробегаемый телом⁴.

Согласно Мопертюи для движения $mv = \text{minimum}$, а в случае равновесия положение тела таково, что, когда ему сообщено малое движение, то произведенное этим количество действия минимально.

Универсальный характер принципа доказывается Мопертюи с помощью аргументов телеологического и теологического характера: «Наш принцип более соответствует представлениям, которые мы должны иметь о вещах, оставляет мир в постоянной потребности в могуществе творца и является необходимым следствием из наиболее мудрого употребления этого могущества»⁵. Для доказательства же значения этого принципа в механике Мопертюи вывел из него всего лишь известные законы рычага и удара упругих и твердых тел.

У И. Бернулли, а также у Ньютона имеется представление об осуществлении законов природы простейшим путем, но оно вытекает не из телеологического финализма, а из представления о каузальной, динамической связи. Мопертюи мог взять у И. Бернулли идею внутренней связи оптики и механики в частной задаче о брахистохроне и телеологически универсализировать ее.

При рассмотрении конкретных примеров Мопертюи начинает с оптики. Он предлагает считать, что путь, проходимый светом при преломлении, таков, что для него количество действия минимально. Он следующим образом пытается объяснить, какой смысл надо вкладывать в это понятие. «При перемещении тела из одной точки в

¹ Maupertuis P., *Accord de différentes lois de la Nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles* (lu à l'Académie des Sciences de 15 avril 1744) *Mém. de l'Acad. d. Sci. de Paris*, 1744, стр. 571; *Oeuvres de M. de Maupertuis*, т. 4, Lyon, 1756, стр. 3—28; «Сборник», стр. 23.

² Maupertuis P., *La loi du repos*, *Mém. de l'Acad. de Paris*, 1740, стр. 240; «Сборник», стр. 18.

³ de Courtivron G., *Recherches de Statique et de Dynamique ou l'on donne un nouveau principe général pour la considération des corps animés par des forces variables, suivant une loi quelconque*, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1749, стр. 21 и след.

⁴ Мопертюи, также как Декарт, считал, что в механике основной величиной является количество движения mv .

⁵ Maupertuis P., *Essai de Cosmologie*, *Oeuvres*, т. 1, Lyon, 1756, стр. 44.

другую необходимо некоторое действие : оно зависит от скорости, имеющейся у тела, и от пространства, пробегаемого последним, но оно не является ни скоростью, ни пространством, взятыми в отдельности. Количество действия тем больше, чем больше скорость тела и чем длиннее путь, пробегаемый телом ; оно пропорционально сумме произведений отрезков на скорость, с которой тело проходит каждый из них.

Именно это количество действия является истинной тратой Природы ; и именно оно выгадывается как можно более при движении света¹.

Однако такое определение количества действия может быть применено только к свету, так как в него не входит масса того тела, которое проходит некоторое пространство с той или иной скоростью. Поэтому, чтобы сделать это определение полным, надо ввести в него массу, и тогда «количество действия есть произведение массы тел на их скорость и на пространство, которое они проходят. В силу этого, если тело перемещается из одного места в другое, действие тем больше, чем больше масса, чем больше скорость и чем длиннее пространство, на которое тело перемещается»². Позднее Мопертюи отмечает, что многие ученые возражали против данного им наименования, и указывает, что, поскольку Лейбниц и Х. Вольф (1679—1754) употребляли это слово (действие) для выражения той же идеи, он решил оставить этот термин без изменения.

Рассмотрев с помощью своего принципа наименьшего действия закон преломления света, Мопертюи должен был естественно задаться вопросом о том, можно ли, руководствуясь этим принципом, вывести законы других явлений, связанных с распространением света. Поскольку он искал общие принципы природы, исходя из метафизических предпосылок, вопрос становился для него особенно важным : «...это количество действия, которое природа сберегает в движении света через различные среды, управляет ли оно равным образом в случае отражения от непрозрачных тел и в случае простого распространения света? Да, это количество всегда самое малое из возможных»³.

Провозгласив принцип наименьшего действия общим законом света, Мопертюи в 1746 г. представил Берлинской Академии мемуар⁴, в котором он прилагает его к удару тела и к случаю равновесия. Самое название этого мемуара подчеркивает исходную идею Мопертюи, целиком лежащую в области телеологической метафизики.

Мопертюи рассматривает задачу удара для случая твердых и других тел. Вопрос о твердых телах усиленно обсуждался в XVIII в.

¹ Maupertuis P., Accord de différentes lois..., стр. 573.

² Maupertuis P., Essai de Cosmologie..., стр. 36.

³ Maupertuis P., Accord de différentes lois..., стр. 575.

⁴ Maupertuis P., Les lois du mouvement et du repos, déduites d'un principe métaphysique, Mém. de l'Acad. d. Sci. de Berlin, 1746 ; «Сборник», стр. 41.

Фундаментальная работа в этой области принадлежит Иоганну Бернулли¹. Мопертюи приходит к выводу, что для упругих тел... «сумма Живых Сил сохраняется после удара, но это сохранение имеет место только для Упругих Тел, а не для Твердых Тел. Общим принципом, который распространяется и на те и на другие, является то, что *Количество Действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в Природе, является наименьшим возможным*»². Н. Беглен (1714—1789) посвятил последнюю часть своего исследования³ тому, чтобы показать плодотворность применения принципа наименьшего действия для объяснения движения твердых тел, сопоставляя его с законом живых сил.

Что касается равновесия, то несколькими годами раньше, в 1740 г., в работе «La loi du repos» Мопертюи пишет: «Пусть имеется система тяжелых тел или тел, притягиваемых к центрам силами, действующими каждая на каждом теле, как n -я степень их расстояний от центров, тогда для того, чтобы эти тела пребывали в покое, необходимо, чтобы сумма произведений каждой массы на интенсивность силы и на $(n + 1)$ -ю степень ее расстояния от центра силы (что можно назвать суммой сил покоя) являлась максимумом или минимумом»⁴. Он считает, что законы статики могут быть выведены из этого принципа. Общность этого закона имела для Мопертюи особое, исключительно важное значение. Закон должен охватывать всю совокупность явлений природы. Сопоставляя законы удара и равновесия, Мопертюи пишет: «...при ударе тел движение распределяется таким образом, что количество действия, которое допускает происходящее изменение, является наименьшим возможным. В покое тела, которые находятся в равновесии, должны быть расположены таким образом, что если они претерпевают некоторое малое движение, количество действия должно быть наименьшим». Обобщая это положение, Мопертюи далее утверждает: «Законы движения и покоя, выведенные из этого принципа, являются точно теми, какие наблюдаются в природе, и мы можем восхищаться результатами его применения ко всем явлениям. Движение животных, произрастание растений, вращение звезд являются только его следствиями»⁵.

Как же Мопертюи применяет этот принцип к конкретным задачам оптики и механики, правильное решение которых должно, по его мнению, дать незыблемое доказательство истинности его утверждения?

¹ Bernoulli I., Discours sur les lois de la communication du mouvement, Opera omnia, Lausanne et Genève, 1742, т. III, стр. 8 и след.

² Maupertuis P., Les lois du mouvement et du repos..., стр. 293; «Сборник», стр. 55.

³ Béguélin N., Recherches sur l'existence des corps durs, Mém. de l'Acad. d. Sci. de Berlin, 1744 (1751), стр. 346 и след.

⁴ Maupertuis P., La Loi du repos..., стр. 244, «Сборник», стр. 19.

⁵ Maupertuis P., Les lois du mouvement et du repos, стр. 286—287.

Мопертюи рассматривает в работе «*Accord de différentes lois de la Nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles*» прежде всего законы, которым подчиняется свет: закон прямолинейного распространения в однородной среде, закон отражения, закон преломления и привлекает при этом механические аналогии.

«Первый из этих законов является общим для света и всех тел: они движутся по прямой линии, если только с этой линии не отклоняет их инородная сила.

Второй является тем самым законом, которому следует упругий мяч, брошенный на негибкую поверхность. Механика доказывает, что мяч, встречающий такую поверхность, отражается под углом, равным углу встречи с нею; это же совершает и свет.

Но третий закон объясняется далеко не так удачно. Когда свет переходит из одной среды в другую, явления совершенно отличны от явлений, имеющих место в случае мяча, пересекающего различные среды, и каким бы способом ни пытались объяснить преломление, находятся трудности, которые пока еще не преодолены¹.

Изложив состояние вопроса о преломлении света и отвергнув концепции Декарта и Ферма, Мопертюи, прежде чем вывести закон преломления, излагает предпосылки своего фундаментального принципа.

«Глубоко продумав рассматриваемый вопрос, я полагаю, что свет при переходе из одной среды в другую, уже оставив наиболее короткую дорогу, являющуюся прямой линией, может также не следовать по пути наибо́льшего времени. В самом деле, какое предпочтение должно здесь *меть время* перед протяженностью? Если свет не может идти сразу и по наиболее короткому пути и по пути кратчайшего времени, то почему он идет скорее по одному из путей, чем по другому? Он не следует ни по какому из них; он выбирает путь, имеющий более реальное преимущество: *путь, которого он придерживается, является путем, для которого количество действия будет наименьшим*»².

Затем Мопертюи выводит закон преломления света.

Пусть имеются две различные среды, отделенные поверхностью, представленной линией CD , скорость в первой среде m , во второй — n (рис. 4). Пусть луч света, который выходит из точки A , должен прийти в данную точку B . Для того, чтобы найти точку R , в которой луч должен преломиться, отыскиваем точку, где луч, изламываясь, имеет наименьшее количество действия; полагаем, что $m \cdot AR + n \cdot RB$ должно быть минимумом. Легко видеть из рисунка:

$$m \sqrt{AC^2 + CR^2} + n \sqrt{BD^2 + DR^2} = \min$$

¹ Maupertuis P., *Accord de différentes lois...*, стр. 576; «Сборник», стр. 24.

² Там же, стр. 578.

где AC и BD — постоянные, и

$$\frac{m \cdot CR \cdot dCR}{\sqrt{AC^2 + CR^2}} + \frac{n \cdot DR \cdot dDR}{\sqrt{BD^2 + DR^2}} = 0.$$

Так как CD — постоянно, то $dCR = -dDR$ и

$$\frac{m \cdot CR}{AR} - \frac{n \cdot DR}{BR} = 0 \text{ и } \frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} = \frac{n}{m},$$

т. е. отношение синуса падения к синусу преломления обратно отношению скоростей, которые свет имеет в каждой среде. «Все явления преломления согласуются теперь с важным принципом, что Природа при осуществлении своих действий идет всегда наиболее простыми путями»¹.

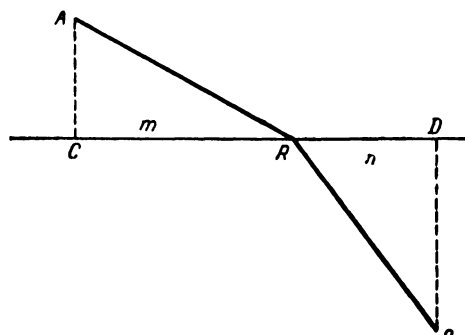


Рис. 4.

В опубликованной в 1746 г. работе «Les lois du mouvement et du repos, déduites d'un principe métaphysique», Мопертюи прилагает принцип наименьшего действия к изучению прямого удара двух тел. Он рассматривает результат прямого удара двух одно-

родных шаров, исходя из гипотезы, что величина удара двух данных тел зависит единственно от их относительной скорости.

Задачу удара Мопертюи рассматривает с помощью принципа наименьшего действия следующим образом. Пусть два твердых тела A и B , массы которых m и m' , движутся в одном и том же направлении со скоростями v_0 и v'_0 , $v_0 > v'_0$ причем так, что произойдет удар. Изменение, происходящее во вселенной, по мнению Мопертюи состоит в том, что тело A , которое двигалось со скоростью v_0 и проходило в единицу времени путь v_0 , будет двигаться со скоростью v_1 , а тело B , которое двигалось со скоростью v'_0 и проходило путь v'_0 , будет двигаться со скоростью v_1 и проходить путь v_1 . Дальнейший ход рассуждений Мопертюи следующий. Это изменение таково, как если бы, в то время как тело A двигалось со скоростью v_0 и проходило пространство v_0 , оно переносилось назад на некоторой нематериальной плоскости, которая сама движется со скоростью $v_0 - v_1$, проходя пространство $v_0 - v_1$; и в то время, как тело B двигалось со скоростью v'_0 и проходило пространство v'_0 , оно переносилось вперед нематериальной плоскостью, которая сама движется со скоростью $v_1 - v'_0$, проходя пространство $v_1 - v'_0$. Иначе говоря,

¹ Maupertuis P., Accord de différentes lois..., стр. 578.

тела A и B движутся с собственными скоростями на подвижных плоскостях, или они неподвижны; движение плоскостей, несущих эти тела, таково, что количество действия, произведенное в природе, будет $m(v_0 - v_1)^2$ и $m'(v_1 - v'_0)^2$, сумма которых должна быть наименьшей из возможных. Имеем

$$mv_0^2 - 2mv_0v_1 + mv_1^2 + m'v_1^2 - 2m'v_1v'_0 + m'v'^2_0 = \min$$

или

$$-2mv_0dv_1 + 2mv_1dv_1 + 2m'v_1dv_1 - 2m'v'_0dv_1 = 0,$$

откуда получаем для общей скорости

$$v_1 = \frac{mv_0 + m'v'_0}{m + m'}.$$

Аналогичным образом рассматривается случай, когда два тела движутся навстречу друг другу.

Переходя к исследованию удара упругих тел, Мопертюи рассуждает совершенно аналогично изложенному. В этом случае относительная скорость до и после удара сохраняется, т. е.

$$v_0 - v'_0 = v'_1 - v_1.$$

Для количества действия пишем:

$$m(v_0 - v_1)^2 + m'(v'_1 - v'_0)^2$$

и условия минимальности этой величины дают:

$$v_1 = \frac{mv_0 - m'v'_0 + 2m'v'_0}{m + m'},$$

$$v'_1 = \frac{m'v'_0 - mv'_0 + 2mv_0}{m + m'}.$$

В этом случае имеет место закон сохранения живых сил. «Однако, — замечает Мопертюи, — это сохранение имеет место только для упругих тел и не имеет места для тел твердых. Общим принципом, который распространяется и на те и на другие, является то, что количество действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в природе, является наименьшим возможным»¹.

В конце этой работы Мопертюи изучает равновесие рычага. Ход его рассуждений таков. Пусть s — длина рычага, который он предполагает нематериальным и на концах которого помещены два тела с массами m_1 и m_2 . Пусть далее z — расстояние тела m_1 до искомой точки опоры и $s - z$ — то же для тела m_2 . Очевидно, что если рычаг получит какое-либо малое смещение, то тела m_1 и m_2 опишут малые

¹ Maupertuis P., Les lois du mouvement..., стр. 294.

подобные дуги, пропорциональные расстояниям этих тел от искомой точки. Эти дуги будут пространства, пройденные телами, и в то же время будут представлять их скорости. Количество действия будет пропорционально произведению массы каждого тела на квадрат описанной им дуги или, поскольку дуги подобны, произведению массы каждого тела на квадрат расстояния от точки, вокруг которой поворачивается рычаг, т. е. $m_1 z^2$ и $m_2 (c - z)^2$, сумма которых и должна быть минимальна:

$$m_1 z^2 + m_2 (c - z)^2 = \min$$

или

$$2 m_1 z \, dz + 2 m_2 z \, dz - 2 m_2 c \, dz = 0,$$

откуда

$$z = \frac{m_2 c}{m_1 + m_2}$$

в полном соответствии с хорошо известным законом статики.

Итак, для доказательства механического значения своего принципа Мопертюи вывел из него законы рычага и законы удара упругих и твердых тел. Что же касается доказательства универсальной значимости этого принципа, то аргументы Мопертюи, как мы видели, имеют исключительно теологический характер.

Можно сказать, что наиболее крупной заслугой Мопертюи явилось выдвижение принципа минимума количества действия как универсального закона природы, в то время как у Эйлера то же соотношение, более осмысленное и точно математически выраженное, рассматривалось как применимое лишь к частным задачам. Вот в этом универсальном смысле сформулированного Мопертюи принципа наименьшего действия и заключена причина признания Эйлером приоритета Мопертюи. Такого универсального принципа не было ни у Лейбница, ни у Эйлера, хотя тот же принцип, но не возведенный в ранг «законов мироздания», был открыт Эйлером даже ранее Мопертюи.

Попытка введения телеологии в механику вызвала резкий отпор. Опубликованные Мопертюи работы, в которых давалось телеологическое «обоснование» принципа наименьшего действия, породили большую дискуссию, вышедшую далеко за пределы механики. В этой дискуссии переплелись вопросы приоритета (Кениг оспаривал приоритет Мопертюи), натурфилософские и физические вопросы о мере движения и фундаментальные проблемы мировоззрения и философии. Недаром в ней приняли участие не только специалисты математики и механики, но и представители философии и публицистической литературы. Были опубликованы многочисленные статьи самого Мопертюи, Кенига, Патрика Дарси, Г. Куртиврона

Эйлера¹, ряд статей Д'Аламбера в Энциклопедии, (статьи «Сила», «Действие», «Космология» и др.), памфлеты Вольтера, письма прусского короля Фридриха II и др. В этой дискуссии Эйлер выступал на стороне Мопертюи, защищая его приоритет.

Независимо от того, рассматривался ли тем или иным автором вопрос о приоритете или мере движения, в конечном счете на авансцену выступал центральный вопрос мировоззрения о причинной обусловленности явлений материального мира или о телеологической их преднаправленности мудростью творца. Именно поэтому дискуссия приняла столь острый характер, что Д'Аламбер сравнивает этот спор, разгоревшийся вокруг принципа наименьшего действия, с религиозными спорами: «Этот спор о действии, если нам будет позволено сказать, несколько походит на некоторые религиозные споры по горечи, которая была в него вложена, и по количеству людей, принявших в нем участие, ничего в этом не смысля². Таким образом, идейным источником работы Мопертюи было желание найти теологически или, по меньшей мере, телеологически обоснованный закон, который был бы последним основанием механики и из которого следовали бы все законы природы.

Д'Аламбер (1717—1783), конечно, не мог остаться в стороне от этой дискуссии ни как механик, ни как философ. Действительно, в статьях в Энциклопедии, редактором которой он был вместе с Дидро, Д'Аламбер с большей или меньшей подробностью рассматривает вопрос о принципе наименьшего действия. С плохо скрытой иронией он отводит претензии Мопертюи на открытие универсального закона, являющегося якобы непосредственным выражением могущества бога. Что же касается чисто механического значения принципа, то он указывает прежде всего, следуя Эйлеру, на его глубокую связь с принципом живых сил и на возможность решения отдельных частных задач механики. Д'Аламбер вполне в духе своих взглядов на механику в целом отмечает, что можно найти различные математические выражения для одних и тех же явлений и что отыскивать в этих выражениях какой-либо иной смысл, кроме того, который заключен в их математической форме, — задача ненужная и даже вредная. По сравнению с принципом причинности,

¹ Euler L., *Dissertatio de principio minimae actionis una cum examine objectionum prof. Koeniggi contra hoc principium factorum*, Berlin, 1753; Euler L., *Sur le principe de la moindre action*. Mém. de l'Acad. d. Sci. de Berlin, 7 (1751), 1753; Euler L., *Examen de la dissertation de M. le professeur Koenig insérée dans les Actes de Leipzig, pour le mois de mars 1751*, Mém. de l'Acad. d. Sci. de Berlin, 6 (1751), 1753; Euler L., *Exposé concernant l'examen de la lettre de M. de Leibnitz, alléguée par M. le prof. Koenig, dans le mois de mars, 1751, des Actes de Leipzig à l'occasion du principe de la moindre action*, Mém. de l'Acad. d. Sci. de Berlin, 6 (1750), 1752.

² Art. *Cosmologie*, *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, par une société de gens de lettres, т. 4, 1754, стр. 297.; «Сборники», стр. 116.

который нашел свое выражение в механике Ньютона и самого Д'Аламбера, — говорит последний — попытки телеологически обосновать науку на принципе наименьшего действия, производят впечатление чахлого дерева. Все эти глубокие замечания Д'Аламбера сопровождаются весьма вежливыми и явно внешними для существа разбираемых вопросов упоминаниями всемогущего творца и т. п.



Ж. Д'АЛАМБЕР (1717—1783)

Д'Аламбер говорит далее о необоснованности «...тех доказательств законов движения, которые давали некоторые философы исходя из принципа конечных причин, т. е. из тех целей, которые творец мира должен ставить себе, устанавливая эти самые законы. Подобные доказательства могут иметь силу лишь в том случае, когда они опираются на предшествующие им прямые доказательства, полученные из принципов, более доступных нашему пониманию. В противном случае, как это нередко бывает, они могут приводить нас к ошибочным заключениям. Именно потому, что Декарт следовал этому пути, именно потому, что он полагал, что по мудрости создателя во вселенной сохраняется всегда одно и то

же количество движения, он ошибся в законах движения. Кто будет подражать в этом Декарту, тот рискует или впасть в такую же ошибку, или выдать за общий принцип то, что справедливо лишь в определенных случаях, или, наконец, счесть за первичные законы природы то, что является лишь чисто математическим следствием из тех или иных формул¹.

В этой дискуссии принял участие Вольтер (1694—1778), который написал специальный памфлет «*Histoire du docteur Akakia et du natif de Saint-Malo*»² по поводу принципа Мопертюи и попыток последнего дать с помощью этого принципа доказательство бытия бога. По приказу прусского короля Фридриха II этот памфлет был сожжен рукой палача.

Вольтер зло высмеивает Мопертюи и его телеологию, которая, по мнению Вольтера, сводится к банальному утверждению, что бог существует, и к видимости доказательства его существования. Он ссылается на Лейбница, который еще до Мопертюи видел, что на самом деле возможен как минимум, так и максимум, что уже разрушает всю телеологическую и теологическую аргументацию Мопертюи. Вольтер ехидно замечает, что целесообразность устройства мира особенно проявилась в том, что бог послал Эйлера Мопертюи, и Эйлер дал принципу осмысленное и правильное математическое выражение, придав аморфным рассуждениям Мопертюи научную отчетливость, а Мопертюи «ничего не смог понять» в том, что сделал Эйлер.

Вольтер и в других сочинениях не раз с неприкрытой злобой высмеивал телеологию Мопертюи; достаточно взять такие его произведения, как «*Micromegas*», «*Candide*», «*L'Homme aux quarante écus*». Вряд ли нужно говорить, что дело здесь не в научном аспекте проблемы и даже не столько в философской, сколько в общественной и идеологической роли финализма Мопертюи, в той идейной борьбе, которая подготовляла революцию 1789 г.

Патрик Дарси (1725—1779) выдвинул ряд принципиальных возражений против принципа наименьшего действия в форме Мопертюи. Эти возражения изложены в мемуарах Дарси³. Прежде всего Дарси критикует определение «действия», данное Мопертюи, и

¹ Д'Аламбер Ж., Динамика, трактат, в котором законы равновесия и движения тел сводятся к возможно меньшему числу и доказываются новым способом и в котором излагается общее правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга произвольным образом, Гостехиздат, М.—Л., 1950, стр. 39.

² Voltaire, *Histoire du docteur Akakia et du natif de Saint-Malo*, Oeuvres, т. XXIV, Paris, 1892; «Сборник», стр. 723—741.

³ D'Arcy, *Reflexions sur le principe de la moindre action* de M. de Maupertuis, *Mém. de l'Acad. d. Sci.*, 1749; D'Arcy, *Réplique à un mémoire de M. de Maupertuis sur le principe de la moindre action*, *Mém. de l'Acad. de Sci.*, 1752. См. также Brunet P., *Etude Historique sur le Principe de la Moindre Action*, Paris, 1938.

возражает против сближения его с определением действия Лейбница и Вольфа. Вольф писал: «Действие... составлено из масс, скоростей и пространств»¹. В неизданных текстах Лейбница, опубликованных Герхардтом, Кутюра, как указано выше, обнаружил аналогичные утверждения². Дарси же возражает принципиально против таких сближений потому, что «авторитет никогда не может занять место доводов»³. По мнению Дарси, нельзя назвать произведение *тот* действием, так как «два действия, равных и противоположно направленных, не находятся в равновесии»⁴. Он приводит примеры случаев, когда различные «количества действия» производят одинаковый эффект и, наоборот. Критика эта была полезной как в силу неясности и антропоморфных представлений, связываемых с термином «действие», так и в силу произвольности его математического выражения. Однако собственную точку зрения Дарси никак нельзя назвать прогрессивной или даже вносящей ясность в круг вопросов, объединяемых вокруг понятия действия. Дарси дает действию чисто натурфилософское и притом метафизическое, а отнюдь не физическое (хотя бы и смутное) определение. Он говорит, что действие системы тел это «способность системы производить явления (effet). Способность двух противоположных сил производить действие есть разность этих сил; если же силы действуют в одном и том же направлении — это их сумма»⁵.

Принцип, предложенный Дарси, представлял собой, по существу говоря, некоторое обобщение закона сохранения моментов, открытого Даниилом Бернулли и Л. Эйлером. Дарси пытался, исходя из этого закона, создать некоторый метафизический принцип, который он назвал принципом сохранения действия, дабы заменить им принцип наименьшего действия. Конечно, эта попытка не привела ни к каким полезным результатам.

Для дополнительной характеристики этой дискуссии приведем интересные выдержки из неопубликованных писем Г. В. Крафта Эйлеру, весьма любопытных с историко-научной точки зрения⁶.

В письме от 9. II. 1753⁷ Г. В. Крафт пишет Эйлеру о том, что в Тюбингенском университете имела место дискуссия по поводу спора Мопертюи с Кенигом, в результате которой профессура этого университета приняла точку зрения Крафта, отстаивавшего позицию Мопертюи.

¹ Wolff, Commentaires de l'Académie Impériale de Saint-Petersbourg, т. 1, 1726.

² Couturat L., La logique de Leibnitz d'après des documents inédits, Paris, 1901, стр. 480, примеч. 4.

³ D'Arcy, Réplique à un mémoire..., стр. 769.

⁴ Там же, стр. 767.

⁵ Там же, стр. 768.

⁶ Возможность опубликовать эти письма так же, как и приводимый ниже отрывок из письма Лаланда, автор обязан любезности Ю. Х. Копелевич.

⁷ Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3, лл. 312, 313 об.

В письме от 4. VI. 1753¹ Г. В. Крафт пишет о статье в Тюбингенской ученой газете, где он и Клемм (Clemm) написали похвальную рецензию о работе Эйлера «Dissertatio de Principio minimae actionis una cum examine objectionem prof. Koeniggi contra hoc principia factorum». Крафт отмечает, что он «с удивлением узнал, что Вольтер также ввязался в этот спор, в котором он является совершенно некомпетентным судьей».

В письме от 28. VIII 1753 г.² Г. В. Крафт пишет: «Я надеюсь, что теперь спор между нашим президентом и его противниками наконец прекратился, после того как публика достаточно повеселилась и посердилась. Однако я хочу между нами (подчеркнуто Крафтом. — Л. П.) сообщить Вам некоторую деталь, которая, насколько мне известно, еще не была приведена ни одним из противников Мопертюи. Если в окружности на пути из А и В луч должен отразиться от касательной, то это, конечно, произойдет так, что $\angle ACF = \angle BCE$ (рис. 5). При этом $AC + CB$ есть путь максимальный, а вовсе не минимальный, ибо легко доказать, что любой путь

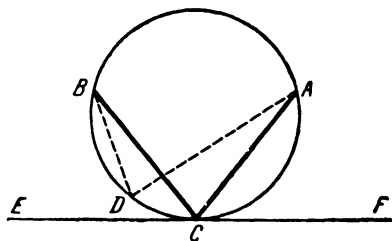


Рис. 5.

$$AD + DB < AC + CB,$$

а в случае отражения согласно минимальности действия должен быть также минимален и путь.

Некоторые старые авторы уже отметили, что минимальный путь понятен лишь в том случае и избирается лишь там, где он возможен; и я хочу это принять; однако против этого все же говорит то, что с равенством угла падения и отражения согласуется не только минимум, но и максимум действия, в то время как, если я хочу твердо придерживаться принципа наименьшего действия, то я должен утверждать, что луч не может отражаться из А в В по $AC + CB$, и, таким образом, никакие равные углы не могут быть построены по ту и другую сторону С, но луч должен проходить по прямой линии из А в В, что противоречит геометрии и опыту. Может быть природа и является бережливой матерью, которая обходится наименьшим там, где это возможно, но там, где этого нельзя достичь, она платит честно и столько, сколько возможно, чтобы не прослыть скрягой».

Кроме перечисленных авторов, принципу наименьшего действия посвятили свои работы Тетенс (1737—1807)³ и

¹ Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3. л. 330.

² Там же, л. 338.

³ Tetens J. N., Commentatio de principio Minimi, Bkezzoni et Wismariae, 1769, стр. 1—47.

Бонфиоли (1730—1804)¹, которые ни с чисто механической, ни с принципиальной точки зрения не внесли ничего нового в проблему. Интересно отметить лишь тот странный факт, что в статье, вышедшей в 1783 г., Бонфиоли ни словом не упоминает о работе Лагранжа и, видимо, даже не знает ее.

5. Принцип наименьшего действия у Эйлера

Я. Бернулли не только решил задачу о брахистохроне, но также показал, как могут быть решены аналогичные более трудные задачи. Из подобных задач наибольшую известность получила изопериметрическая задача. Изопериметрическими задачами в узком смысле слова называют задачи отыскания геометрической фигуры максимальной площади при заданном периметре, или, иначе говоря, определение среди всех простых замкнутых линий, имеющих данную длину, той, которая охватывает наибольшую площадь. Классическим примером такой задачи является так называемая задача Дидоны. В таких задачах требуется определить экстремум функционала A при дополнительном условии, что функционал

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} dt$$

сохраняет постоянное значение. Иначе говоря, это — задачи на условный экстремум с указанным условием.

В настоящее время изопериметрическими задачами называется значительно более общий класс задач, а именно: найти экстремум функционала

$$A = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_i, y'_i) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

при так называемых изопериметрических условиях

$$\int_{x_0}^{x_1} F_k(x, y_i, y'_i) dx = s_k \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

где s_k постоянные, а $m \leq n$.

В ходе решения задачи о брахистохроне, приведшего к выводу о том, что искомая кривая является циклоидой, Я. Бернулли высказал принцип, который хотя и не имел полной общности, но сыграл значительную роль как на первой стадии развития вариацион-

¹ Bonfioli, De Maupertuisiano Minimae actionis principio, De Boloniensi scientiarum et artium Instituto atque Academie commentarii, VI, 1783.

ного исчисления, так и в сформулировании Эйлером принципа наименьшего действия. Принцип Я. Бернулли гласит, что если какая-либо кривая обладает свойством максимума или минимума, то и каждая ее бесконечно малая часть обладает тем же свойством. Именно это позволило Эйлеру написать вместо конечного пути s ,



Л. ЭЙЛЕР (1707—1783)

входившего в формулировку принципа наименьшего действия, данную Мопертюи, элемент пути ds и тем самым сделать огромный шаг вперед. Надо отметить, что, рассматривая задачу о брахистохроне в сопротивляющейся среде, Эйлер показал, что длина и форма предшествовавшего пути имеют влияние на скорость в элементе пути. Таким образом, вся кривая могла быть брахистохроной, хотя каждый элемент ее и не обнаруживал этого свойства. Это означало, что принцип Я. Бернулли не может быть универсальным.

В 1697 г. И. Бернулли была поставлена еще одна задача на отыскание минимума: провести кратчайшую линию между двумя заданными точками на произвольной поверхности. Первые исследо-

вания этой задачи были выполнены Лейбницем и Я. Бернулли, но наиболее важный результат был найден самим И. Бернулли. Он показал, что в любой точке кратчайшей линии соприкасающаяся плоскость перпендикулярна касательной плоскости к поверхности, что, как известно, является основным свойством геодезических линий. Понимая всю важность решения задачи о геодезических линиях, И. Бернулли хотя и не сразу опубликовал найденный результат¹, но предложил заняться этой задачей своему ученику Л. Эйлеру. Эйлер, который уже тогда, хотя ему был лишь двадцать один год, «вычислял, как человек дышит» (Араго), напечатал в 1728 г. статью², где дал общее решение поставленной И. Бернулли задачи. Четыре года спустя Эйлер опубликовал мемуар³, в котором изопериметрическая задача была сформулирована в общем виде. После этого Эйлер публикует ряд работ, которые заложили основы вариационного исчисления. Он показал, что проблема нахождения экстремума определенного интеграла может быть решена простыми средствами без применения специальных методов. Для этого надо воспользоваться тем, что определенный интеграл может быть заменен суммой достаточно большого числа членов, а производные могут быть заменены конечными разностями. Ошибки, которые мы при этом делаем, могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Разделим интервал между $x = a$ и $x = b$ на равные малые интервалы; в качестве абсцисс этих интервалов получим

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = b,$$

а в качестве ординат

$$y_0 = a, y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1} = \beta,$$

где

$$y_i = f(x_i).$$

Заменим производную $f'(x_i)$ отношением конечных разностей:

$$f'(x_i) = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (1)$$

а интеграл

$$I = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad (2)$$

¹ Он сообщил его в конце 1728 г. упсальскому профессору Клингенштерну; его работы о геодезических линиях были напечатаны лишь в 1742 г.

² Euler L., De linea brevissima in superficie quacunq[ue] duo quaelibet puncta iungente, «Comm. Acad. Petrop.», III (1728), 1732, стр. 110—124.

³ Euler L., De linea celerissimi descensus in medio quocunq[ue] resistente, «Comm. Acad. Petrop.», т. VII (1735), 1740, стр. 150—162.

заменим суммой

$$S = \sum_{i=0}^n F(y_i, y'_i, x_i) (x_{i+1} - x_i). \quad (3)$$

Эта замена включает в себе некоторую ошибку, которая, однако, стремится к нулю, когда каждый из интервалов $x_{i+1} - x_i$ стремится к нулю.

Найдем стационарное значение суммы S . Это — задача обычного типа, для решения которой положим частные производные S по y_i равными нулю, а затем рассмотрим, что получится с этими условиями, если Δx_i стремится к нулю. Так как y_i и y_{i+1} произвольно близки друг к другу, то можно заменить $F(y_i, y'_i, x_i)$ на $F(y_{i+1}, y'_i, x_i)$. Тогда функция, минимум которой надо найти, будет иметь вид

$$S' = \sum_{j=0}^n F(y_{j+1}, y'_j, x_j) (x_{j+1} - x_j). \quad (4)$$

Для того, чтобы образовать частную производную от S' по какому-либо y_{i+1} , необходимо иметь в виду, что y_{i+1} появляется в сумме S' в двух соседних членах, именно при $j = i$, и $j = i + 1$ в силу определения y'_{i+1} . Поэтому

$$\frac{\partial S'}{\partial y_{i+1}} = \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i) + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_i} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{x=x_{i+1}}. \quad (5)$$

Разделив на $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, можно это уравнение записать так:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right]_{x=x_i} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (6)$$

Это есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы сумма S была стационарной. Заметим, что две граничных ординаты y_0 и y_{n+1} суть заданные величины и поэтому не варьируются. Если бы они были неизвестны, то нужно бы было иметь, кроме этого уравнения, еще два дополнительных граничных условия.

В пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ найденное нами уравнение в разностях становится дифференциальным уравнением, а так как точки x_i находятся произвольно близко к любой точке интервала (a, b) , то это дифференциальное уравнение имеет место для всего интервала:

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (a \leq x \leq b). \quad (7)$$

Это основное уравнение было открыто Эйлером и Лагранжем¹.

Рассмотренный вывод основного дифференциального уравнения вариационного исчисления встречает возражения со строгой точки зрения, так как в нем дважды применяется предельный переход и

¹ Лагранж сам говорит, что оно впервые выведено Эйлером (L a g r a n g e, Oeuvres, t. X, стр. 397).

притом таким способом, который не является необходимо допустимым. Метод Лагранжа свободен от этого возражения.

Эйлер отчетливо сформулировал принципиальную разницу между задачами на максимум и минимум дифференциального исчисления и задачами вариационного исчисления. Если в первом определяется то место какой-либо определенной кривой, где «какая-либо заданная переменная величина, относящаяся к кривой, была бы максимумом или минимумом», то в вариационном исчислении «отыскивается сама кривая линия, для которой какая-либо заданная величина была бы наибольшей или наименьшей»¹. Затем во втором томе сочинения «*Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*» (Механика или наука о движении, изложенная аналитически), вышедшем в 1736 г., Эйлер снова занялся исследованием геодезических линий и решил изопериметрическую задачу о брахистохроне заданной длины. Наконец, в 1744 г., отдельным изданием вышел трактат², в котором Эйлер собрал почти все свои исследования предыдущих лет. В своих работах по вариационному исчислению Эйлер ближе к идеям Якоби, а не Иоганна Бернулли. Однако метод его работы существенно отличен от методов предшественников; если последние рассматривали отдельные вопросы, то Эйлер анализирует общие черты ряда проблем в целом. В силу этого решение вариационных задач, которое до него представляло боковую ветвь анализа, возводится им в ранг самостоятельной математической науки.

В письме от 28 января 1741 г. Даниил Бернулли спрашивал Эйлера, может ли он решить задачу центральных сил методом изопериметров. Эйлер нашел решение этой задачи в марте 1743 г., а в 1744 г. оно было опубликовано им под заглавием «Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов» в приложении к знаменитой книге «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле»³.

Как правильно указывает Серре⁴, Эйлеру принадлежит первая отчетливая идея математического содержания, которое вкладывается наукой в принцип наименьшего действия. Именно Эйлер в 1744 г. в указанном выше приложении показал, что для траекторий, описываемых под действием центральных сил, интеграл $\int v ds$, где v — скорость, всегда равен минимуму или максимуму. Эйлер не дал этому выражению какого-либо специального наименования.

¹ Эйлер Л., Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, ГТТИ, М.—Л., 1934, стр. 27.

² Эйлер Л., Метод нахождения кривых линий...

³ Эйлер написал эту работу фактически во второй половине 1743 г.

⁴ Serret I. A., Mémoire sur le principe de la moindre action, C. R. Acad. d. sci., 12, VI. 1871, стр. 697—698.

Так называемый принцип наименьшего действия Мопертюи впервые появился в науке в том же 1744 г.

Математическое выражение, называемое принципом наименьшего действия, у Эйлера естественно вытекало из его работ по отысканию кривых, обладающих экстремальными свойствами. Однако если геометрическая задача блестяще решалась «методом изопериметров», то в случае механического движения приходилось ограничиваться решением уже решенных задач, поскольку указать на основании общих соображений, какая именно величина в том или ином случае будет иметь максимум или минимум, не удавалось. Это значительно ограничивало сферу применения и эвристическое значение принципа наименьшего действия у Эйлера. Еще одно ограничение универсальности принципа вытекало из того обстоятельства, что у Эйлера он органически связан с законом живых сил и справедлив только там, где применим последний.

Пусть масса брошенного тела M , а его скорость $\sqrt{v}$, тогда скорость, обусловленная высотой при прохождении малого промежутка ds , равна v (*celeritas debita altitudini*). Количество движения будет $M\sqrt{v}$, а совокупное, по выражению Эйлера, движение тела на промежутке ds будет $M\sqrt{v} ds$. Эйлер утверждает, что линия, описываемая телом, будет такова, что

$$M \int \sqrt{v} ds = \min. \quad (8)$$

Утверждение, что для действительного движения $\int M\sqrt{v} ds = \min$, Эйлер доказывает рассмотрением различных случаев плоского движения точки: в обыкновенном поле тяжести, в случае произвольных центральных сил, и, наконец, для общего случая, когда действующие силы имеют потенциал.

«Если же, — говорит Эйлер, — рассматривать искомую кривую, как будто бы она была дана, то можно из действующих сил определить скорость $\sqrt{v}$ через величины, относящиеся к кривой, и, следовательно, определить самую кривую методом максимумов и минимумов¹. Впрочем, найденное выражение (8) можно, по словам Эйлера, «привести к живым силам»; в самом деле, так как $ds = \sqrt{v} dt$, то

$$\int \sqrt{v} ds = \int v dt, \quad (9)$$

так что для кривой, описываемой брошенным телом, «сумма всех живых сил, находящихся в теле в отдельные моменты времени, будет наименьшей»².

Эйлер без труда показывает, что при отсутствии каких-либо действующих на тело сил выражение (8) приводит к движению по

¹ Эйлер Л., Метод нахождения..., стр. 574.

² Там же, стр. 575.

прямой «совершенно так, как требуют первые основания механики». Впрочем, Эйлер отдает себе отчет в том, что это отнюдь не является доказательством его принципа: тот же результат получился бы при любой другой функции вместо $\sqrt{v}$.

Из выражения (9) или, в более обычном написании,

$$\int u ds = \int u^2 dt \quad (10)$$

следует, как заключает Эйлер на той же странице, откликаясь на тогдашние споры о мере движения, что: «...таким образом, ни те, кто полагает, что силы следует оценивать по самим скоростям, ни те, кто — по квадратам скоростей, не найдут здесь ничего неприемлемого».

Этим замечанием Эйлера неявно формулируется ограничение области применения принципа наименьшего действия кругом задач, в которых силы имеют потенциал¹.

Таким образом, согласно Эйлеру необходимым условием применимости принципа наименьшего действия является выполнение закона живых сил², в то время как Мопертюи именно в том и усматривал универсальность своего принципа наименьшего количества действия, что он имеет более общее значение, чем закон живых сил

¹ Однако Эйлер более ясно нигде не говорит о том, что возможный путь должен быть подчинен условию сохранения энергии, хотя он и предполагает везде, что скорость частицы зависит только от ее положения, т. е. рассматривает те случаи, когда силы имеют потенциал.

Интеграл Эйлера может быть записан для консервативной системы ($T + U = h$) так :

$$\int \sqrt{(h - U)} ds^2 = \min.$$

Такую форму ровно сто лет спустя (1842—1843 гг.) Якоби придал принципу наименьшего действия. Однако для него ds уже не было обычным элементом траектории в обыкновенном пространстве, а элементом линии изображающей кривой в фазовом пространстве, в котором

$$ds^2 = \sum_i m_i ds_i^2.$$

² Насколько была ясна важность этого вопроса многим ученым того времени, видно из приводимого ниже отрывка неопубликованного письма Лаланда.

В письме от 2 марта 1753 г. (Архив АН СССР, ф. 136, оп. 2, № 3, л. 315, 316) Лаланд пишет Эйлеру: «Я прочитал с удовольствием Ваши мемуары в защиту Мопертюи; я хотел бы, чтобы Вами было обращено больше внимания на то, чем принцип наименьшего действия отличается от принципа живых сил, потому что и тот и другой оценивают действие (l'action) квадратом скорости, предполагая время постоянным; в случае, рассмотренном в статье Кёнига, живая сила равна нулю, ее элемент также равен нулю, точно так же, как элемент действия у Мопертюи, так что здесь нет никакой разницы между ними. С другой стороны, кажется, что Кёниг находится в согласии с Вами, когда он говорит (стр. 169), что «если полный элемент живой силы делается равным нулю, то имеет место равновесие»; это означает не что иное, как то, что живая сила есть минимум...».

или другие законы механики. Однако в той форме, которую придал Мопертюи этому принципу, он имеет смысл только для конечных и мгновенных изменений скорости и поэтому из него можно получать только уравнения, связывающие конечные величины. Эйлерова же форма принципа наименьшего действия охватывает непрерывные движения, и из нее получаются дифференциальные уравнения траекторий.

Работа Эйлера делает совершенно незначительной роль Мопертюи, которому, по существу, принадлежит только название принципа, да и то не слишком удачное. Мопертюи сам пишет: «Этот великий геометр (Л. Эйлер. — Л. П.) не только обосновал принцип более основательно, чем это сделал я, но его взор, более объемлющий и более проникновенный, чем мой, привел его к открытию следствий, которых я не извлекаю»¹.

Формулировка принципа, данная Мопертюи и требующая лишь того, чтобы $ms = \min$, в сущности не позволяет сделать заключение о законах варьирования, ибо не указаны условия, которым должны удовлетворять возможные варьированные движения. Даже Эйлер не смог добиться ясной формулировки принципа, для чего в одинаковой степени важно как выяснение величины, которая должна иметь экстремум, так и выяснение условий, которым должны удовлетворять сравниваемые движения.

Несмотря на то, что выражение $\delta \int uds = 0$, являющееся математически осмысленной формой принципа наименьшего действия, дано Эйлером независимо и одновременно с работами Мопертюи, Эйлер всегда подчеркивал приоритет Мопертюи. Возможно, это объясняется тем, что при склонности к метафизическим спекуляциям он отдавал предпочтение априорной и кажущейся универсальной метафизической аргументации Мопертюи по сравнению с своими результатами, найденными им, как он сам говорит, а *posteriori*². Возможно также, что неоднократное подчеркивание Эйлером приоритета Мопертюи обусловлено в какой-то мере и его дружескими чувствами к президенту Берлинской академии.

Гениальный математик, Эйлер ставит задачу прежде всего математически: он ищет выражение, вариация которого, будучи равнена нулю, дает обычные уравнения механики.

Эйлер показывает, что для нахождения кривой, на которой значение некоторой величины W было бы наибольшим или наименьшим по сравнению с другими кривыми, W должно быть «неопределенной интегральной величиной» (*quantitas integralis indefinita*),

¹ *Maupertuis, Lettres, Lettre XI: sur ce qui s'est passé à l'occasion du principe de la moindre quantité d'action, «Oeuvres», Lyon, 1768, стр. 281.*

² Во всяком случае неясные, плохо оформленные, но общие натурфилософские идеи Мопертюи могли быть известным стимулом, который привел к открытию Эйлером принципа наименьшего действия как строгой динамической теоремы.

которая может быть проинтегрирована только в том случае, когда существует определенное соотношение между x и y . Следовательно,

$$W = \int_{x_1}^x Z dx, \quad (11)$$

и величина Z должна быть образована так, чтобы дифференциал $Z dx$ не мог быть проинтегрирован без установления соотношения между x и y .

Если

$$Z = Z(x, y, p), \quad p = \frac{dy}{dx},$$

то

$$dZ = M dx + N dy + P dp. \quad (12)$$

Чтобы найти кривую, для которой $\int Z dx$ будет иметь абсолютный максимум или минимум, надо воспользоваться классическим уравнением Эйлера

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad N dx = dP, \quad (13)$$

причем (за исключением случаев, когда P не зависит от p) это уравнение будет дифференциальным уравнением второго порядка и при интегрировании его появятся две произвольные постоянные.

Применим этот метод к простейшему случаю однородного поля тяготения, когда брошенное тело испытывает действие постоянной ускоряющей силы g , направленной вертикально вниз. Поскольку $v = a + gx$, где a — постоянная, кривая должна быть такова, что для нее будет

$$\int ds \sqrt{a + gx} = \min,$$

а так как

$$ds = dx \sqrt{1 + p^2},$$

то должно быть

$$\int dx \sqrt{(a + gx)(1 + p^2)} = \min.$$

Сравнивая это выражение с общей формулой

$$\int Z dx = \min,$$

видим, что

$$Z = \sqrt{(a + gx)(1 + p^2)}$$

и в дифференциале

$$dZ = M dx + N dy + P dp$$

будет

$$N = 0 \quad \text{и} \quad P = \frac{p\sqrt{a+gx}}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Согласно (13), если $N = 0$, то $dP = 0$, а $P = \sqrt{C}$, где C — постоянная. Следовательно,

$$\sqrt{C} = \frac{p\sqrt{a+gx}}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dy\sqrt{a+gx}}{ds},$$

откуда

$$Cdx^2 + Cdy^2 = dy^2(a + gx)$$

и

$$dy = \frac{\sqrt{C}dx}{\sqrt{(a - C + gx)}},$$

что после интегрирования дает

$$y = \frac{2}{g} \sqrt{C(a - C + gx)}.$$

Это, как непосредственно очевидно, есть уравнение параболы. Оно без труда приводится к виду

$$y = 2 \sqrt{\frac{bx}{g}}$$

в согласии с прямым методом нахождения уравнения движения брошенных тел.

Необходимо, однако, как пишет Эйлер, исследовать, «насколько широкий смысл имеет этот принцип, чтобы не придавать ему большего значения, чем позволяет его сущность»¹. Для этого рассмотрим общий случай движения брошенных тел, разделив его на два основных вида. В первом случае скорость тела есть функция только его положения [т. е. движение происходит в потенциальном поле, для которого $F = F(r)$, $v = v(r)$]. Во втором случае $v \neq v(r)$; это имеет место, когда либо центры, к которым стремится тело, подвижны, либо движение происходит в сопротивляющейся среде.

Рассмотрим первый случай. Сколько бы ни было неподвижных центров сил, скорость тела в любой точке A будет функцией $CP = x$ и $CQ = y$ (рис. 6). Итак, пусть v есть некоторая функция от x и y , так что

$$dv = T dx + V dy. \quad (14)$$

¹ Эйлер Л., Метод нахождения..., стр. 589.

Тело будет поэтому двигаться так, как если бы на него действовали в A две силы: T — параллельная x и V — параллельная y . Отсюда тангенциальная сила будет равна

$$\frac{Tdx + Vdy}{ds},$$

нормальная —

$$\frac{-Vdx + Tdy}{ds}, \text{ и } \frac{2v}{r} = \frac{-Vdx + Tdy}{ds} = \frac{-V + Tp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Если метод максимумов и минимумов приведет к тому же ре-

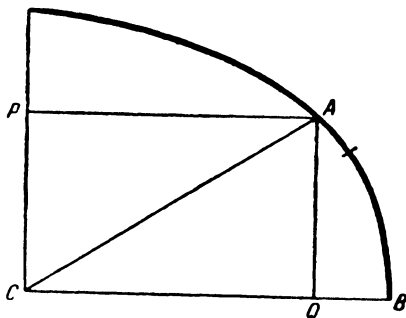


Рис. 6.

зультату, то «наш принцип, — говорит Эйлер —, непременно будет сообразен с истиной»¹.

Так как $v = a + gx$, где a — постоянная, то, приняв во внимание, что

$$ds = dx \sqrt{1+p^2},$$

найдем, что минимумом должна быть величина

$$\int dx \sqrt{(a + gx)(1 + p^2)} = \int dx \sqrt{v(1 + p^2)}.$$

Продифференцировав величину $\sqrt{v(1 + p^2)}$ и приняв во внимание (14), получим:

$$\frac{Tdx \sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{v}} + \frac{Vdy \sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{v}} + \frac{pdp\sqrt{v}}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Отсюда для искомой кривой получим следующее уравнение:

$$\frac{vdx \sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{v}} = d \left(\frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{1+p^2}} \right) = \frac{dp\sqrt{v}}{(1+p^2)^{3/2}} + \frac{p(Tdx + Vdy)}{2\sqrt{v}(1+p^2)}$$

или

$$-\frac{dp\sqrt{v}}{(1+p^2)^{3/2}} = \frac{Tpdx - Vdx}{2\sqrt{v}(1+p^2)}.$$

Но радиус соприкасающегося круга в точке A

$$r = \frac{-(1+p^2)dx\sqrt{1+p^2}}{dp},$$

¹ Эйлер Л., Метод нахождения... стр. 591.

а следовательно, будем иметь

$$\frac{2v}{r} = \frac{Tp - V}{\sqrt{1 + p^2}}$$

в полном согласии с решением, найденным прямым методом.

Итак, если действующие силы можно свести к двум силам T и V , параллельным соответственно осям координат x и y пропорциональным некоторым функциям переменных x и y , то для описываемой кривой движение тела, «собранный по всем элементам, всегда будет наименьшим»¹.

На основании приведенного доказательства Эйлер делает следующий вывод: «Итак, этот принцип имеет столь широкое значение, что подлежащим изъятию представляется только движение, возмущаемое сопротивлением среды; причем легко видеть причину этого изъятия, потому что в этом случае тело, приходя к одному и тому же месту различными путями, приобретает не одну и ту же скорость. Таким образом, если устранить всякое сопротивление движению брошенных тел, то всегда будет иметь место то постоянное свойство, что сумма всех элементарных движений будет наименьшей. И это свойство будет наблюдаться в движении нескольких тел, рассматриваемых вместе; как бы они ни действовали одно на другое, всегда сумма их движений остается наименьшей»².

Далее Эйлер решает задачи о движении брошенного тела в однородном поле тяжести и в поле тяжести, в котором сила, направленная вертикально вниз, есть некоторая функция высоты, а также более сложную задачу, когда на тело действуют две силы (горизонтальная и вертикальная), и некоторые другие. Все эти задачи решены Эйлером в простой и изящной форме способами, развитыми в «Метод нахождения кривых линий».

К этим решениям вполне относятся известные слова Лапласа: «Читайте, читайте Эйлера — это наш общий учитель».

Однако Эйлер не приложил принципа наименьшего действия к задаче взаимного притяжения. Эта задача была позже рассмотрена Лагранжем.

Математическое рассмотрение интересующей нас задачи не обходится у Эйлера без телеологических и метафизических соображений. Эти соображения не играют никакой роли в разработке метода минимумов и максимумов в целом и в решении конкретных задач статики и динамики. В процессе развития этих принципов и методов телеологические аргументы и идеи, естественно, постепенно отпадали. Уже Эйлер убедился в том, что каузальное объяснение не только эквивалентно телеологическому описанию явлений, но и имеет перед последним то очевидное преимущество, что любая

¹ Эйлер Л., Метод нахождения..., стр. 592.

² Там же, стр. 593.

задача механики может быть решена без помощи принципа наименьшего действия, в то время как последний требует при рассмотрении конкретных задач предварительного знания их решения.

Мы уже упоминали, что Эйлер поддерживал Мопертюи во время известной дискуссии. Поэтому неудивительно, что для обоснования принципа он сначала пользуется прямо телеологической аргументацией, но в конце концов приходит к выводам, которые по существу лишают этот принцип столь дорогого для Мопертюи божественного ореола.

Вот что говорит Эйлер в приложении I «Об упругих кривых»: «Действительно, так как здание всего мира совершенно и возведено премудрым творцом, то в мире не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума: поэтому нет никакого сомнения, что все явления мира с таким же успехом можно определить из причин конечных при помощи метода максимумов и минимумов, как и из самых причин производящих. Повсюду существуют столь яркие оказания этой истины, что для ее подтверждения нам нет нужды в многочисленных примерах; скорее надо будет направить усилия на то, чтобы в каждой области физических вопросов отыскать ту величину, которая принимает наибольшее или наименьшее значение: исследование, принадлежащее, по-видимому, скорее к философии, чем к математике. Итак, открыто два пути для познания явлений природы — один через производящие причины, который обычно называют прямым методом, другой — через конечные причины — и математик с равным успехом пользуется обоими. А именно, когда производящие причины слишком глубоко скрыты, а конечные более доступны для нашего познания, то вопрос обыкновенно решается непрямым методом... Но прежде всего надо прилагать усилия, чтобы открыть доступ к решению обоим путями, ибо тогда не только одно решение наилучшим образом подтверждается другим, но от согласия обоих мы получаем высшее наслаждение»¹.

Указав, что развитый им для исследования движения в поле центральных сил метод может быть применен к задаче нахождения условий равновесия механических систем, Эйлер усматривает обоснование такой возможности в аргументах, доказательная сила которых ему самому представляется недостаточной:

«... Так как тела в силу инерции сопротивляются всякому изменению состояния, то они, если только будут свободны, будут настолько возможно меньше подчиняться действующим силам; отсюда вытекает, что в порожденном движении эффект, произведенный силами, должен быть меньшим, чем если бы тела двигались каким-либо иным способом. Хотя сила этого рассуждения еще недостаточно видна, все же, так как оно согласно с истиной, я не сомневаюсь,

¹ Эйлер Л., Метод нахождения..., стр. 447—448.

что при помощи принципов здравой метафизики оно может быть возведено к большей очевидности; но это я предоставляю другим — тем, кто занимается метафизикой»¹.

Последнее замечание, впрочем, излишне скромно, — Эйлер сам немало занимался метафизикой. Для него было характерно стремление дать натурфилософское обоснование механики, не довольствуясь тем, что ее основные законы суть научное обобщение эксперимента и наблюдения. Поэтому Эйлер многократно возвращался к проблемам, находящимся на стыке математики, механики, натурфилософии и философии. Им опубликована, например, любопытная с точки зрения изучения попыток ученых XVIII в. воедино связать философию и механику работа: «*Enodatio quaestionis: utrum materiae facultas cogitandi tribui possit nec ne? ex principiis mechanicis petita*»², т. е. «Основанное на принципах механики исследование вопроса, можно ли материи приписать способность мышления, или нельзя». В этой работе механика привлекается на помощь философии. Однако у Эйлера есть и такие работы, где метафизика положена в основание механики: «*Essay d'une demonstration métaphysique de principe général de l'équilibre*»³, т. е. «Опыт метафизического доказательства общего принципа равновесия».

Склонность Эйлера к проблемам, относившимся в XVIII в. к метафизике, и присущие ему теологические и телеологические тенденции проявились в его известной популярной книге «Письма о разных физических и философских материях, писанные к некоторой немецкой принцессе»⁴.

Эта книга получила отрицательную оценку со стороны Д'Аламбера и Лагранжа. Они восприняли книгу Эйлера как выступление против антитеологических, материалистических взглядов передовых французских ученых.

Лагранж пишет Д'Аламберу: «Труды, которые Эйлер публикует в Петербурге, были написаны давно и оставались в рукописи лишь за отсутствием издателя, который хотел бы ими заняться; среди них имеется одно сочинение, которое он не должен был бы публиковать ради своей чести: это — „Письма к немецкой принцессе“» (письмо от 2 декабря 1769 г.). И в другом письме: «...Письма Эйлера к немецкой принцессе, которые Вы желаете видеть и которые, может быть, Вас позабавят выходками против вольнодумцев» (письмо от 15 июля 1769 г.)⁵.

¹ Эйлер Л., *Метод нахождения...*, стр. 593.

² Euler L., *Opuscula varii argumenti*, I, Berlin 1746, стр. 277—286. Рецензия: «*Nouvelle bibliothèque Germanique*», т. 8, 1751, стр. 387—397.

³ Euler L., *Mém. de l'Acad. de sci. de Berlin*, т. 7 (1751), 1753, стр. 246—254.

⁴ Эйлер Л., Письма о разных физических и философских материях, писанные к некоторой немецкой принцессе, с французского языка на русский, переведенные Степаном Румовским, ч. 1, 2, СПб., 1768, 1772.

⁵ Lagrange, *Oeuvres*, т. 13, Paris, 1882, стр. 132 и 143.

Д'Аламбер в письме Лагранжу от 10 июня 1769 г. остроумно сравнивает эту работу Эйлера с имеющими печальную известность комментариями Ньютона к Апокалипсису: «... Судя по тому, что Вы мне о них говорите (речь идет о сочинении Эйлера «Письма к немецкой принцессе». — Л. П.), это — его комментарии к Апокалипсису. Наш друг — великий аналитик, но довольно плохой философ»¹.

Прочитав «Письма к немецкой принцессе», Д'Аламбер пишет (письмо Лагранжу от 7 августа 1769 г.): «Вы имели полное основание говорить, что он не должен был печатать это произведение ради своей чести. Это просто невероятно, как такой великий гений, каким он является в геометрии и анализе, может быть в метафизике ниже самого маленького школяра, чтобы не сказать таким плоским и абсурдным, и вот действительно подходящий случай воскликнуть: Не все богами даровано одному (*Non omnia eidem Dii dedere*)»².

В течение 1746—1749 гг. Эйлер prepares к печати несколько работ, посвященных поискам выражений, имеющих минимум, в различных задачах динамики и статики. Эти работы были напечатаны в 1750—1753 гг.

В статье «*Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces*»³ (Исследования о наибольших и наименьших, которые имеют место в действиях сил), Эйлер рассмотрел при помощи методов вариационного исчисления различные задачи равновесия гибкой нити под действием каких-либо сил при различных условиях. Применяв для рассмотрения этих задач принцип наименьшего действия, Эйлер расширил сферу его применения, распространив его на упругие силы.

В другом мемуаре⁴ Эйлер рассматривает жидкую массу, все частицы которой притягиваются к некоторым неподвижным центрам под действием сил, которые являются какими-либо функциями расстояний от этих центров. Эйлер показывает, что и в данном случае решение, полученное при помощи обычных принципов ньютоновой механики, совпадает с решением, находимым при помощи принципа наименьшего действия. Кроме того, «установив общий принцип, что при всяком состоянии равновесия сумма всех действий сил для всех частиц тела, находящегося в равновесии, имеет минимум, я замечу, — пишет Эйлер, — сверх того, что тот же самый принцип имеет место при всех свободных движениях тел, какие бы силы на них не действовали»⁵.

¹ Lagrange, Oeuvres, т. 13, Paris, 1882, стр. 135.

² Там же, стр. 147—148.

³ Euler L., Mém. de l'Acad. de sci. de Berlin, т. 4 (1748), 1750, стр. 149—189.

⁴ Euler L., Réflexions sur quelques lois générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques, Mém. de l'Acad. de sci. de Berlin, т. 4 (1748), 1750, стр. 189—219, «Сборник», стр. 56.

⁵ Там же, стр. 217.

Эйлер устанавливает, что в состоянии равновесия жидкости под действием сил F_x , F_y , F_z будет иметь место:

$$\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz = \min. \quad (15)$$

Величину $F_i dx_i$ Эйлер называет количеством действия соответствующих сил. Таким образом, если умножить каждую силу на элемент линии, по которой эта сила действует, и сложить интегралы от этих произведений, то полученная сумма будет представлять количество действия всех сил в данной точке. Эйлер указывает, что это правило вытекает непосредственно из принципа Мопертюи. В самом деле, для того, чтобы какая-либо величина имела максимум или минимум, ее дифференциал должен быть равен нулю, а так как дифференциал выражения (15) равен нулю, то можно сказать, что интеграл

$$\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

имеет минимум. Это, так сказать, обращенное заключение, очевидно, не всегда справедливо. Чтобы обобщить это заключение на систему точек, находящихся в равновесии, Эйлер суммирует (15) по всем элементам массы и пишет

$$\int dM (\int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz) = \min, \quad (16)$$

что вполне справедливо, ибо жидкое тело в целом находится в равновесии.

Для перехода к движению Эйлер вводит элемент времени dt . Тогда мгновенное количество действия сил будет

$$dt \sum_i F_i dx_i,$$

а за конечное время получим

$$\int dt \sum_i \int F_i dx_i; \quad (17)$$

«... весьма естественно, — замечает Эйлер, — что тела перемещаются по такому пути, для которого эта сумма всех мгновенных действий есть минимум. Вот, следовательно, новый общий принцип для свободного движения тел под действием каких-либо сил...»¹

Таким образом, Эйлер не считает существенным тот или иной специфический вид величины, носящей название «количество действия». Он говорит как о количестве действия силы $F ds$ (т. е. о работе), так и о количестве действия импульса $m v ds$.

Завершив этот новый цикл исследования по применению принципа наименьшего действия к проблемам механики, Эйлер приходит в общем к тем же выводам, что и в 1744 г. Он снова отмечает,

¹ Цит. соч., стр. 217.

что существуют два метода решения задач механики: «один метод — прямой, основанный на законах равновесия или движения, другой . . . находится с помощью метода максимумов и минимумов. Первый находит решение, определяя эффект по действующим силам; другой — берет в рассмотрение конечные причины и выводит действия»¹. Оба метода, полагает Эйлер, должны находиться в полном согласии и приводить к одному и тому же решению, и именно это согласие убеждает нас в истинности решения, поскольку каждый из рассматриваемых методов основан на несомненных принципах.

Однако, — замечает Эйлер, «. . . часто очень трудно найти формулу, которая должна быть максимумом или минимумом . . .»². Поиски такой формулы, собственно говоря, принадлежат не к области математики, а «. . . к метафизике, поскольку необходимо знать цель, которую природа полагает в своих действиях»³. Метафизика же отнюдь не достигла такой степени совершенства, чтобы для каждого действия, производимого природой, указать то «количество действия», которое является наименьшим; мы еще очень далеки от этого и поэтому почти совершенно невозможно отыскать для большого числа различных случаев формулы, которые будут иметь максимум или минимум. Напротив, если известно решение, найденное прямым методом, то не представляет труда угадать формулы, которые приведут к тому же самому решению, если отыскать их максимум или минимум. Таким образом, если нельзя вторым методом *a priori* находить непосредственно законы явлений, то, зная решение, найденное прямым методом, «. . . мы знаем *a posteriori* эти формулы, которые выражают количество действия, и тогда не представляет более труда показать их истинность с помощью принципов, известных в метафизике»⁴.

Мы уже отмечали, что, по мнению Мопертюи, принцип наименьшего количества действия является универсальным законом, который позволяет дедуктивным путем вывести в конечном счете все законы природы и, в первую очередь, решать любые частные задачи механики.

В отличие от Мопертюи Эйлер, начав с высказываний в том же духе, приходит к другим выводам. Исследуя фактическое применение принципа к частным задачам механики, Эйлер увидел, что найти выражение, которое должно быть максимумом или минимумом, для каждой данной частной задачи можно только тогда, когда уже известно решение этой задачи из обычных принципов механики, формулирующих не конечные цели, а причинно-следственные связи

¹ Euler L., Recherches sur les plus grands et les plus petits qui se trouvent dans les actions des forces, Mém. de l'Acad. de sci. de Berlin, т. 4 (1748), 1750, стр. 151.

² Там же.

³ Там же, стр. 152.

⁴ Там же.

явлений. Таким образом, эвристическое значение принципа оказалось ничтожным: он не давал возможности предвидеть, установить законы даже тех механических явлений, которые всесторонне исследуются обычными дифференциальными уравнениями движений Ньютона. Как отмечал Эйлер, универсальность принципа наименьшего действия даже в пределах механики не является установленной, и он не может сколько-нибудь уверенно оценить границы его применимости. Таким образом, этот закон, который должен был выражать на языке математики универсальную целесообразность вселенной, оказывался чем-то вроде бесплодной смоковницы.

Недаром Эйлер после ряда попыток прекратил свои исследования, связанные с принципом наименьшего действия, несмотря на то, что эта область очень интересовала его как приложение разработанных им методов отыскания кривых линий, обладающих свойством максимума или минимума. Все это показывает, что хотя Эйлер не освободился полностью от влияния телеологического финализма Мопертюи, он, однако, стремился, так сказать, математизировать принцип наименьшего действия.

Несмотря на использование терминологии Мопертюи, Эйлер сформулировал идеи, далеко превосходящие ограниченные и односторонние высказывания Мопертюи¹. Эйлеру принадлежит первая точная и математически плодотворная формулировка принципа наименьшего действия, открывшая новые горизонты для его подлинно научного применения. Именно Эйлер разработал в виде отчетливого и последовательно стройного математического метода те идеи, которые иначе рисковали остаться в глазах поколений блестящей, но не слишком глубокой догадкой. В этом смысле Эйлер является действительным основоположником научно сформулированного принципа наименьшего действия в механике. Он придал ему научную форму, и нужен был еще только один шаг для того, чтобы завершить полное освобождение принципа наименьшего действия от метафизических лохмотьев и математически обобщить его. Этот шаг был сделан Лагранжем (1736—1813).

6. Принцип наименьшего действия у Лагранжа

Научное творчество Лагранжа падает на период, непосредственно предшествовавший Великой французской революции 1789 г. и на время самой революции. В силу этого и несмотря на то, что лично Лагранж оставался в стороне от политических бурь, сотрясавших не только Францию, но и всю Европу, он все же в какой-то мере отразил дух этой замечательной эпохи в своем подходе к осмыслению результатов математического исследования.

¹ Этого не понял Дюра. См. Dugas R., Histoire de la Mécanique, Neuchâtel, 1950.

Приближался исторический час, когда даже пушки, этот, по словам Ришелье, последний довод королей, не смогли защитить то, что мешает бурному потоку развития нового — новой техники, новых социальных отношений. Деятельность буржуазии того времени «направлена на непосредственную действительность, на мирское наслаждение и мирские интересы, на з е м н о й мир»¹. А пока



Ж. ЛАГРАНЖ (1736—1813)

идет подготовка — интенсивная экономическая, политическая, идеологическая борьба так называемого «третьего сословия» в лице его передовых буржуазных элементов с отживающим, но еще господствующим и стремящимся сохранить это господство абсолютистско-феодальным строем. Эти элементы уже ясно отдают себе отчет в природе и характере существующего строя. Ограниченные в возможности критики оружием, они берутся за оружие критики и на всех участках искусства, литературы, философии и науки ломают традиционные схемы и представления. Различные фило-

¹ К Маркс, Ф. Энгельс, Соч., т. 3, стр. 155. ГИЗ, 1930.

софские оттенки, выступающие в этой борьбе: догматический теизм, двусмысленный пантеизм, respectable деизм и, наконец, откровенный атеизм отражают все нюансы расстановки социально-исторических сил в этот предреволюционный период. От просветителей с их утверждением, что «разум в конце концов всегда оказывается прав», через энциклопедистов с их стремлением дать новую систему науки до механистического материализма Гольбаха, Гельвеция и других, разворачивается идеологическая концепция наступающих передовых социальных сил. Им нужна наука, нужна сама по себе, в своем теоретическом и прикладном аспектах, нужна и как мощное оружие в борьбе с теизмом, с господством религии в сфере сознания.

Здание науки, фундамент которого был заложен в XVII в. трудами Галилея, Кеплера, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница и ряда других ученых, каждый из которых представляет собою «гордость человечества», продолжало расти, усложняться, перестраиваться и в XVIII в. Изменялись планы отдельных частей научного здания, создавались новые великолепные пристройки, возводились новые, неведомые ранее отделы и секции, но основной доминантой, господствовавшей в научном искании и в борьбе обретавшей свою силу и мощь, оставался механистический материализм. Великая борьба за освобождение человеческого познания от религиозных и всяких иных пут, за буржуазную «свободу» человека-индивида, который, по словам Руссо, «рождается свободным, а повсюду в цепях», находит свое отражение и проявление в событиях политической жизни, в литературных памфлетах, в обычаях, в искусстве и, наконец, в научном исследовании.

Развитие науки в XVIII в., в первую очередь в одной из передовых стран того времени — Франции, часто характеризуется как период формальной систематизации и математической разработки наследства XVII в. Это, конечно, односторонняя точка зрения, ибо сама систематизация предполагает уточнение и выявление принципов, исходных положений. Недаром в XVIII в. разворачивается борьба между картезианцами и ньютонианцами, проходит дискуссия о принципах механики Ньютона, создаются и разрабатываются принцип Д'Аламбера, принцип возможных перемещений, закон живых сил, принцип наименьшего действия и целый ряд других основополагающих законов и принципов. Не случайно ученые ищут новые формы изложения материала механической науки. Этот обостренный интерес к принципиальной стороне, к обоснованию науки оплодотворяет научное развитие и сам находит в нем свое оправдание.

Механика достигла исключительного расцвета в трудах Д'Аламбера, Эйлера, Лагранжа, Лапласа. Разъясняется движение планет на основе закона Ньютона; в открытиях В. Гершеля достигаются неведомые ранее глубины бесконечного звездного архипелага.

В физике разрабатывается фотометрия Ламбертом, изучается теплота; Дюфе, Нолле, Франклин и особенно Кулон изучают электричество, создавая новую технику научного эксперимента. В химии в результате работ Шееле, Пристли, Кэвэндиша, Штала получены в чистом виде кислород, водород, азот, определен состав воды, введена химическая номенклатура, выяснена неуничтожаемость вещества, установлением которой Ломоносов и Лавуазье увенчивают плеяду этих блестящих открытий. В минералогии и геологии выдающиеся исследователи закладывают основы этих наук: Ромэ-де-Лиль и Бюффон создают новые методы, новые теории и грандиозные картины развития Земли. Начинает разливаться и наука об органической материи: Линней устанавливает ботаническую номенклатуру, братья Жюссье открывают взаимное соподчинение признаков и естественную классификацию. Пищеварение объясняется Реомюром и Спалланцани, дыхание — Лавуазье, Галлер описывает условия и фазы зарождения. Люди проникают в самую глубь животного царства. Реомюр издает свои описания насекомых. Лионне затрачивает двадцать лет на изучение ивовой гусеницы. Спалланцани воскрешает своих коловраток, Нидгем показывает инфузорий, Ламарк исподволь подготавливает свою философию зоологии¹.

Интерес к научным открытиям и исследованиям в высокой степени усиливается благодаря тесной связи научных проблем с общими вопросами миропонимания и философии. В XVIII в. ученые, независимо от области исследования, называются еще философами, математики пишут философские трактаты, философы непосредственно переносят в свои конструкции идеи и тенденции построения наук и в первую очередь теоретической и прикладной механики. Универсальность и специализация, эксперимент и вычисление, философия и конкретные знания, высоты абстракции и широкая популяризация сливаются воедино в трудах передовых ученых этого времени.

Остановим наше внимание на провозвестниках новой философии. В той или иной мере они все знакомы с естественными науками. Вольтер не только одним из первых излагает оптику и астрономию Ньютона, но производит опыты и вычисления. Он представляет в Академию Наук записки «Об измерении двигательной силы», «О свойствах и распространении теплоты». В его лаборатории имеются все известные тогда физические и химические приборы: он работает с термометром Реомюра, призмой Ньютона, пирометром Мушенбрека. Знаменитый автор «Духа законов» Монтескье читает в Академии Бордо лекции о механизме эха, об отправлениях почек, печатает свои наблюдения над растениями и насекомыми. Руссо слушает курс химии, занимается гербаризацией. Дидро преподает

¹ Таннери П., Исторический очерк естествознания в Европе, ГТТИ, 1934; Даннеман Ф., История естествознания, т. 2, ГТТИ, 1934.

математику, пожираемый неутолимой жаждой знания во всех областях науки, искусства, вплоть до технических вопросов производства. Бюффон занимается металлургией, оптикой, географией, анатомией. Философ Кондильяк пишет краткие учебники арифметики, алгебры, механики и астрономии. Кондорсе, Лаланд — математики, физики, астрономы, философы, политики, историки науки и техники. Гольбах, Ламетри, Кабанис — химики, натуралисты, физиологи, медики, философы. Д'Аламбер — механик, математик, астроном, философ. Все они исследователи, вычислители, экспериментаторы, философы, ораторы, писатели горят такой неутолимой жаждой познания, что каждый из них с полным правом мог бы воскликнуть: «Если бы мне жить сто жизней, они не насытили бы всей жажды познания, которая сжигает меня»¹. Но эти ученые не представляют собой единого лагеря, борьба раздирает мир науки так же, как и общественный строй, и в этой схватке нового со старым обе стороны хотят поставить науку на службу своим целям и задачам.

Лагранж занимает в истории механики чрезвычайно важное место. Он сыграл решающую роль и в развитии принципа наименьшего действия. Проблема принципа наименьшего действия становится объектом его внимания в 1760 г. В предисловии к своей «Аналитической механике»² он говорит: «... план настоящего трактата является совершенно новым. Я поставил себе целью свести теорию механики и методы решения связанных с нею задач к общим формулам, простое развитие которых дает все уравнения, необходимые для решения каждой задачи... кроме того, эта работа принесет пользу и в другом отношении: она объединит и представит с одной и той же точки зрения принципы, открытые до сих пор с целью облегчения решения механических задач, укажет их взаимную связь и взаимную зависимость и даст возможность судить об их правильности и сфере их применения».

И действительно, его «Аналитическая механика» сыграла роль сочинения, открывшего новый этап в развитии механики. Основная для Лагранжа идея построения механики как систематического и гармонического здания, возводимого на фундаменте единой общей предпосылки, пронизывает «Аналитическую механику». И это стремление к систематичности и изяществу изложения, к математической законченности построения нашло восторженную оценку у другого великого мастера математического анализа проблем механики — Гамильтона. Во введении к своей работе «Общий метод динамики» Гамильтон говорит: «Лагранж, пожалуй, больше, чем какой-либо

¹ Эти слова принадлежат В. Я. Брюсову. См. В. Брюсов, *Неизданные стихотворения*, Черновые заметки 1910—1911 гг., ГЛИ, 1935, стр. 3.

² Лагранж Ж., *Аналитическая механика*, т. I, Гостехиздат М.—Л., 1950, изд. 2-е, стр. 9.

другой аналитик, сделал для того, чтобы придать стройность подобным дедуктивным исследованиям, доказав, что самые разнообразные следствия, относящиеся к движению системы тел, могут быть выведены из одной основной формулы. При этом красота метода настолько соответствует достоинству результата, что эта великая работа превращается в своего рода математическую поэму¹.

Максвелл говорит о методе Лагранжа :

«Лагранж поставил себе цель—свести динамику к чистому анализу. Он начинает с выражения элементарных динамических отношений в виде соответственных отношений между чисто алгебраическими величинами, и из полученных таким образом уравнений он выводит свои окончательные уравнения путем чисто алгебраического процесса. Некоторые величины (выражающие взаимодействия между частями системы, поставленными в зависимость между собой физическими связями), появляются в уравнениях движения составных частей системы, а исследование Лагранжа, рассматриваемое с математической точки зрения, есть метод исключения этих величин из конечных уравнений. Следя за постепенным ходом этих исключений, ум занимается вычислениями, оставляя в стороне динамические идеи»².

Конечно, создание такой теории предполагало достаточное развитие математики. «Только развитие идей и методов чистой математики дало возможность построить математическую теорию динамики и осветить, таким образом, многие истины, которые не могли быть открыты без этого математического построения, и если мы захотим развить динамические теории других наук, мы должны вдохновить наш ум этими динамическими истинами, так же как математическими методами. Создавая идеи и язык науки, которая, подобно электричеству, имеет дело с силами и их действиями, мы должны непременно сохранять в уме основные идеи динамической науки, чтобы при начале развития этой науки избежать всего способного стать в противоречие с уже установившимися положениями, и с тем, чтобы по мере прояснения наших идей принятый нами язык мог помочь нам, а не являлся бы лишним затруднением»³.

Для нас в этой блестящей характеристике существенно то, что в ней отмечается основное значение математического метода для работы Лагранжа в области механики. И действительно, в силу аналитического (и принципиально аналитического) характера механики Лагранжа его подход к отдельным проблемам теснейшим образом связан с его же математическими работами в различных ветвях анализа. Фурье говорит : «... Он сводит все законы равно-

¹ Hamilton W. R., Essay on the General Method in Dynamics, Phil. Trans., 1834, стр. 247 ; «Сборник», стр. 176.

² Maxwell J. C., A Treatise on Electricity and Magnetism, т. 2, 3-е изд., Oxford, 1892, стр. 199—200.

³ Maxwell J. C., A Treatise on Electricity and Magnetism, ... стр. 210.

весия и движения к одному принципу и, что не менее удивительно, он их подчиняет одному методу исчисления, изобретателем которого он сам является¹, ибо, как известно, с Лагранжа начинается новая эпоха вариационного исчисления.

Лагранж не только придал простой вид решению ранее поставленных задач, найдя удобный алгоритм, но также применил этот новый метод к решению целого ряда сложных задач земной и небесной механики.

Первая его работа, посвященная принципу наименьшего действия, также появилась на свет как развитие и приложение его математических работ по вариационному исчислению.

В 1760—1761 гг. в «Miscellanea Taurinensia» т. II, Лагранж опубликовал статью под названием «Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies».

Лагранж понял, что отыскание минимума определенного интеграла требует специальных методов. С помощью этих методов он прямо решил задачу, которую Эйлер исследовал с помощью сложного предельного процесса.

Рассмотрим такую функцию $y = f(x)$, которая дает некоторому определенному интегралу стационарное значение. Для того чтобы доказать, что мы действительно имеем стационарное значение, рассмотрим тот же самый интеграл для несколько измененной функции $y = \overline{f(x)}$.²

Видоизмененная функция $y = \overline{f(x)}$, очевидно, может быть записана в форме

$$\overline{f(x)} = f(x) + \varepsilon \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — некоторая произвольная новая функция, которая удовлетворяет тем же самым условиям, что и $\overline{f(x)}$, т. е. $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема.

Изменяя ε , мы можем изменить $f(x)$ на произвольно малую величину. Для этого устремим ε к нулю.

В некоторой определенной точке независимой переменной x сравним видоизмененную функцию $\overline{f(x)}$ со значениями исходной функции $f(x)$, образуя разность $\overline{f(x)}$ и $f(x)$. Эта разность называется «вариацией» функции $f(x)$; обозначим ее δy :

$$\delta y = \overline{f(x)} - f(x) = \varepsilon \varphi(x). \quad (18)$$

Вариация функции, аналогично вариации положения точки, характеризуется двумя фундаментальными чертами. Это — произ-

¹ Цит. по Rebière, *Mathématique et mathématiciens*, Paris, 1898, стр. 129.

² См. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., *Курс вариационного исчисления*, Гостехиздат, М. — Л., 1950; Bolza O., *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Leipzig, 1949.

вольное малое изменение, так как параметр ε стремится к нулю. Более того, это виртуальное изменение, так как мы можем произвести его любым образом по нашему усмотрению, т. е. $\varphi(x)$ есть произвольно выбираемая функция, лишь бы выполнялось общее условие непрерывности.

Отметим фундаментальную разницу между δy и dy . Обе операции суть бесконечно малые изменения функции y . Однако dy относится к бесконечно малому изменению данной функции $f(x)$, которое обуславливается бесконечно малым изменением dx независимой переменной, в то время как δy бесконечно малое изменение y , которое создает новую функцию $y + \delta y$.

Вариация независимой переменной полагается равной нулю, т. е.

$$\delta x = 0.$$

На границах, при значениях $f(a)$ и $f(b)$ функции $f(x)$ должно быть

$$\delta f(x)_{x=a} = 0,$$

$$\delta f(x)_{x=b} = 0,$$

так как границы закреплены. Это — случай вариации между определенными пределами.

Пусть дан определенный интеграл

$$J = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad (19)$$

с граничными значениями

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta;$$

требуется найти стационарное значение этого интеграла.

Прежде всего найдем вариацию подынтегрального выражения $F(y, y', x)$, обусловленную вариацией y , имея в виду, что F есть заданная функция трех переменных y, y', x и что эта функциональная зависимость не изменяется процессом варьирования:

$$\delta F(y, y', x) = F(y + \varepsilon \varphi, y' + \varepsilon \varphi', x) - F(y, y', x) = \varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varphi + \frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' \right),$$

где мы пренебрегли высшими членами разложения в ряд Тейлора, так как $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом,

$$\delta \int_a^b F dx = \int_a^b \delta F dx = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varphi + \frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' \right) dx.$$

Разделив на ε , получим

$$\frac{\delta J}{\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \varphi + \frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' \right) dx.$$

Для дальнейшего анализа это выражение не удобно, так как $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не независимы одна от другой, хотя их отношение не может быть выражено в алгебраической форме. Трудность эту можно обойти посредством интегрирования по частям:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \varphi' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \varphi \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \varphi dx.$$

Первый член справа исчезает, так как $\varphi(x)$ исчезает при a и b . В силу этого

$$\frac{\delta J}{\varepsilon} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \varphi dx;$$

обозначим

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = E(x),$$

тогда условие стационарности J примет вид

$$\int_a^b E(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Очевидно, что этот интеграл может исчезать для произвольных функций $\varphi(x)$ только, если $E(x)$ исчезает везде между a и b . Действительно, предположим, что $E(x)$ исчезает повсюду за исключением произвольно малого интервала вокруг точки $x = x_0$. Но внутри этого интервала $E(x)$ практически постоянно и может быть вынесено за знак интеграла

$$\frac{\delta J}{\varepsilon} = E(\xi) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \varphi(x) dx.$$

Ошибка, которую мы при этом делаем, стремится к нулю, когда ε стремится к нулю. Так как интеграл может быть выбран произвольно и неисчезающим, то для того, чтобы выражение $\frac{\delta J}{\varepsilon}$ исчезало, требуется, чтобы исчезал первый множитель. А так как точка $x = x_0$ была выбрана как любая точка интервала между a и b , то для всего интервала между a и b получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (20)$$

Это условие необходимо. Но оно и достаточно, поскольку если подынтегральная функция в δJ исчезает, то исчезает и сам интеграл. Таким образом, это дифференциальное уравнение есть необходи-

мое и достаточное условие для того, чтобы определенный интеграл J был стационарным при заданных граничных условиях:

$$\delta f(x)_{x=a} = 0,$$

$$\delta f(x)_{x=b} = 0.$$

Непосредственно за указанной статьей в том же томе Лагранж печатает статью под характерным заглавием «Application de la méthode, exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique»¹.

Лагранж ссылается в начале статьи на работу Эйлера «Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate guadentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti», в которой Эйлер показал, что для случая движения в поле центральной силы траектория, по которой движется тело, удовлетворяет требованию

$$\int v ds = \min.$$

Лагранж обобщает этот принцип и дает ему следующее выражение: «Общий принцип: имеем произвольные тела $M, M', M'' \dots$, которые каким-либо образом действуют друг на друга и которые могут быть, кроме того, подвергнуты действию центральных сил, пропорциональных произвольным функциям расстояний; пусть $s, s', s'' \dots$ представляя пространства, пройденные этими телами за время t , и пусть $v, v', v'', \dots$ будут их скоростями к концу этого времени, тогда выражение

$$M \int v ds + M' \int v' ds' + M'' \int v'' ds'' + \dots$$

всегда будет представлять максимум или минимум»².

Это определение и выражает тот шаг вперед, который совершил Лагранж в развитии принципа наименьшего действия. Он распространил принцип, сформулированный у Эйлера для материальной точки, на случай произвольной системы точек, связанных между собой и действующих друг на друга произвольным образом.

¹ Lagrange J., Oeuvres, т. 1, 1892, стр. 365. «Сборник», стр. 117.

² Там же, стр. 365.

В первых приложениях вариационного исчисления Лагранж не обращал внимания на условия, которыми различаются максимум и минимум, и доказательство начала наименьшего действия, данное им в «Аналитической механике», с последующими уточнениями этого доказательства не установило ничего иного, кроме того, что вариация действия для действительного движения, в котором имеет место закон сохранения полной механической энергии, равна нулю, и, наоборот, из равенства нулю вариации действия можно получить результат, который не отличается от общей формулы динамики. Но это только одна часть вариационной задачи на нахождение минимума интеграла действия. Вторая часть задачи основана на определении знака второй вариации. Этот вопрос нашел отражение в работах русских ученых: Сабинина, Преображенского, Бобылева, Жуковского, Слудского, Соколова, Талызина и Сомова (см. гл. III).

Таким образом, оказывается возможным применить принцип наименьшего действия к динамике системы. Действительно, пользуясь принципом наименьшего действия, Лагранж в своем мемуаре аналитически решает ряд задач динамики. Это дало повод Якоби заметить, что лагранжев принцип наименьшего действия есть мать всей нашей аналитической механики.

По установленным в его предшествующем мемуаре правилам вариационного исчисления Лагранж пишет

$$\delta \sum m \int v ds = 0, \quad (21)$$

а так как

$$\delta \int v ds = \int \delta(v ds),$$

то, преобразуя

$$\delta(v ds) = v \delta ds + \delta v ds,$$

получаем

$$\sum m \int (v \delta ds + \delta v ds) = 0.$$

Затем Лагранж вводит условие, что если $p, q, r \dots$ — расстояния тела от центров сил $P, Q, R, \dots$, то

$$\frac{v^2}{2} = \text{const} - \int (P dp + Q dq + R dr + \dots)$$

или

$$v \delta v = - \delta \int (P dp + Q dq + R dr + \dots) = - \int (\delta P dp + P \delta dp + \dots).$$

Таким образом, уже в самом начале исследования вводится как необходимое условие принцип живых сил.

Этим предпрещается и круг задач, рассматриваемых Лагранжем в его сочинении. Всего Лагранж решает десять задач из разных отделов динамики. Важнейшими из них являются задачи о движении тела под действием центральных сил, пропорциональных произвольным степеням расстояния, о движении связанных тел, о движении жидкости и некоторые другие.

Возвращаясь к рассмотрению общего направления этой работы, напомним, как мы уже отметили, что само заглавие ее подчеркивает сугубо математический характер этого сочинения Лагранжа. Действительно, в нем не затрагивается ни одна из проблем, связанных с обоснованием механики. В этой работе задачи механики представляются собой лишь определенный класс задач вариационного исчисления.

Мы видим, что Лагранж, для которого механика была «аналитической геометрией четырех измерений», о котором говорили, что он

более интересовался выкладками, чем логическим содержанием понятий, подошел здесь к принципу наименьшего действия как чистый математик. Для него возможность широкого применения принципа основывается на разработанном им вариационном методе. Это есть лишь удобный и изящный способ решения задач.

Никаких «метафизических» предпосылок с поражающим умы фактом минимальности «действия» Лагранж не связывает, и вообще о нем с полным правом можно сказать, что, в противоположность многим своим современникам, он был не только чужд «метафизики», но и прекрасно осознал неприменимость подобной аргументации внутри механической науки.

Всякие попытки связать науку с религией, телеологией вызывали у него глубокий протест. В этом смысле характерно резко отрицательное отношение Лагранжа к Бошковичу — одному из ученых иезуитов. Всякое явное влияние религии на науку отталкивало Лагранжа. Он пишет Кондорсе: «Я в восторге, что вы, наконец, отделались от Бошковича: каковы бы ни были заслуги его трудов, я думаю, что они все же стоят больше, чем его личность. Он монах и иезуит, которого следовало бы сжечь (*Il est moine et jésuite à brûler*)»¹. Это одно из проявлений буржуазных черт мирозерцания Лагранжа.

Лагранжу совершенно чужды теологические рассуждения Мопертюи. И не находят у него никакого отклика слова Эйлера в письме к нему от 9 ноября 1762 г.: «Какое удовлетворение получил бы Мопертюи, если бы был еще жив, увидев свой принцип наименьшего действия возведенным на высшую ступень, доступную для него»².

Словно отвечая Эйлеру, Лагранж в своей «Аналитической механике» говорит, что он называет этот принцип принципом наименьшего действия лишь «по аналогии с тем, который Мопертюи дал под этим названием». Для Лагранжа принцип наименьшего действия не связан с тем специфическим теологическим содержанием, которое вложил в него Мопертюи.

Итак, в своей юношеской работе Лагранж стоит на сугубо математической точке зрения, даже не затрагивая вопроса о содержании используемого им принципа.

При решении задачи I рассматриваемого сочинения Лагранж приходит к формуле, которая является одной из возможных формулировок так называемого принципа Д'Аламбера. Точно также при решении задач VI, VIII, IX, X как необходимое и явно выступающее звено употребляются различные уравнения, выражающие этот принцип.

¹ Lagrange J., Oeuvres, т. 14, 1892, стр. 200. а) Письмо Лагранжа Кондорсе, Берлин, 26. II. 1774. б) Письмо Эйлера Лагранжу 9. XI. 1762.

² Lagrange J., Oeuvres, т. 14, стр. 201.

Уже в 1764 г.¹ Лагранж употребляет принцип Д'Аламбера в вариационной форме. Лагранж выясняет его связь с принципом возможных перемещений. И если этот метод приводит все законы движения тел к законам их равновесия и таким образом сводит динамику к статике², то он должен лежать в основании динамики.

В появившейся в 1788 г. «Аналитической механике» Лагранж в построении динамики исходит уже не из принципа наименьшего действия, а из уравнения³:

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) + \sum m(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots) = 0. \quad (22)$$

Если силы $P, Q, R, \dots$ могут быть сведены к трем силам, направленным по координатам x, y, z и ориентированным в направлении их убывания, то

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

и мы получим из уравнения (22):

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} + X \right) \delta x + \sum m \left(\frac{d^2y}{dt^2} + Y \right) \delta y + \sum m \left(\frac{d^2z}{dt^2} + Z \right) \delta z = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) дает одну из обычных формулировок начала Д'Аламбера.

В аналитической механике основную роль играет не понятие силы, а понятие работы, произведенной приложенными силами на бесконечно малых перемещениях. Особое значение для вариационной трактовки имеют силы, которые могут быть получены как производная некоторой скалярной функции — потенциальной функции. Если потенциальная функция не зависит от времени, мы получаем группу сил, называемых консервативными.

Принцип наименьшего действия Лагранж выводит, исходя из общей формулы динамики и закона живых сил. Таким образом, весь вывод применим только к таким системам, которые удовлетворяют закону живых сил.

Проследим ход рассуждений Лагранжа, который тем более интересен, что основная его идея сыграла значительную роль в последующем развитии этой области механики.

Если обозначить скорость каждого тела системы через v , то

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2.$$

¹ Lagrange J., Recherches sur la libration de la lune, Oeuvres, т. 2, 1868.

² Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, изд. 2-е, стр. 312.

³ Уравнения (22) и (23) даны в обозначениях Лагранжа.

В качестве отправного пункта имеем уравнение живых сил, которое раньше было получено Лагранжем в форме

$$m\left(\frac{v^2}{2} + \Pi\right) = h, \quad (24)$$

где h — произвольная постоянная (постоянная энергии системы по современному определению). Функция Π определяется так,

$$\int d\Pi = \int (Pdp + Qdq + Rdr + \dots),$$

причем силы $P, Q, R, \dots$ направлены к определенному центру и суть функции расстояний $p, q, r, \dots$

Из (24) получаем:

$$m(v\delta v + \delta\Pi) = 0 \quad (25)$$

или согласно определению Π :

$$\sum m(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots) = - \sum m v \delta v. \quad (26)$$

Подставив полученное выражение (26) в общую формулу (22) динамики, получим:

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z - v\delta v\right) = 0. \quad (27)$$

Преобразуем:

$$d^2x\delta x = d(dx\delta x) - dx d\delta x;$$

но

$$dx d\delta x = \frac{1}{2} \delta(dx^2),$$

ибо операции дифференцирования и варьирования независимы друг от друга и переместительны. Отсюда:

$$d^2x\delta x = d(dx\delta x) - \frac{1}{2} \delta(dx^2)$$

и аналогичные формулы для y и z .

Пусть далее s — путь, проходимый телом в течение времени t , тогда

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad a \quad dt = \frac{ds}{v}.$$

Вводя s , получаем:

$$d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z = d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z) - ds\delta ds$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z = \frac{d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt^2} - \frac{v^2 \delta ds}{ds}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (27), имеем:

$$\sum m \left[\frac{d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt^2} - v^2 \frac{\delta ds}{ds} - v\delta v \right] = 0. \quad (28)$$

Приняв во внимание, что:

$$v\delta ds + ds\delta v = \delta(vds)$$

и умножив уравнение (28) на $dt = \frac{ds}{v}$, получим:

$$\sum m \left[\frac{d(dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z)}{dt} - \delta(vds) \right] = 0$$

или

$$d \sum m \left[\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right] - \delta \sum m v ds = 0, \quad (29)$$

и, интегрируя:

$$\sum m \left[\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right]_I^{II} = \int \delta(mvds). \quad (29a)$$

Операции интегрирования и варьирования переместительны, и следовательно:

$$\int \delta \sum m v ds = \delta \int \sum m v ds$$

и если на границах интегрирования $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, т. е. варьированная траектория имеет те же начальные и конечные точки, что и действительное движение, то

$$\delta \sum m \int v ds = \sum m \left[\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right]_I^{II};$$

а так как правая часть равна нулю, то, следовательно,

$$\delta \sum m \int v ds = 0,$$

и это выражение будет максимумом или минимумом, и мы можем сформулировать следующую теорему, выражаемую этим равенством: «При движении любой системы тел, находящихся под действием сил взаимного притяжения, или сил, направленных к неподвижным центрам и пропорциональных каким-либо функциям расстояний, кривые, описываемые различными телами, а равно их скорости необходимо таковы, что сумма произведений отдельных масс на интеграл скорости, умноженной на элемент кривой, является максимумом или минимумом при условии, что первые и последние точки каждой кривой рассматриваются как заданные, так что вариации координат, соответствующих этим точкам, равны нулю¹. Некоторая неясность этого предложения Лагранжа послужила предметом для ряда исследований в XIX в. (см. гл. III).

¹ Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, изд. 2-е, стр. 382.

Необходимо отметить, что, так же как Эйлер, Лагранж оставил почти неосвещенным вопрос о характере сравниваемых варьированных движений в принципе наименьшего действия в форме Эйлера—Лагранжа.

Продолжая рассмотрение принципа наименьшего действия, Лагранж также изящно выводит из него общее уравнение динамики¹. Отметим, что и при этом обратном выводе он пользуется как необходимым звеном законом сохранения живой силы. Мы видим, что для применимости принципа наименьшего действия Лагранж выдвигает определенное условие, чтобы как для действительного, так и для варьированного движения был применим закон живых сил. Этот вывод общего уравнения динамики служит для Лагранжа иллюстрацией того, что принцип наименьшего действия не представляет собой только некоторого любопытного свойства движения тел. Лагранж подчеркивает, что он может также служить для того, чтобы определить движение. В самом деле на основании правил вариационного исчисления могут быть определены условия, при которых выражение $\int u ds$ имеет максимум или минимум. А затем, «если применить общее уравнение сохранения живых сил, то мы всегда найдем все уравнения, необходимые для определения движения каждого тела»².

Итак, формальная эквивалентность уравнений динамики и принципа наименьшего действия математически установлена Лагранжем. Но здесь возникают два вопроса: 1) в какой мере эта формальная эквивалентность выражает эквивалентность по существу? и 2) в какой мере убедительно доказательство Лагранжа?

Что касается первого вопроса, то формальная эквивалентность ни в коей мере не отражает эквивалентности уравнений движения и принципа наименьшего действия по существу. Для того чтобы убедиться, что положение дела действительно таково, достаточно указать на тот факт, что область применения принципа наименьшего действия шире области применения механических уравнений движения. В самом деле, класс задач, охватываемых принципом наименьшего действия, отнюдь не исчерпывается специально механическими задачами, но включает и ряд физических проблем, как было известно и самому Лагранжу. У Лагранжа механика уже пришла к таким понятиям (принцип наименьшего действия) и к таким методам (метод обобщенных координат), смысл и полное значение которых могли раскрыться в полной мере только вне механики.

Точка зрения Лагранжа объясняется, во-первых, господством механистического миропонимания (в частном случае оптика, и в

¹ См. H a s A. E., Die Grundgleichungen der Mechanik dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung, 1914.

² Л а г р а н ж Ж., Аналитическая механика, т. 1, Изд. 2-е, стр. 383.

особенности геометрическая оптика, рассматривается просто как отдел механики), и, во-вторых, как уже было указано выше, формально-математическим направлением его мышления.

Кроме того, накопленный в XVIII в. научный материал с необходимостью требовал освобождения физической науки от теологии. А так называемый принцип наименьшего действия, рационально понятый и освобожденный от теологической схоластики, еще не мог проявить всех тех замечательных особенностей и возможностей, которые в нем заключены. Для этого не было еще налицо достаточного развития других отделов физики (электродинамики, термодинамики и др.).

Что же касается математической стороны доказательства Лагранжем эквивалентности уравнения динамики и принципа наименьшего действия, то и она давно вызывала сомнения.

Мы видели, что у Лагранжа сравниваются между собой два бесконечно близких движения, причем вариация обусловлена законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \text{const},$$

т. е.

$$\delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\delta\Pi.$$

Это условие требует, чтобы кинетическая энергия была определена во все время движения в любой точке. Следовательно, и скорости варьированного движения не могут иметь произвольных значений¹. Ясно поэтому, что нельзя сравнивать точки варьированного и действительного движения в один и тот же момент времени. Вообще говоря, мы не можем полагать $\delta t = 0$. Поэтому $\frac{d\delta x}{dt}$ отнюдь не равно $\delta \frac{dx}{dt}$, как пишет Лагранж, а

$$\frac{d\delta x}{dt} = \delta \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt} \frac{d\delta t}{dt}. \quad (30)$$

Этот вопрос² имеет и значительный физический смысл. В самом деле, рассмотрим ближе смысл сопоставления действительного движения с варьированным. Мы исходим из предположения, что оба движения начинаются одновременно в некоторой точке А, в точку же В — конечное положение — они приходят не одновременно. Для точного представления операции варьирования надо сопоста-

¹ Более того, v для Лагранжа так же, как для Эйлера, есть скорость, определяемая уравнением живых сил.

² См. Mayer A., Leipz., Ber., 1886, 38, стр. 343; Voss. *Enz. d. math. Wiss.*, т. IV, I; Voss. *Nachricht*, v. d. Königl., Ges. d. Wiss zu Göttingen, 1900, стр. 322.

вить с каждой точкой действительной траектории точку варьированной. Без этого нельзя писать

$$\delta \int E_{\text{кин}} dt = \int \delta(E_{\text{кин}} dt).$$

В нашем случае сопоставляемые точки будут проходиться в различные моменты времени. Следовательно, вариация времени выражает различие времен, в которые проходятся соответственные точки траекторий.

Допустим, что для внешних сил, действующих на тело, существует потенциальная функция; тогда можно определить вариацию следующим образом: для соответственных состояний сравниваемых траекторий полная энергия должна быть одной и той же. Так как полная энергия равна $(E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}})$ и так как исходное движение задано, то для любого положения траекторий дана кинетическая и потенциальная энергия. Для соответствующего положения варьированной траектории сначала известна только зависящая от координат потенциальная энергия, и из налагаемого условия вариации сразу определяется для любого положения кинетическая энергия и вместе с тем скорость¹.

У Лагранжа же при выводе из принципа наименьшего действия уравнения динамики выражение

$$\delta \sum m \int v ds = 0$$

преобразуется следующим образом:

$$\sum m \int (ds \delta v + v \delta ds) = 0.$$

Первый член

$$\sum m \int ds \delta v$$

дает

$$- \int dt \sum m (P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots)$$

при помощи уравнения живых сил в форме

$$\sum m v^2 = 2 h - 2 \sum m \Pi.$$

Второй член после преобразований, «перестановки знаков $\sum$ и $\int$ и предполагая dt постоянным» (Лагранж) принимает вид

$$- \int dt \sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right).$$

Этим, очевидно, и решается задача выведения из принципа наименьшего действия общей формулы динамики.

¹ H ö l d e r O., Nachricht. v. d. Königl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1896, стр. 122; «Сборник», стр. 538—563.

Но при этом Лагранж не исключает скорости $v = \frac{ds}{dt}$, чем и создается известная неясность вывода и затемняется его физический смысл, так как, вообще говоря, у Лагранжа независимая переменная варьируется.

Наконец, отметим еще один момент, который возбуждал сомнения в выводе Лагранжа¹. Лагранж полагает $dt = \text{const.}$ Однако, как не трудно усмотреть, это означает у Лагранжа (как и у Лапласа) только то, что dt является независимой переменной, могущей иметь произвольное значение.

Таким образом, собственно математическая сторона рассуждений Лагранжа, хотя и не лишена неясностей, но не является принципиально неверной.

Произведем еще одно математическое преобразование, которое даст возможность глубже раскрыть смысл принципа наименьшего действия. Любопытно отметить, что место, к рассмотрению которого мы сейчас переходим, появилось лишь во втором издании «Аналитической механики» и, следовательно, принадлежит к наиболее поздним высказываниям Лагранжа относительно принципа наименьшего действия. В этом высказывании Лагранж непосредственно восходит к Эйлеру, развивая указанную последним связь закона живых сил и принципа наименьшего действия.

Так как $ds = vdt$, то формула

$$\sum m \int v ds,$$

которая имеет максимум или минимум, может быть записана в виде

$$\sum m \int v^2 dt$$

или

$$\int dt \sum mv^2,$$

где $\sum mv^2$ обозначает живую силу всей системы в данный момент.

Эта формула дает Лагранжу возможность подойти к пониманию смысла принципа наименьшего действия. В самом деле, Лагранж отнюдь не так безразличен к физической стороне механических проблем, как это обычно полагают. Да и трудно было бы ожидать, чтобы Лагранж, живший в кругу людей, которые не только живо интересовались философией, но иногда сами являлись крупными философами (например, Гольбах, Д'Аламбер и др.), остался совершенно в стороне от проблемы обоснования механики и анализа содержания ее понятий. Исторической легендой является обычное представление о Лагранже как об ученом, который равнодушно и даже презрительно относился к философским проблемам. Мало кому известно, что в жизни Лагранжа был целый период, когда

¹ См. также гл. III, раздел 2.

он временно потерял интерес к математике и усиленно занимался философией, химией, медициной и другими науками. Все современники, знавшие его лично, указывают, что он, хотя и не писал ничего на специально философские темы, но с большим интересом принимал участие в модных в то время философских беседах и спорах.

Для характеристики отношения Лагранжа к философским проблемам мы находим у Ф. А. Ланге любопытное указание. При изложении обстоятельств, связанных с выходом «взволновавшей весь образованный мир» книги Гольбаха, он отмечает, что в силу ряда причин современники с трудом поверили в авторство Гольбаха. Даже когда было установлено, что книга вышла из его кружка, приписали авторство математику Лагранжу, который был домашним учителем в семье Гольбаха (другие же приписывали авторство Дидро). «Теперь, — пишет Ланге, — не подлежит никакому сомнению, что Гольбах истинный автор, хотя при выполнении отдельных частей принимали участие Лагранж, ученый специалист, Дидро и др.»¹

Наконец, знаменитые введения к отдельным главам «Аналитической механики» представляют собой попытку подойти к обоснованию механических понятий и законов без «метафизики». Конечно, это не исключает того, что формальная сторона очень сильна у Лагранжа и что он, как замечает Гаусс, иногда слишком много полагался на символическое вычисление при решении задач, не давая себе достаточного отчета в каждом шаге своих математических выкладок. Именно поэтому чрезвычайно существенно бросить взгляд на подход Лагранжа к обоснованию дифференциального исчисления.

Действительно, Лагранж, прежде всего, математик. И для нас особенно важно, что и в его отношении к обоснованию анализа бесконечно малых проявляются те же самые тенденции. Он сомневается в современном ему обосновании анализа и устраняет эти сомнения тем, что «отказывается от него (от анализа. — Л. П.) как от общей дисциплины, понимая под ним просто собрание формальных правил, относящихся к частным специальным функциям»².

Конечно, «такое самоограничение чисто формальными построениями устраняло для того времени целый ряд затруднений»³.

В первую очередь это самоограничение давало возможность избавиться от всей той путаницы и неясности, которая существо-

¹ Ланге Ф. А., История материализма, пер. Вл. Соловьева, изд. 1899, стр. 222.

К сожалению, Ланге не указывает источника, из которого он заимствовал это сообщение, так что нет возможности его проверить. Но так как мы здесь не исследуем биографию Лагранжа, то для нас интересна уже самая возможность постановки вопроса об участии Лагранжа в работе над книгой, явившейся знаменем французского материализма XVIII в.

² Клейн Ф., Вопросы элементарной и высшей математики, ч. 1, Изд.-во Mathesis, Одесса, 1912, стр. 133.

³ Там же.

вала в основных принципиальных вопросах обоснования анализа. Маркс замечает, что «поскольку дело касается чистого анализа, Лагранж действительно отделался от всего того, что ему представляется метафизической трансцендентностью в ньютоновских флюксиях, лейбницевских бесконечно малых различных порядков, в теории предельных значений исчезающих величин, в существовании $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ как символа дифференциального коэффициента»¹.

Можно ли сказать, что Лагранж здесь разрешил проблему обоснования и построения системы анализа? Ни в коем случае. Во-первых, «определение функции, принимаемое Лагранжем, слишком узко»², во-вторых, отказ от старых методов «не мешает тому, что в приложении своей теории к кривым и т. д. он сам постоянно нуждается в том или другом из этих „метафизических“ представлений»³.

Таким образом и здесь проявляется характерное для Лагранжа стремление не отказываться от попыток решения основных проблем, но решать их на пути известного формального самоограничения — путь, который не может не быть связан с известным обеднением мысли. Каким бы мало удовлетворительным ни представлялось нам это направление, мы все же видим, что Лагранж, завидовавший Ньютону, «на долю которого выпало счастье объяснить мировую систему», не мог не попытаться выяснить смысл выводимых им соотношений. В чем же он усматривает смысл принципа наименьшего действия, сведенного им на положение следствия основного закона механики?

Ответ Лагранжа предопределен тем, что, как мы видели выше, область применения принципа ограничена для него сферой применения закона живых сил. Если вспомнить, что Лагранж показал, что принцип наименьшего действия может быть выражен в форме интеграла $\int dt \sum m v^2$, который должен иметь максимум или минимум, то станет совершенно ясен ответ Лагранжа на поставленный выше вопрос: «Таким образом, рассматриваемый принцип сводится собственно к тому, что сумма живых сил всех тел от момента, когда они выходят из заданных точек, до того момента, когда они приходят в другие заданные точки, является максимумом или минимумом. Следовательно, его можно было бы с большим основанием назвать *принципом наибольшей или наименьшей живой силы*; эта формула имела бы то преимущество, что она была бы общей как для движения, так и для равновесия; ... мы видели, что при прохождении

¹ См. «Марксизм и естествознание», Из математических рукописей Маркса, Партиздат, М., 1933, стр. 155.

² К л е й н Ф., Вопросы элементарной и высшей математики, ч. 1. Изд.-во Mathesis, Одесса, 1912, стр. 359.

³ См. «Марксизм и естествознание», Из математических рукописей Маркса, Партиздат, М., 1933, стр. 155.

положения равновесия живая сила системы всегда бывает наибольшей или наименьшей¹.

Таким образом, это толкование находит физический смысл принципа наименьшего действия в конкретизации закона живых сил. Но более того: оно увязывается Лагранжем с установленным им раньше фактом из статики, заключающимся в том, что в случае равновесия живая сила всегда максимальна или минимальна.

Так как Лагранж, по существу, рассматривает консервативные системы, то это утверждение выражает тот факт, что в случае равновесия потенциальная энергия имеет всегда соответственно минимум или максимум. По этому поводу Гаусс справедливо замечает, что приведенное положение Лагранжа скорее остроумно, чем правильно, так как минимум в случае положения равновесия и в случае движения имеет место в совершенно различном смысле.

Развитая Лагранжем точка зрения на принцип наименьшего действия разделялась рядом ученых того времени. Например, Лаплас, который расширил сферу приложения принципа в оптике, применив его к преломлению в кристаллах, говорит о механическом содержании этого принципа. «Интеграл живой силы системы, умноженный на элемент времени, есть минимум, так что, следовательно, истинная экономия природы есть экономия живой силы»². Ограниченность этого толкования в настоящее время, после работ Гамильтона, Гельмгольца и др., после теории относительности и квантовой механики — совершенно очевидна.

Итак, мы видим, что Лагранж и здесь, как и в проблеме обоснования анализа, идет по пути известного самоограничения. Он ограничивает сферу применимости принципа наименьшего действия областью применимости закона живых сил, следуя в этом отношении за Эйлером. Он рассматривает свойство интеграла давать минимум или максимум для действительного движения как свойство чисто аналитического характера. В заключении характеристики, данной им принципу наименьшего действия, Лагранж говорит, что он рассматривает его не как «метафизический принцип, а как простой и общий вывод из законов механики»³.

Здесь, таким образом, Лагранж настойчиво и совершенно определенно отказывается от всякой метафизической трактовки принципа. Под метафизической же трактовкой тогда понималась теологически-телеологическое обоснование принципа наименьшего действия, образец которого имеется в работах Мопертюи (см. стр. 22—36.)

Лагранж самое название «принципа наименьшего действия» употребляет, как он сам говорит, лишь по традиции. Это название отнюдь

¹ Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, изд. 2-е, стр. 389.

² Laplace, P., Oeuvres, т. VI, 1885, стр. 205.

³ Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, изд. 2-е, стр. 320.

не соответствует математической формулировке принципа. Телеология вытекает не из механики в ее математической формулировке, а привносится извне, предвзятыми и произвольными обобщениями и неопределенными наименованиями, «как будто бы неопределенные и произвольные наименования составляли сущность законов природы и с помощью какого-то скрытого свойства способны простые выводы из известных законов механики возвести до степени конечных причин»¹.

Это весьма интересное место. Лагранж правильно подмечает произвольность наименования величины *mv* действием. Он указывает, что эта произвольность и неясность в терминологии дает возможность протаскивать телеологию туда, где ей иначе не было бы места. Эти даваемые нами наименования ни в коем случае «не составляют сущности законов природы».

Аналогичные взгляды высказывал Д'Аламбер. Он говорил: «Какую бы ни занять позицию как относительно метафизики, которая ему (принципу Мопертюи. — Л. П.) служит основанием, так и относительно данного Мопертюи понятия количества действия, все же останется верным, что произведение пространства на скорость есть минимум в наиболее общих законах природы. Эта геометрическая истина, которой мы обязаны Мопертюи, будет существовать всегда. Можно, если угодно, принять слово количество действия только в качестве сокращенного способа выражать произведение пространства на скорость»².

Лагранж вместе с тем отвергает претензии принципа наименьшего действия на всеобщую значимость и на звание основного общего закона природы. Мы уже видели активное наступление теологии на науку под флагом самой науки в XVIII в., выразившееся в работах Мопертюи и нашедшее отчасти отражение даже в работах Эйлера и др. и тот факт, что Лагранж отвергал всякие метафизические мотивы, связанные с нажимом на антропоморфно близкое нам «наименьшее действие», давая лишний козырь материалистически-детерминистическому мировоззрению в его борьбе с идеалистической телеологией»³.

¹ Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, изд. 2-е, стр. 318.

² Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, т. I, 1752, статья «Action».

³ Отметим, что в работе, посвященной принципу наименьшего действия, Кнезер ни слова не говорит о позиции Лагранжа, а в то же время подробно излагает высказывания Лейбница и Мопертюи. Это отношение к Лагранжу станет совершенно понятным, если принять во внимание, что основная идея книги Кнезера состоит в доказательстве того, что принцип наименьшего действия есть максима способности суждения в духе Канта. Лагранж при такой установке действительно выпадает из рассмотрения и в трогательной близости к кантовским установкам Кнезера оказываются, конечно, теологические и телеологические высказывания Лейбница и Мопертюи (Kneser A., Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart, Leipzig, 1928).

Однако Лагранж, отвергнув притязания идеалистической телеологии в отношении обоснования принципа наименьшего действия, только ограничивает ее область от области науки. Он всегда был пассивен, этот гениальный математик. Он работал в рамках прусской монархии, Франции Людовика XVI и Великой французской революции. Люди, знавшие его лично, пишут, что все его существо «было проникнуто тихой иронией». Он не был борцом, провозвестником какой-либо великой идеи: он только отделял от себя и от всей механики телеологическую метафизику. Он больше всего любил покой и уединение. «Я занимаюсь геометрией спокойно и в тишине. А так как меня ничто и никто не торопит, то я работаю больше для моего удовольствия, нежели по должности; я похожу на вельмож, охотников строиться: я строю, ломаю, перестраиваю до тех пор, пока не выйдет что-нибудь такое, чем я остаюсь несколько доволен»¹. А в письме к Лапласу он говорит: «Я рассматриваю ссоры как совершенно бесполезные для преуспевания науки и как ведущие только к потере времени и покоя...»². И недаром Лагранж дает в письме Д'Аламберу такую печальную характеристику состояния и перспектив математического исследования: «Я думаю также, что шахта становится слишком глубока и что ее придется рано или поздно бросить, если не будут открыты новые рудоносные жилы. Физика и химия представляют ныне сокровища гораздо более блестящие и более легко эксплуатируемые; таким образом, по-видимому, все всецело обратилось в эту сторону, и возможно, что места по геометрии в Академии Наук сделаются когда-нибудь тем, чем являются в настоящее время кафедры арабского языка в университетах»³. Он пытается замкнуться в мир формальных определений и вычислений, но это приводит к обеднению мысли. И как он завидует «тому черту Монжу», у которого бывают такие гениальные смелые идеи, и все же не может преодолеть гипнотизирующей силы своего аналитического аппарата. В итоге мы находим в подходе Лагранжа к проблемам механики, а также и в характере его влияния на последующее развитие этой науки, сложную картину.

Отделением механики от телеологической метафизики Лагранж сыграл положительную роль и надолго определил соотношение механики и философии. Но именно постольку, поскольку здесь на место правомерно вытесняемой из науки телеологии подставлена и философия, изложение Лагранжа послужило исходным пунктом для создания той особой манеры изложения проблем механики, которая может быть охарактеризована как чисто аналити-

¹ Араго Ф., Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров, пер. Перевощикова, 1859, т. 3, стр. 351.

² Lagrange J., Oeuvres, т. 14, 1892, стр. 85. Письмо Лагранжа Лапласу, Берлин, 5. VII. 1779.

³ Там же, т. 13, 1882, стр. 368. Письмо Лагранжа Д'Аламберу, Берлин, 21. IX, 1781.

ческая механика. И безусловно к нему уходят корни развившегося в XIX в. формально-описательного направления в механике¹.

Непосредственно к Лагранжу восходят взгляды Г. Кирхгофа (1824—1887). В первом параграфе своих «Vorlesungen über mathematische Physik» (Bd. Mechanik, 1876) он говорит, что «задачей механики является описать полно и простейшим образом происходящие в природе движения». Для выполнения этой задачи Кирхгоф считает вполне достаточным представление пространства, времени и материи, так как «движение есть изменение координат со временем; то, что движется, есть материя». При помощи этих средств должна строиться механика и при помощи их должны «конструироваться все вспомогательные понятия, которые при этом (построении механики. — Л. П.) окажутся необходимыми, например, понятия силы и массы»². Нетрудно видеть непосредственную связь высказываний Кирхгофа и концепции Лагранжа.

Сухой и бесплодный формализм такого описания прекрасно раскрыл Ф. Клейн: «От Кирхгофа ведет свое начало тот стиль, который в течение нескольких десятилетий господствовал в математической физике. Высшим законом этого стиля являются исключение преждевременных гипотез и подавление всякого личного участия, радости открытия или чувства удивления перед неисчерпаемо-загадочным миром явлений»³. Недаром рассказывают, что когда в 1877 г. Керр открыл носящее его имя явление вращения плоскости поляризации при отражении света от полированного конца магнита, то Кирхгоф по этому поводу сказал: «а разве вообще осталось что-нибудь открывать?»

В то же время сам Кирхгоф был подлинным творцом — замечательным теоретиком и экспериментатором.

Еще в одном Лагранж может считаться предтечей современного формального метода. Аксиоматический характер изложения, крайняя абстрактность и общность — вот обычный характер сочинений Лагранжа. Основные элементарные невыводимые положения — вот исходный пункт.

Правда, можно предполагать, что Лагранж чувствует ограниченность и узость такого подхода. В механике он предпосылает отдельным главам исторические введения, в которых пытается, если не обосновать, то, по крайней мере, оправдать свои исходные положения. И это безусловно положительная черта Лагранжа, роднящая его с Д'Аламбером, — понимание историчности науки. Но после

¹ См. Полак Л. С., Лагранж и вариационные принципы в механике и физике, Сб. Ж. Л. Лагранж, изд. АН СССР, М.—Л., 1937, стр. 105—140.

² Kirchhoff G., Vorlesungen über mathematische Physik, т. II, Leipzig, 1876, стр. 1.

³ Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I, ГТТИ, 1937, стр. 261.

Лагранжа формализм доводится до логического конца, аксиоматический метод изложения дает науке внешний вид замкнутого, законченного целого. В новейших изложениях механики уже не чувствуется живого дыхания исторического движения человеческого познания, которое в тяжелой борьбе выковывает основные научные понятия и концепции.

Итак, если Лагранжем нацело отвергнуто всякое телеологическое обоснование принципа наименьшего действия, то в чем же состоит смысл и значение этого принципа? Все значение, которое можно приписать этому принципу, определяется его связью с законом сохранения живой силы и его математической формой выражения. «Этот принцип, увязанный с принципом живых сил и развитый на основе правил вариационного исчисления, прямо дает все уравнения, необходимые для решений любой задачи»¹.

Таким образом в «Аналитической механике» принцип наименьшего действия ни в коей мере не является основным принципом механики (не говоря уже о природе). Он окончательно низводится до положения одного из следствий основного уравнения динамики Лагранжа, и снова воспрять ему предстоит лишь в работах гениального математика Уильяма Роуэна Гамильтона.

Нам неизвестны высказывания Лагранжа, в которых он рассматривал бы всю природу как механическую систему, а тем самым свою механику как общую науку о всей физической природе, хотя подобная точка зрения была в высшей степени вероятна на том этапе развития науки. Он считал свой механический метод в высшей степени общим и гибким², однако основывал его универсальную значимость и всеобщую приложимость на принципе возможных перемещений, а отнюдь не на принципе наименьшего действия.

Мы теперь иначе, чем Лагранж, смотрим на принцип наименьшего действия. Вариационные принципы имеют огромные преимущества: они могут быть сформулированы так, что окажутся инвариантными по отношению к любым преобразованиям координат и тем самым выразят в общей форме реальные физические свойства процессов. Но принцип наименьшего действия нельзя рассматривать как общий принцип в духе картезианства или в духе знаменитого уравнения, о котором когда-то мечтал Лаплас. Он не представляет собой такого общего начала, из которого можно дедуктивным путем вывести законы частных явлений. Специфика явлений должна быть некоторым образом подсказана экспериментом. Непосредственно или посредством обобщения, научной абстракции эксперимент дает возможность придать определенность величинам, входящим в этот принцип. В противном случае мы будем иметь дело с такими математи-

¹ Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, стр. 320.

² Идельсон Н. И., О механике Лагранжа, Сб. Ж. Л. Лагранж, изд. АН СССР, М.—Л., 1937, стр. 17—46.

ческими преобразованиями, которые обогатят наше знание свойств вводимых нами величин, но не обогатят наше знание реального мира.

Мы не знаем еще, почему из известных нам физических явлений природы значительная часть укладывается в вариационную схему, почему значительная часть физической науки может с математической точки зрения рассматриваться как класс задач вариационного исчисления. Но как бы ни разрешился этот вопрос, контуры решения которого только проясняются в настоящее время, Лагранж, подошедший к нему как настоящий ученый-исследователь, всегда останется в нашей памяти как великий мыслитель, который пытался «сочесть пески, лучи планет».

В это же время Лаплас (1749—1827) в работе «*Sur la double réfraction dans le spath d'Islande*»¹ приложил метод, примененный Мопертюи для получения с корпускулярной точки зрения закона преломления обычного луча, к задаче двойного лучепреломления. Он использовал для этого принцип наименьшего действия, математическое выражение которого было настолько улучшено со времени Мопертюи, что стало возможным применять его к более сложным задачам, чем простое преломление света. Лаплас предположил, что кристаллическая среда действует на световые corpusculы необыкновенного луча так, что изменяет их скорость в отношении, которое зависит от наклона необыкновенного луча к оси кристалла. В самом деле, разность квадратов скоростей обыкновенного и необыкновенного луча пропорциональна квадрату синуса угла, который образует последний луч с осью кристалла. Принцип наименьшего действия приводит к закону преломления, тождественному с тем, который был найден Гюйгенсом. Закон преломления необыкновенного луча может быть также выведен из принципа Ферма при допущении, что скорость обратна пропорциональна той, которая предполагается при рассмотрении вопроса с помощью принципа наименьшего действия; скорость, соответствующая принципу Ферма, согласуется с найденной Гюйгенсом, будучи пропорциональна радиусу сфероиды.

Теория Лапласа была подвергнута критике Юнгом, который указал на невероятность такой системы сил, которая требуется для изменения скоростей световых corpuscul². Однако самое глубокое возражение, разрушающее все рассуждения Лапласа, сделал Гаусс в примечании к своей работе «Об одном новом общем принципе механики»³. Он говорит: «Я позволяю себе сделать одно замечание.

¹ Laplace P., *Sur la double réfraction dans le spath d'Islande*, Mém. de l'Inst., 1809, стр. 300.

² Young Th., *Miscellaneous Works*, т. 1, 1855, стр. 220.

³ Гаусс К., цит. по приложению в книге: Лагранж, Аналитическая механика, т. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 411—412; «Сборник», стр. 170—172.

Я считаю неудовлетворительным метод, примененный другим великим геометром (L a p l a c e, *Mémoires de l'Institut*, 1809) для вывода закона преломления Гюйгенса из принципа наименьшего действия. Действительно, этот принцип, по существу, предполагает наличие принципа живых сил, на основании которого скорость точек в движении полностью определяется их положением, а направление, по которому они движутся, не оказывает на содержание принципа никакого влияния. Тем не менее это влияние является исходной точкой рассуждений упомянутого нами автора. Мне думается, что все усилия геометров объяснить двойное преломление в рамках эмиссионной гипотезы останутся бесплодными до тех пор, пока световые молекулы будут рассматриваться как простые точки¹.

Под непосредственным влиянием работ Лагранжа Л. Карно (1753—1823) применил принцип наименьшего действия к теории удара и установлению общих теорем импульсивного движения. В его формулировке, данной в 1803 г., как говорит сам Карно, «более не остается ничего неопределенного в принципе Мопертюи, который выражен строго и математически»². Исключив категорически всякий метафизический аспект, Л. Карно указывает вместе с тем, что претензии Мопертюи на универсальность принципа не обоснованы, и, в частности, отмечает, что и в области законов удара, которые выводил из него Мопертюи, этот принцип не охватывает того случая, когда тела имеют различную степень упругости. В отдельных же случаях с помощью этого принципа можно получить интересные результаты. Л. Карно находит таким образом важную теорему, что во всякой материальной системе, подчиненной связям без трения, в которой без наличия прямо приложенных импульсов происходят резкие изменения скоростей, всегда будет иметь место общая потеря живой силы, равная живой силе, соответствующей этим изменениям скоростей.

Следующий важный шаг в развитии интересующего нас круга идей сделал замечательный французский ученый Пуассон, исходя из разработанного Лагранжем и им метода вариации произвольных постоянных. Вместе с тем Пуассон как бы завершил исключение всякой посторонней метафизики из вопросов, связанных с соотношением, получившим название принципа наименьшего действия.

7. Скобки Пуассона и принцип наименьшего действия у Пуассона

«Я стар, — сказал однажды Лагранж Пуассону, — во время моих бессонных ночей я развлекаюсь числовыми сравнениями; выслушайте меня, это любопытно. Гюйгенс тринадцатью годами

¹ Гаусс К., Об одном новом общем принципе механики..., стр. 411.

² C a r n o t L., *Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*, т. 1., Paris, 1803.

был старше Ньютона; я тринадцатью годами старше Лапласа; Лаплас тридцатью двумя годами старше вас»¹.

Вряд ли можно было более тонко и деликатно определить место Пуассона² среди великих творцов механики и математической физики.

Побудительным мотивом его напряженной работы была идея оставить после себя полную математическую физику. Тем не менее он ясно, хотя и с сокрушением видел, что количество неразрешенных вопросов с развитием науки не только не уменьшается, но даже возрастает, а жизнь человека остается короткой.

Исследования Пуассона охватывают все области той науки, которая в то время называлась чистой и прикладной математикой. Список его сочинений составляет 351 работа (кроме отдельно изданных сочинений). Это значит, что с 1800 по 1840 г. Пуассон публиковал

¹ Араго Ф., Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров, пер. Д. М. Перевощикова, т. 3, 1861, стр. 56.

² Биография Пуассона мало известна. Приводим краткие данные о его жизни.

Симеон-Дени Пуассон родился в Питивьере (департамент Луарета) 21 июня 1781 г. Отец его, отслужив солдатом в ганноверских войнах, занимал небольшую должность в низших судебных органах. Старшие братья Симеона-Дени умерли в детстве.

Во время Великой французской революции отец Пуассона по занимаемой должности получал «Journal de l'École Polytechnique» и его сын любил находить там разные задачи и решать их без всякого руководства собственными способами. Так постепенно открылось его математическое призвание. Способным юношей заинтересовался преподаватель центральной школы Фонтенебло Бильи, который стал обучать его математике и литературе, но скоро заметил, что обучает учителя. Без труда овладев знаниями, требовавшимися для поступления в Политехническую школу, Пуассон 17-ти лет был принят туда в 1798 г. первым среди всех поступивших.

Теорию аналитических функций в Политехнической школе читал тогда Лагранж, и не проходило ни одного занятия, чтобы он по ответам с места или у доски не убеждался в том, что среди его слушателей есть юноша, могущий самостоятельно находить ясные и изящные доказательства математических теорем. Лагранж отдавал полную справедливость блестящим опытам своего талантливого ученика.

Еще будучи учеником, в декабре 1800 г., Пуассон представил Французскому институту «Записку о числе полных интегралов уравнений с конечными разностями», которая, по предложению академиков Лежандра и Лакруа, была напечатана.

В 1800 г. Пуассон был назначен репетитором Политехнической школы, в 1802 г. — помощником профессора, а в 1806 г. — штатным профессором на место Фурье. В 1808 г. он был избран астрономом в Комиссию долгот, в 1809 г. назначен профессором рациональной механики в Сорбонне и в 1812 г. стал членом Института. В том же году его назначили экзаменатором артиллеристов в Сен-Сирском военном училище (вместо Лежандра), а в 1816 г. — в Политехнической школе (вместо Лакруа). В 1820 г. его назначили советником университета, а в 1827 г., после смерти Лапласа, — геометром в Комиссию долгот.

Умер Пуассон 25 апреля 1840 г. на пятьдесят девятом году жизни. Непрерывные упорные научные и педагогические занятия ускорили, несомненно, его кончину. Но Пуассон много раз говорил: «Жизнь украшается двумя вещами: занятием математикой и ее преподаванием».

в среднем по 9 работ в год, будучи, кроме того, занят преподаванием и многочисленными научными обязанностями. В отношении характера и стиля своих работ Пуассон следовал Эйлеру, труды которого он знал в совершенстве.

Важнейшие из работ Пуассона касаются вопросов особых решений дифференциальных уравнений, вариационного исчисления, теории кривизны поверхностей, теории вероятностей, теории электростатического поля, магнетизма, капиллярности, равновесия упругих поверхностей, распространения волн в упругих жидкостях, математической теории тепла и теплопроводности, земной температуры, неизменяемости звездных суток, либрации Луны, отсутствия вековых возмущений у больших полуосей планетных орбит и теории тяготения.

Пуассону механика обязана переходом от использования скоростей $\dot{q}$ в качестве координат, определяющих состояния системы, к импульсам $p = \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial \dot{q}}$. При использовании координат q_i и p_i (вместо q_i и $\dot{q}_i$) уравнения механики принимают гораздо более симметричный вид.

Конечно, среди огромного количества работ Пуассона не все одинаково хороши, но основные из них содержат ряд замечательных достижений в математике, теоретической астрономии и математической физике.

При решении конкретных проблем математической физики Пуассон должен был находить математическую форму для определенных физических идей и, исходя из составленных уравнений, исследовать частные задачи. Но замечательный математик и механик, Пуассон не был столь же хорошим физиком. В трудное время становления новых физических теорий: волновой теории света Юнга — Френеля, теории теплопроводности Фурье, теории капиллярности Лапласа, теории электричества и магнетизма — он, не обладая достаточно глубоким пониманием эксперимента и новых физических идей, часто оказывался на стороне уже отживавших свое время теорий. В силу этого громадная вычислительная работа затрачивалась им на исследования, исходящие, как было ясно уже и при его жизни, из предпосылок и воззрений, лежащих в стороне от магистральных путей развития физической науки. Беда его была в том, что он не имел своих ясных физических идей и часто не мог правильно разобраться в кипевшей вокруг него борьбе научных гипотез и теорий.

Естественно, что Пуассон, учившийся у Лапласа, Лагранжа и Лежандра и работавший вместе и одновременно с ними, не мог пройти мимо проблем небесной и аналитической механики. Среди многочисленных задач, возникших в эпоху «Небесной механики» Лапласа и «Аналитической механики» Лагранжа, большую роль играла задача исследования возмущенного движения планет.

Как известно, решение всех задач динамики сводится к математической задаче интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Переменные, которые входят в эти уравнения, определяются как функции времени. Однако лишь в небольшом числе случаев возможно полностью проинтегрировать эти уравнения. Очень часто удается получить в конечном виде только те интегралы уравнений движения, которые выражают закон движения центра тяжести, а также законы площадей и живых сил.

Во многих случаях решение задач механики при помощи известных методов оказывается возможным только тогда, когда отбрасывают часть сил, приложенных к движущемуся телу, считая отбрасываемые силы малыми по сравнению с остальными. Если отбрасываемые силы очень малы по сравнению с теми, которые принимаются в рассмотрение, то определяемые в этом случае интегралы уравнений движения дают решение задачи в первом приближении. Это решение может служить основой для следующих приближений. Так, например, уравнения эллиптического движения являются интегралами уравнений движения планет вокруг Солнца в том случае, когда пренебрегают их взаимным действием друг на друга. Произвольные постоянные, которые содержат эти интегралы, представляют собой шесть элементов эллиптического движения каждой планеты. Все эти величины должны рассматриваться как не меняющиеся со временем, поскольку взаимное действие планет считается пренебрежимо малым. Однако наблюдения показывают, что элементы эллиптического движения планет не остаются постоянными. Из данных наблюдений следует, что орбиты планет должны рассматриваться как эллипсы, параметры и положение которых в пространстве медленно, но постоянно изменяются. Чтобы аналитически определить эти изменения, необходимо было сохранить в уравнениях движения члены, определяемые взаимным действием планет. Для решения этих, по существу, новых уравнений произвольные постоянные интегралов эллиптического движения стали рассматривать как переменные величины. «Замечательно, — говорит Пуассон, — что этот метод — один из наиболее плодотворных в анализе и состоящий в том, чтобы полагать переменными величины, которые до того рассматривались как постоянные, — был подсказан геометрам результатами наблюдений, так что он есть не что иное, как некоторый способ выражения»¹.

Историческая связь проблемы варьирующих (или оскулирующих) элементов планетных орбит с развитием механики в целом служит примером той взаимозависимости, которая существует в раз-

¹ Poisson S. D., Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de la mécanique. «Journ. de l'École Polytechnique», т. VIII, Paris, 1809, стр. 266—344.

витии различных ветвей близких наук. Многобразные проблемы и математические методы связаны с теорией возмущенного движения¹.

Эйлер первый нашел дифференциальные выражения вариаций наклона орбиты. Но лишь Лагранж в 1781 и 1782 гг. в статьях, напечатанных в «*Mémoires de Berlin*», дал общую теорию, в которой дифференциалы эллиптических элементов выражены посредством частных производных одной функции, взятых по координатам возмущенного движения планет и умноженных на функции этих же координат.

Этот метод был развит и улучшен самим Лагранжем², а также Лапласом (см. *Supplément* к «*Mécanique Céleste*») в 1808 г., которые придали ему новую форму. В этих формулах дифференциалы элементов орбит выражены посредством частных производных той же функции, что и в ранних работах Лагранжа. Однако существенная разница состояла в том, что эти производные были взяты по элементам возмущенного движения планет и умножены на функции этих элементов, которые не содержат явным образом времени. Такой способ выражения имеет неоценимое преимущество, если надо вычислять вековые или долгопериодические неравенства. Этот способ варьирования произвольных постоянных может быть применен как общий метод решения задач механики. Доказательство этого положения и было целью мемуара Лагранжа.

Понятие силовой функции³ возникло также из рассмотрения задач небесной механики. В 1774 г. Лагранж в премированном Французской Академией мемуаре «*Sur l'équation séculaire de la Lune*»⁴ выразил составляющие силы притяжения через частные производные одной и той же функции по соответствующим координатам. Весьма естественным было разделение этой функции на две части :

¹ Заметим, что в теории возмущений существуют два различных метода. В одном из них возмущение рассматривается как причина изменения состояния невозмущенной системы. В другом методе мы имеем дело с неизменившимися состояниями невозмущенной системы, но предполагаем, что невозмущенная система под влиянием возмущений беспрестанно переходит от одного состояния к другому. Какой из этих методов следует применять в каждом данном случае, зависит от характера рассматриваемой задачи. Первый метод обыкновенно оказывается полезным только в тех случаях, когда ни гамильтонова функция невозмущенной системы, ни возмущающая функция (т. е. поправка к функции Гамильтона) не содержат явно времени. Второй метод применяется тогда, когда играет роль время.

² *L a g r a n g e*, *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes, et en particulier des variations des grands axes de leur orbites*, «*Oeuvres*», т. VI, 1873, стр. 713—771.

³ Правильнее было бы наименование «потенциальная функция консервативных сил», а не силовая функция или даже потенциал. Однако мы пользуемся в исторических главах терминологией тех авторов, работы которых рассматриваются.

⁴ *L a g r a n g e*, «*Oeuvres*», т. VI, стр. 335—403.

главную силовую функцию и возмущающую функцию. Мысль выразить вариации элементов при помощи производных возмущающей функции возникла еще в XVIII в.

Толчком к появлению новой работы Лагранжа послужил мемуар Пуассона от 20 июня 1808 г. (Пуассону было тогда лишь 27 лет) «*Sur les inégalités séculaires de moyens mouvements des planètes*»¹. Эта работа, несмотря на некоторые ценные результаты, имеет скорее исторический интерес. В ней нет никакого намека на то, что надо исследовать производные возмущающей функции по элементам. Однако она послужила поводом для рассмотрения этого вопроса Лагранжем. Сам Лагранж в своей статье говорит, что работа Пуассона снова привлекла его внимание к этой проблеме, изучение которой он забросил. Араго указывает, что в бумагах Лагранжа после его смерти была обнаружена копия этого мемуара Пуассона, сделанная рукой Лагранжа, которому в это время было 72 года².

Однако применение общих формул к частным задачам все же требовало сложных и длинных вычислений ввиду исключений, которые было необходимо произвести, чтобы получить выражения для вариаций каждой из постоянных, сделавшихся переменными. Этот упрощенный метод сконцентрирован в формуле, данной в упомянутом выше *Supplément*. Согласно этой формуле частная производная некоторой функции, зависящей только от сил, приложенных к системе, взятая по какой-либо из произвольных постоянных, всегда равна некоторой функции переменных и ее дифференциалов, взятых отдельно по времени и по произвольным постоянным. Эта функция обладает тем замечательным свойством, что если в нее подставить значения переменных, выраженные через время и через произвольные постоянные, она должна сделаться не зависящей от времени и содержать только эти постоянные и их первые производные.

После того, как Лагранж исследовал вариации элементов планетных орбит, он рассмотрел тем же методом задачу системы тел, действующих одно на другое, применив общие формулы «Аналитической механики». Как говорит сам Лагранж, «после ряда бесплодных попыток я, не без удивления, принимая во внимание большую общность дифференциальных уравнений, пришел к результату, аналогичному тому, который был мной получен для планет, причем последний оказался лишь частным случаем найденных выражений»³.

¹ Poisson S. D., «Journ. de l'École Polytechnique», т. VII. Paris, 1809, стр. 1—56.

² Араго Ф., Биографии..., т. 3, стр. 44.

³ Lagrange, Mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique, «Oeuvres», т. VI, 1873, стр. 771—809.

Предположим, что силы, действующие на систему точек, могут быть разбиты на две группы, а именно :

$$X = P + U, \quad Y = Q + V, \quad Z = R + W;$$

$$X' = P' + U', \quad Y' = Q' + V', \quad Z' = R' + W'.$$

Допустим, что интегрирование дифференциальных уравнений движения выполнено для случая, когда рассматривались только силы $P, Q, R, \dots$, и пусть $a, b, c \dots$ будут произвольные постоянные, которые содержат эти интегралы. Можно найти решение для полных сил $X, Y, Z \dots$ с помощью метода вариации произвольных постоянных. Дифференциалы $a, b, c \dots$ являются переменными и линейными относительно $U, V, W \dots$ и имеют форму]

$$da = AU + BV + CW + A_1'U' + \dots$$

$$db = A_1U + B_1V + C_1W + A_1'U' + \dots$$

$$\dots\dots\dots,$$

где $A, B, C \dots$ суть функции неизвестных $a, b, c \dots$. Лагранж первый распространил метод вариации произвольных постоянных на задачи механики. Он получил общие формулы для величин $U, V, W, \dots$ в виде линейной функции дифференциалов $da, db, dc, \dots$. Осталось только найти обратные формулы, которые давали бы, в общем случае, прямо дифференциалы неизвестных $a, b, c, \dots$ в виде линейных функций $U, V, W, \dots$, и показать прямым способом свойства, которые характеризуют коэффициенты $A, B, C \dots$ этих выражений.

Скобки Лагранжа появляются, когда он выводит уравнения оскулирующих¹ элементов, рассматривая эту задачу в самом общем виде, как систематическое развитие метода вариации произвольных постоянных.

Скобки Лагранжа имеют вид

$$[a, b] = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial x'}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial x'}{\partial a} + \dots, \quad (31)$$

где x и $x', \dots$ — сопряженные переменные, причем

$$x_i = \varphi_i(t, a, b, \dots, g),$$

$$x'_i = \psi_i(t, a, b, \dots, g).$$

¹ Если в решении, в котором x_i представлены как функции времени и шести произвольных постоянных, рассматривать эти произвольные постоянные как функции времени, то при надлежащем выборе последних можно получить возмущенное движение. Функции времени $A_i(t)$, однозначно определенные соответствующими уравнениями, и называются оскулирующими элементами.

В своей второй статье¹ Лагранж указывает, что Пуассон 16 октября 1809 г. прочел во Французском институте мемуары, в которых содержится анализ той же проблемы, проведенный так, чтобы избежать исключений, которых требует метод Лагранжа. Формулы, полученные Пуассоном, не совпадают непосредственно с формулами Лагранжа, поскольку он рассматривает произвольные постоянные как функции переменных задачи и их дифференциалов, в то время как Лагранж рассматривает их как функции других постоянных. «Однако, — замечает Лагранж, — легко убедиться а priori, что они приводят к тем же результатам»².

Пуассон рассматривает движение системы тел, связанных между собой любым образом и подверженных действию сил, направленных к неподвижным или подвижным центрам, причем величина сил есть произвольная функция расстояния тел от этих центров. Он предполагает, что дифференциальные уравнения этого движения уже проинтегрированы при пренебрежении некоторой частью данных сил. Поэтому можно варьировать произвольные постоянные, которые входят в выражение этих интегралов, чтобы принять во внимание действие всех сил. Пуассон определяет первые дифференциалы этих произвольных постоянных интегрирования, рассматриваемых как переменные величины, и выражает их значения при помощи частных производных некоторой функции, которая получается, если взять интеграл от суммы всех сил, которыми пренебрегали вначале, умноженных соответственно на элементы их направлений. Эти частные производные берутся относительно произвольных постоянных и умножаются на функции этих же величин, которые не содержат явно времени, как это доказал Пуассон.

Формулы, приведенные в мемуаре Лагранжа, обратны формулам Пуассона: они дают частные производные той же функции при помощи дифференциалов произвольных постоянных.

Это различие между выражениями Лагранжа и Пуассона более важно, чем может показаться с первого взгляда, и метод Пуассона включает в себе некоторые возможности, которые отсутствуют у Лагранжа. В самом деле, если система дифференциальных уравнений движения полностью интегрируема, то безразлично, выражены ли интегральные уравнения в форме Лагранжа или Пуассона. Другое дело, если система не полностью интегрируема. Пусть мы имеем выражение одной из координат в функции времени и элементов орбиты. В этом случае нельзя сказать, является ли это выражение интегралом дифференциального уравнения, поскольку дифференциальное уравнение не удовлетворяется одним этим уравнением,

¹ Lagrange, Second Mémoire sur la théorie de la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ces problèmes, «Oeuvres», т. VI, 1873, стр. 809—816.

² Там же стр. 812.

а только им в совокупности с остальными. Однако, если найдено выражение для одной из постоянных интегрирования в виде функции времени, координат и их производных, то можно, не зная других интегралов, простой подстановкой проверить, удовлетворяет ли оно дифференциальным уравнениям.

Скобки Пуассона (a_r, a_s) являются функциями только произвольных постоянных $a_1, \dots, a_{2k}$. По этому поводу Пуассон пишет: «... отсюда вытекает, что в уравнениях механики первые производные произвольных постоянных могут быть выражены посредством частных производных функции Q , взятых по этим величинам и умноженных на функции этих же величин, которые не содержат явно времени.

Это — прекрасная теорема, которую ранее нашли Лагранж и Лаплас для дифференциалов эллиптических элементов и которую Лагранж затем распространил на любую систему тел, подверженных действию сил, направленных к неподвижным или подвижным центрам, интенсивность которых является какой-либо функцией расстояний этих тел от упомянутых центров¹.

В качестве примера применения своего метода Пуассон рассматривает две задачи: движение точки, притягиваемой к постоянному центру по какому-либо закону, и вращение твердого тела произвольной формы.

Как отмечает Пуассон, имеет место полное подобие между формулами этих совершенно различных динамических задач. Впрочем это подобие вытекает из аналогии, которая существует между произвольными постоянными, выбранными Пуассоном для обеих проблем.

В своем мемуаре 1816 г. Пуассон² рассмотрел некоторые дополнительные задачи.

Скобки Пуассона можно рассматривать как результат применения к некоторой функции линейного оператора

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_j} \right). \quad (35)$$

Легко доказывается следующая теорема Пуассона: если a и b — два интеграла уравнений движения, то и их скобки (a, b) также будут интегралом.

Однако не надо думать, что достаточно знать два интеграла уравнений движения, чтобы иметь возможность полностью выполнить интегрирование, комбинируя из двух интегралов третий, затем этот новый интеграл — с одним из первых и т. д. Дело в том, что, например, в случае движения системы из $n + 1$ свободных материаль-

¹ Poisson S. D., Journal de l'École Polytechnique, т. VIII, 1809, стр. 289.

² Poisson S. D., Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique, «Mém. Inst.», т. 1, 1816, стр. 1—70.

ных точек, находящихся исключительно под действием внутренних сил (так называемая задача $n + 1$ тел)¹, составленные таким способом скобки тождественно приводятся к постоянной или к функции от уже найденных интегралов. Это, конечно, весьма ограничивает значение скобок Пуассона для нахождения интегралов уравнений движения.

Гораздо большее значение, чем в проблеме непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения, скобки Пуассона получили в так называемой теории касательных преобразований (частным случаем которых являются канонические преобразования в механике)². Таким образом, скобки Пуассона, как это часто бывает, в силу связи различных ветвей математики обрели глубокий смысл в далекой от источника их возникновения области.

Важность скобок Пуассона определяется тем, что они инвариантны по отношению к касательным преобразованиям, т. е. к таким преобразованиям канонических переменных, которые оставляют уравнения движения неизменными³. В силу этого уравнения движения могут быть выражены через посредство скобок Пуассона.

Условия того, что преобразование одной системы переменных в другую будет касательным преобразованием, могут быть написаны с помощью скобок Пуассона следующим образом:

$$\begin{aligned}(q_i, q_j) &= 0; & (p_i, p_j) &= 0 & (i, j = 1, 2, \dots, n), \\ & & (q_i, p_j) &= 0 & (i \neq j), \\ & & (q_i, p_i) &= 1 & (i = j).\end{aligned}$$

В классической механике скобки Пуассона могут считаться определением канонических переменных, но они имеют смысл только тогда, когда q_i и p_i являются функциями других переменных q_i^* и p_i^* , о которых уже задано, что они канонические.

В 1837 г. Пуассон опубликовал мемуар «Замечания об интегрировании дифференциальных уравнений динамики»⁴. Пуассон исхо-

¹ Леви-Чивита и Амальди, Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2. М., ИЛ, 1951, стр. 275—276.

² См. гл. II, разд. 6.

³ Это положение можно выразить еще так:

Инвариантность билинейной дифференциальной формы

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial q}{\partial u} \right) du dv$$

есть необходимое и достаточное условие для канонического преобразования.

Производящая функция S (см. гл. II, разд. 6) из этого условия исключена. Определение канонического преобразования с помощью производящей функции S можно рассматривать как интегральную форму того, что билинейная дифференциальная форма есть определяющий инвариант канонического преобразования.

⁴ Poisson S. D., Remarques sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, Liouville Journ., т. II, 1837, стр. 317—337.

дит из того, что уравнения вида $\frac{dV}{dx} = m\dot{x}$ дают $dV = \Sigma m(\dot{x} dx + \dot{y} dy + \dot{z} dz)$. Если точки системы связаны между собой некоторыми условными уравнениями, то с помощью этих уравнений координаты x, y, z точек и их производные $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ могут быть выражены как функции некоторого числа независимых переменных $\varphi, \psi, \theta \dots$ и их производных $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dots$. Тогда dV примет вид

$$dV = Xd\varphi + Yd\psi + Zd\theta \dots, \quad (36)$$

где $X, Y, Z, \dots$ суть функции от $\varphi, \psi, \dots, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dots$.

Пусть имеется система интегралов этих уравнений, равная числу независимых переменных $\varphi, \psi, \dots$, тогда с помощью этих уравнений $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dots$ и, следовательно, $X, Y, \dots$ могут быть выражены как функции переменных $\varphi, \psi, \dots$ и постоянных интегрирования. Тогда выражение для dV включает только переменные $\varphi, \psi, \dots$; однако, как замечает Пуассон, это выражение не всегда является полным дифференциалом. В том случае, когда это имеет место, V может быть, как показал Гамильтон, легко определено. Пуассон добавляет к этому весьма важное замечание, что если определить V таким образом, то недостающие интегралы задачи будут

$$\frac{dV}{dh} = t + r, \quad \frac{dV}{de} = l, \quad \frac{dV}{df} = m, \dots, \quad (37)$$

где $e, f, \dots$ — постоянные интегрирования, h — постоянная закона живых сил, $l, m, n, \dots$ — новые произвольные постоянные. Заметим, что Пуассон пишет $\frac{dV}{dh} = -t + \varepsilon$, что является ошибкой.

В случае же, если dV не является полным дифференциалом, дело, естественно, усложняется. Пуассон находит, хотя и не в очень точной форме, условия, которые должны выполняться для того, чтобы V было полным дифференциалом. В качестве примера он рассматривает движение тела в пространстве под действием центральных сил.

Место, которое отвел Пуассон в своей механике принципу наименьшего действия, интересно лишь с историко-научной точки зрения.

Установив, что в отсутствие ускоряющих сил материальная точка всегда движется на заданной поверхности по наиболее короткой линии, по которой на этой поверхности можно перейти от одной точки к другой, Пуассон пишет далее: «Это свойство траектории подвижной точки, которая не подвержена действию никакой ускорительной силы, является лишь частным случаем другого более общего свойства, которое рассматривалось прежде с метафизической точки зрения и которому было дано неподходящее (*impropre*) наименование принципа наименьшего действия. Чтобы составить точное понятие о нем, представим себе тело, выходящее из некото-

рой заданной точки A и достигающее другой также заданной точки B : пусть также скорость тела в точке A дана по величине и неизвестна по направлению, а ускоряющая сила, которая вынуждает его движение, пусть будет такова, что

$$X dx + Y dy + Z dz$$

есть полный дифференциал трех переменных; тогда можно определить скорость v движущегося тела в функции координат x, y, z без того, чтобы знать кривую, по которой тело переходит из точки A в точку B ; предположим, что эта скорость умножена на элемент ds кривой и что взят интеграл $\int v ds$ от точки A до точки B ; очевидно, что значение этого определенного интеграла зависит от природы кривой; итак принцип наименьшего действия состоит в том, что подвижное тело, если оно движется свободно, выберет между всеми кривыми, которые могут быть проведены между A и B , кривую, для которой $\int v ds$ есть минимум; а если оно вынуждено двигаться по некоторой заданной поверхности, то оно выберет кривую, которой соответствует минимум интеграла по сравнению со всеми кривыми, проведенными на этой поверхности, соединяющими точки A и B . Доказательство этого принципа сводится к тому, чтобы показать, что вариация интегралов $\int v ds$ равна нулю...¹. Показав это согласно правилам вариационного исчисления, Пуассон делает правильный вывод о том, что равенство нулю вариации означает, что этот интеграл есть максимум или минимум. Однако, так как по его мнению, которое он считает очевидным, интеграл принципа наименьшего действия по самой его природе не может быть максимумом, то он должен быть минимумом для действительной траектории. Переходя к системе точек, Пуассон отмечает, что принцип наименьшего действия применим и в этом общем случае, как это показал уже Лагранж. Он записывает этот принцип также через выражение для живой силы. В общем во всех существенных пунктах изложение Пуассона близко к Лагранжу.

Лишь в одном пункте Пуассон рассматривает вопрос о принципе наименьшего действия с иной точки зрения. Как мы уже отмечали, оптический аспект принципа у Лагранжа отсутствовал. Напротив, именно Лаплас, прямой учитель Пуассона, применил рассматриваемый принцип для вывода закона двойного преломления света в исландском шпате. По этому поводу Пуассон замечает, что наиболее замечательным применением принципа является вывод из него законов отражения и преломления света. Относительно преломления он высказывает следующие интересные соображения: «Когда луч света движется в среде постоянной плотности, его скорость и направление остаются неизменными; только когда он переходит из одной среды в другую, его направление и скорость меняются. В момент

¹ Poisson S. D., *Traité de mécanique*, т. I, 1811, Paris, стр. 460—461.

этого перехода свет описывает кривую незначительной протяженности, которой можно пренебречь без существенной ошибки. Траектория каждой световой молекулы есть тогда совокупность двух прямых, каждая из которых проходится равномерным движением; обозначая u и u' длины этих прямых, n — скорость света в первой среде, а n' — во второй, будем иметь pu для значения интеграла $\int v ds$, взятого от исходной точки до входа во вторую среду, и $n'u'$ для части этого интеграла во второй среде; следовательно, значение этого интеграла, взятого вдоль всей траектории, будет выражаться через $pu + n'u'$, и эта сумма должна быть минимум согласно принципу наименьшего действия¹. Отсюда легко получается закон синусов:

$$n \cdot \sin \alpha_{\text{пад}} = n' \sin \beta_{\text{прел}}.$$

Таким образом, для рассмотрения оптических задач о преломлении и отражении принцип наименьшего действия оказывается плодотворным. Другое дело в механике. Пуассон говорит по этому поводу: «Если сравнить принцип наименьшего действия, принцип живых сил, принцип сохранения движения центра тяжести и закон площадей, то увидим, что первый принцип — это только правило для составления дифференциальных уравнений движения, теперь уже бесполезное, поскольку мы можем получить эти уравнения способом более непосредственным и более общим по формуле 1 из § 531 (уравнение Д'Аламбера — Л. П.), между тем как другие принципы, помимо того, что они содержат в себе важные особенности движения, имеют еще и то преимущество, что позволяют получить единственно известные нам в большинстве задач интегралы этих дифференциальных уравнений»².

Итак, Пуассон остался в основном в кругу представлений «Аналитической механики» Лагранжа.

8. Вывод уравнений движения из принципа наименьшего действия О. Родригесом

Задачу вывода уравнений движения из принципа наименьшего действия Эйлера — Лагранжа с помощью способа неопределенных множителей Лагранжа рассмотрел Оленд Родригес (1794—1851) в 1815 г.³

В чем смысл метода неопределенного множителя в механике? Для того чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим голономные

¹ Poisson S. D., Ttaité de mécanique, т. 1, 1811, Paris, стр. 466.

² Там же, Bruxelles, 1838, § 574, стр. 365; «Сборник», стр. 173.

³ Rodrigues O., De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement, rapportées aux variables indépendantes, Correspondance sur l'École Polytechnique, т. III, № 2, Mai, 1815, стр. 159—182; «Сборник» стр. 167—169.

связи, которые могут быть представлены в форме

$$f_i(q_n, t) = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (38)$$

В этом случае можно исключить m координат q_i с помощью вспомогательных условий, приведя тем самым рассматриваемую систему к такому виду, как если бы она была свободна от каких-либо кинематических условий.

Однако можно поступить и иначе, прибегнув к методу неопределенного множителя Лагранжа. Для этого умножаем каждое из уравнений (38) на неопределенный множитель $\lambda_i(t)$ и прибавляем их к выражению L , преобразуя тем самым его в некоторое другое выражение $\bar{L}$.

Приняв для неопределенного множителя λ_i значение $-\lambda_i$, напомним

$$\bar{L} = L - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i.$$

Так как в большинстве задач классической механики $L = T - V$, то преобразование L можно дополнить преобразованием V :

$$\bar{V} = V + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i.$$

Преобразовав лагранжиан L , мы тем самым отбросили кинематические связи. Но в этом случае преобразование V в $\bar{V}$ формально означает, что к потенциальной энергии действующих сил прибавляется потенциальная энергия тех сил, которые обуславливают кинематические связи. Эти силы определяются как

$$F = \frac{\partial(V - \bar{V})}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k f_k \right) = - \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}.$$

Таким образом, метод неопределенного множителя Лагранжа выражает силы реакции, которые производят кинематические связи. О. Родригес не считал применение этого способа обязательным. Он только хотел употребить уравнение живых сил в чистом виде как условное уравнение и дать пример применения теории неопределенных множителей и способ определить эти множители при помощи уравнений, относящихся к пределам интеграла (предельных уравнений).

Родригес говорит: «необходимо варьировать также время, так как только координаты имеют определенные вариации при пределах интеграла, тогда как вариации времени остаются совершенно произвольными»¹.

¹ Цит. соч., стр. 160.

Мы остановимся более подробно на содержании работы О. Родригеса также из-за той связи, которая существует между нею и работами по началу наименьшего действия профессора Московского университета Ф. А. Слудского (70-е годы XIX в., см. гл. III).

Следуя способу неопределенных множителей, сводящему вычисление условного экстремума к вычислению безусловного экстремума, Родригес прибавляет к вариации функции T умноженную на λ вариацию условного уравнения и получает для определения минимума интеграла действия уравнение

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T + \lambda(\delta T - \delta U)] dt = 0, \quad (39)$$

где λ — неизвестная функция времени.

Сначала Родригес не варьирует время, но затем заменяет вариации координат (Родригес ограничивается независимыми координатами) $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ выражениями

$$\delta q_1 - \dot{q}_1 \delta t, \delta q_2 - \dot{q}_2 \delta t, \dots, \delta q_n - \dot{q}_n \delta t$$

и добавляет к части, вынесенной за знак интеграла,

$$T \delta t.$$

Тогда предшествующее уравнение запишется:

$$A \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} [B_1(\delta q_1 - \dot{q}_1 \delta t) + \dots + B_n(\delta q_n - \dot{q}_n \delta t)] dt = 0, \quad (40)$$

где

$$A = T \delta t + (\lambda + 1) \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} (\delta q_1 - \dot{q}_1 \delta t) + \dots$$

или

$$A = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \delta q_n - (2\lambda + 1) T \delta t,$$

$$B_1 = -\lambda \frac{\partial U}{\partial q_1} + (\lambda + 1) \frac{\partial T}{\partial q_1} - \frac{d(\lambda + 1)}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$$

.....

$$B_n = -\lambda \frac{\partial U}{\partial q_n} + (\lambda + 1) \frac{\partial T}{\partial q_n} - \frac{d(\lambda + 1)}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}.$$

Заметим, кстати, что в выражениях

$$\delta q_i - \dot{q}_i \delta t$$

под знаком δ у Родригеса следует понимать не изохронную, а полную вариацию координаты q_i , хотя у автора это обстоятельство нигде не отражено, так что в отношении символики и терминологии, использованных О. Родригесом, его доказательство нуждалось в уточнении, которое и было сделано позднее в работах Ф. А. Слудского.

Неопределенный множитель λ Родригес определяет, основываясь на двух предположениях:

1) вариация времени при пределах интеграла, выражающего действие, есть совершенно произвольная величина,

2) значение кинетической энергии при пределах интеграла T_1 и T_2 отлично от нуля. Впрочем, четко у Родригеса сформулировано только первое предположение, второе с очевидностью следует из доказательства. Приравнивая нулю слагаемое левой части уравнения (40), находящееся вне знака интеграла, Родригес получает предельное уравнение

$$A_2 - A_1 = 0. \quad (41)$$

Так как вариации координат при пределах интеграла равны нулю, то Родригес уравнение (41) пишет в виде

$$(2\lambda + 1)_1 \delta t_1 - (2\lambda + 1)_2 \delta t_2 = 0 \quad (42)$$

и уже в силу независимости вариаций δt_1 и δt_2 приходит к уравнениям

$$(2\lambda + 1)_1 = 0 \quad \text{и} \quad (2\lambda + 1)_2 = 0, \quad (43)$$

которым удовлетворяют значения λ на пределах интеграла¹. Приравнивая нулю интеграл, входящий в уравнение (40), Родригес получает уравнения для определения движения

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \dots, \quad B_n = 0, \quad (44)$$

что справедливо при условии независимости вариаций координат, на что Родригес не указывает.

¹ Уравнение (42) должно было бы выглядеть так:

$$T_1 (2\lambda + 1)_1 \delta t_1 - T_2 (2\lambda + 1)_2 \delta t_2 = 0$$

и отсюда, в силу независимости вариаций δt_1 и δt_2 ,

$$T_1 (2\lambda + 1)_1 = 0 \quad \text{и} \quad T_2 (2\lambda + 1)_2 = 0.$$

Предполагая, что значения T_1 и T_2 отличны от нуля, приходим к уравнениям (43).

Умножая уравнения (41) соответственно на $dq_1, dq_2, \dots, dq_n$, складывая их и учитывая уравнение $dT = dU$. Родригес получает уравнение

$$(2\lambda + 1)dT + Td(2\lambda + 1) = 0.$$

Интегрируя его, он находит

$$2\lambda + 1 = \frac{K}{T},$$

где K — постоянная. Чтобы удовлетворить уравнениям (43) при пределах, нужно положить $K = 0$. Отсюда $\lambda = -\frac{1}{2}$. Подставляя значение λ в уравнения (44), Родригес находит уравнения движения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Таким образом, в первый период формирования вариационных принципов механики их развитие, по существу, неотделимо от вариационного исчисления и проблемы построения аналитической механики. Развитие вариационного исчисления давало математические методы аналитической механике, развитие последней было одной из важнейших причин, приведших к созданию вариационного исчисления, а в последующем постоянно расширяло круг его проблем.¹

¹ Полная библиография по вариационному исчислению дана: M. L e s a t, *Bibliographie du Calcul des Variations depuis les origines jusqu'à 1850*, Paris, 1916; M. L e s a t, *Bibliographie du calcul des Variations 1850—1913*, Paris, 1913.

О работах Эйлера по вариационному исчислению имеется фундаментальное исследование Каратеодори (см. C. C a r a t h é o d o r y, *Einführung in Eulers Arbeiten über Variationsrechnung*; L e o n a r d i E u l e r i, *Opera Omnia*, I, 24, Bernal, 1952, p. VIII—LXIII; C. C a r a t h e o d o r y, *Gesammelte Mathematische Schriften*. Bd. 5, München, 1957, s. 107—174), а также статьи: Рыбников К. А., Первые этапы развития вариационного исчисления, Историко-математические исследования, вып. 2, М.—Л., 1949; Александрова Н. В., К истории вариационного исчисления, Труды ИИЕиТ, т. 28, изд. АН СССР, М. 1959. О работах Лагранжа и Родригеса по аналитической механике, см. сб. ЖЛ Лагранж, изд. АН СССР, М., 1937; *Abhandlungen über die Principien der Mechanik*, N 167 Ostwald's Klassiker der exacten Naturwissenschaften.

ГЛАВА II

ОПТИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ГАМИЛЬТОНА И ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА—ОСТРОГРАДСКОГО

1. Биография и методологическая концепция Гамильтона

Следующим этапом в истории вариационных принципов, подготовленным как развитием техники, так и развитием геометрической оптики в интересующем нас аспекте, явились исследования ирландского математика Гамильтона (1805—1865).

Исследования по геометрической оптике, приведшие к предсказанию конической рефракции, оптико-механическая аналогия, принцип Гамильтона—Остроградского, канонические уравнения Гамильтона и функция Гамильтона в механике, исчисление кватернионов, в котором заложены основы векторного (и операционного) исчисления и которое является первой некоммутативной алгеброй, оператор Гамильтона — таковы основные работы, вписавшие имя Гамильтона в историю физики и математики.

Эти открытия на протяжении столетия и в наши дни служили и служат мощным оружием научного познания и технических исследований в руках математиков, физиков, инженеров.

Уильям Роуэн Гамильтон родился 4 августа 1805 г. в г. Дублине в Ирландии. Дед Гамильтона — ирландец, женившийся на шотландке, — был аптекарем. Старший сын его, ставший нотариусом, — отец Уильяма Роуэна.

В детские годы Гамильтон развивался очень быстро. Уже четырех лет он хорошо знал географию, библию и свободно читал литературу на английском языке. Пяти лет он любил декламировать Драйдена, Мильтона, Гомера, Коллинса. К восьми годам он изучил итальянский и французский языки. В это же время он настолько овладевает латынью, что оказывается в состоянии выражать свои чувства и впечатления в импровизированных латинских речах. Кроме того, он изучает арабский и санскритский языки. Письмо, написанное им сестре 14 декабря 1815 г. в возрасте десяти с половиной лет, дает хорошее представление об его интересах и характере его занятий: «Я читал в течение некоторого времени Лукиана и Теренция, еврейский псалтырь по воскресеньям, а по субботам

что-нибудь санскритское, арабское и персидское. В свободные часы я читаю «Одушевленную природу» Годьдсмита и какую-либо новую повесть или стихи, которые мне встретятся. Я очень люблю Вальтера Скотта. Я далеко продвинулся в практике арифметики и проработал с дядей почти половину первой книги Евклида. Я изучаю совместно древнюю и новую географию. Каждое утро на втором уроке я занимаюсь греческим новым заветом...»¹.



У. ГАМИЛЬТОН (1805—1865)

К двенадцати годам Гамильтон был полиглотом; знания его в области гуманитарных наук и в богословии были обширны и его умственное развитие поражало всех. Замечательно, что при такой исключительной одаренности и интенсивных занятиях он не отстает от своих сверстников и в физическом развитии.

В 1815 г. он поступает в школу, где и обучается до 1823 г.

¹ Гамильтон У. Р., Письмо к сестре от 14 декабря 1815. Письмо цитируется по книге: Graves G., Life of sir Hamilton W. R., т. 1, Dublin, стр. 46. В этой книге материал расположен в строго хронологическом порядке, в силу чего указание даты приводимого в ней документа вполне заменяет указание страниц. Поэтому во всех дальнейших ссылках на документы, взятые из этой книги, приводится только дата.

Во время обучения в школе проявились замечательные математические способности Гамильтона. Он изучает высшую математику и небесную механику. Занимаясь по «Небесной механике» Лапласа, он обнаруживает в одном из томов ошибку, не замеченную никем ранее. Его краткая записка об этом была показана профессору астрономии, королевскому астроному Ирландии Бринклею, который выразил желание познакомиться с Гамильтоном. Это знакомство сыграло большую роль в жизни Гамильтона и усилило его интерес к математике.

В 1824 г. Гамильтон поступил в Тринити-колледж Дублинского университета. Почти в каждом семестре Гамильтон получал премии за успехи. Исклительные успехи Гамильтона создали о нем мнение, как о человеке с блестящим научным будущим. Он уже в это время интересуется теорией образования изображения в оптических приборах и в 1824 г. заканчивает работу «О каустиках». В предисловии к этой работе Гамильтон пишет, что предполагает исследовать некоторые общие свойства систем лучей. Только после того, как он окончил эту работу, преподаватель познакомил его с трудом Малюса «*Traité d'Optique*», в котором рассматривались те же проблемы. Однако результаты Гамильтона были получены другим методом.

13 декабря 1824 г. Гамильтон представил свою работу Ирландской академии, совет которой передал ее на заключение комиссии в составе Мак-Доннелля, Харта и Ларднера. Эта комиссия 13 июня 1825 г. дала характерный отзыв: «результаты, которых достиг автор, новы и имеют большой интерес... и значительное аналитическое мастерство проявилось в исследованиях, которые привели к ним. Но мы полагаем, что вопросы, рассмотренные в этом мемуаре, по своей природе так абстрактны и формулы настолько общи, что требуется более полно развить соображения, при помощи которых некоторые из этих результатов были получены, и точно изложить тот аналитический процесс, посредством которого получают некоторые из этих формул. Это, полагаем мы, необходимо, чтобы сделать полезной публикацию этого мемуара».

Этот отзыв побудил Гамильтона разработать свои исследования по геометрической оптике, которые он назвал «Теорией систем лучей». В течение ближайших двух лет он выполнил это намерение. Он глубоко изучил теорию поверхностей и благодаря этому нашел новые законы для систем лучей.

К этому времени относится окончательное выяснение Гамильтоном своего призвания. Он понял, что его призвание — математика, подлинная область проявления его творчества — это научные изыскания и что, хотя он может чувствовать поэзию и желал бы быть поэтом, он никогда не сможет стать мастером и творцом в этом искусстве. Тем не менее он всю жизнь продолжал писать стихи, которые были неплохи с версификаторской точки зрения, но страдали то-

сутствием подлинного поэтического чувства, хотя многие из них очень искренни.

Гамильтон упорно занимается математическими науками и везде ищет самостоятельных путей и способов выражения. Он изучает «Начала» Ньютона и решает многие рассмотренные в них задачи не только геометрическим, но и аналитическим методом.

В феврале 1826 г. он готовит к печати для «Transactions of Irish Royal Academy» свою первую печатную работу по теории систем лучей. В 1827 г. он представляет Ирландской академии первую часть своего трактата «Theory of Systems of Rays» (Теория систем лучей), которая была опубликована в «Известиях» этой Академии в 1828 г. Вторая и третья части этой работы при жизни Гамильтона остались неопубликованными, но значительная часть результатов, найденных в них, вошла в известные «Supplements to the Theory of Systems of Rays» (Добавления к теории систем лучей), которые были опубликованы в тех же «Известиях».

1827 г. в известном смысле был поворотным в жизни Гамильтона. В 1826 г. Бринклей, который руководил Гамильтоном в его астрономических занятиях и помогал ему в математических исследованиях, принял епархию в Клойне. На освободившееся место королевского астронома и профессора астрономии среди других кандидатур была выдвинута кандидатура двадцатидвухлетнего Гамильтона и он был единогласно избран профессором астрономии в день окончания им колледжа.

В течение ряда лет Гамильтон возглавлял Дублинскую астрономическую обсерваторию и читал не без успеха курс лекций по астрономии, представлявший собой в сущности курс небесной механики. Гамильтон никогда не интересовался практической астрономией. Его интересы ограничивались небесной механикой и теорией оптических инструментов. Впрочем, надо заметить, что в силу географического расположения Дублинской обсерватории ее наблюдения никогда не играли сколько-нибудь значительной роли в новой астрономии, и Гамильтон поступал очень мудро, тратя большую часть своих сил на работу в области математики.

22 октября 1832 г. Гамильтон теоретически предсказал существование ранее неизвестного явления — внутренней и внешней конической рефракции, — экспериментально найденного затем Г. Ллойдом. Мало вероятно, чтобы внутренняя и внешняя коническая рефракция были когда-нибудь открыты чисто экспериментальным путем, так как их осуществление возможно только при весьма точном соблюдении определенных условий, значение которых, если не исходить из теории, не может быть предусмотрено.

Это открытие смело можно поставить рядом с открытием Нептуна на основании вычислений Леверрье. Оно вызвало большой интерес среди ученых и сделало имя Гамильтона известным за пределами Ирландии.

В научной биографии Гамильтона 1834 г. отмечен распространением на динамику той идеи характеристической функции, которую он с таким успехом применил в области геометрической оптики. Исследования Гамильтона по динамике, опубликованные в виде двух статей в лондонских «Philosophical Transactions of Roy. Soc.», получили блестящую оценку. В 1842 г. на ежегодном собрании Британской ассоциации в Манчестере Якоби сказал: «Гамильтон — это Лагранж вашей страны». В 1866 г. Тэт охарактеризовал эту работу как «крупнейшее дополнение, полученное теоретической динамикой с тех пор, как были достигнуты великие успехи Ньютоном и Лагранжем»¹.

В 1835 г. Гамильтон был награжден золотой медалью Английского королевского общества.

В декабре 1837 г., после смерти президента Ирландской академии, Гамильтон избирается ее новым президентом. Вступительный адрес, прочитанный новым президентом в январе 1838 г., кроме обычных слов о красоте, истине и боге, заключал в себе некоторые конкретные предложения об организации секции биологии и развитии литературного отделения. Гамильтон в общем удовлетворительно справлялся с исполнением разнообразных функций президента, хотя и не провел в Академии никаких значительных реформ.

В том же 1838 г. он получил от Российской Академии наук письмо, подписанное ее президентом Уваровым, в котором сообщалось, что он единогласно избран членом-корреспондентом этой Академии. Представление Гамильтона в члены-корреспонденты, высоко оценивавшее его заслуги в динамике, было подписано академиками Остроградским, Буняковским и Фуссом.

Приводим текст представления в переводе с французского:

«После того, как были найдены общие формулы, которые дают все условия равновесия какой-либо системы, геометры свели проблемы движения к задаче равновесия.

В итоге этой эпохи Механика вступила в область чистого анализа. Любой вопрос равновесия или движения систем оказался сведенным к интегрированию дифференциальных уравнений. Однако выполнение этой интеграции представляет трудности очень часто непреодолимые; например, в проблемах движения системы материальных точек известно вообще только семь интегралов, доставляемых общими принципами динамики, а именно: три интеграла движения относительно центра инерции, три, которые относятся к принципу площадей, и один, который содержит в себе принцип живых сил. Но для того, чтобы решение было полным, необходимо иметь двойное количество интегралов по сравнению с числом переменных; имея только семь интегралов, необходимо отыскать другие методами, особыми для каждой частной задачи. Однако

¹ Цит. по: Graves, Цит. соч., т. 2, стр. 72.

господин Гамильтон, королевский астроном в Дублине, показал, что достаточно иметь некоторое число интегралов для того, чтобы найти все остальные с помощью простого дифференцирования; этот результат, продемонстрированный с наибольшей простотой, должен быть зачислен в число наиболее блестящих открытий, сделанных в последнее время.

Господин Гамильтон опубликовал также исследования о движении планет и о свете. Мы не можем ничего сказать о них, так как они еще не дошли до нас. Но каково бы ни было их значение, интегрирование общих уравнений Динамики, столь существенно улучшенное господином Гамильтоном, достаточно для допущения его в число наших членов-корреспондентов. Фусс, Буняковский, Остроградский». (Протокол заседания Российской Академии наук от 22. XII. 1837 г., Архив Академии наук СССР, ф. 1, оп. 2, 1837, § 709.)

Гамильтон уже давно интересовался мнимыми величинами, их геометрической интерпретацией и возможными обобщениями. В 1843 г. он пришел к открытию исчисления кватернионов — гиперкомплексных чисел. Это его основной и наиболее замечательный вклад в математику. 16 октября 1843 г. он установил фундаментальную теорему умножения кватернионов, лежащую в основе некоммутативных алгебр. В ноябре 1843 г. он прочитал об этом открытии доклад в Ирландской академии.

Вот как сам Гамильтон описывает это открытие:

«Дорогой Арчибальд, 1) я желал бы при удобном случае поговорить с тобой о кватернионах; такой случай сейчас представился благодаря твоему упоминанию во вчерашней записке, полученной мною сегодня утром, что ты размышлял о нескольких пунктах, связанных с ними (кватернионами. — Л. П.) особенно об умножении векторов.

2) Во всей теории кватернионов нет важнее и фундаментальнее вопроса, чем этот, — что представляет собой такое умножение? Каковы его правила, объекты и результаты? Какие аналогии существуют между ним и другими действиями, получившими одно общее название? И, наконец, каково его (если таковое возможно) приращение?

3) Если попутно с этим предметом мне позволят говорить о себе, то я сделаю это таким образом, что привлеку и тебя, коснувшись «дочетвертичного периода», когда ты, будучи ребенком, уже перенял от меня идею вектора, представленную тройками (triplets); случайно я запомнил год и месяц — октябрь, 1843 г., когда, вскоре по возвращении из Корка и Парсонстауна, куда я ездил в связи с заседанием Британской ассоциации, желание открыть законы умножения вновь возникло во мне с силой и страстностью, желание, дремавшее в течение многих лет, хотя и в те годы почти удовлетворенное и обсуждавшееся с тобой лишь время от времени.

Каждое утро в начале указанного месяца твой (тогда) маленький братец Вильям Эдвин и ты имели обыкновение за завтраком спрашивать меня: «Ну, папа, можешь ли ты умножать триплеты?» И я всегда был принужден отвечать, печально качая головой: «Нет, я могу производить над ними лишь действия сложения и вычитания».

4) Но 16-го числа того же месяца, оказавшегося понедельником и днем совещания Королевской ирландской академии, когда я шел в Академию, чтобы председательствовать, по набережной Королевского канала в сопровождении твоей матери, которую, вероятно, подвезли сюда, то несмотря на ее разговор со мною, мои мысли так четко работали в подсознании, что дали, наконец, результат, важность которого я тотчас же ощутил. Казалось, замкнулась электрическая цепь и вспыхнула искра, пришел вестник (как я моментально почувствовал) плодов многих долгих лет неуклонно направленной работы мысли во мне, который станет достоянием других, если мне доведется жить достаточно долго, чтобы в точных выражениях сообщить открытие. Я не смог подавить импульса — не философского в сущности—вырезать на камне Бругамского моста, мимо которого мы проходили, основную формулу со знаками i, j, k , именно $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, которая содержит решение проблемы, но конечно, как надпись она давно уже стерлась. Более прочный след, однако, сохранился в книгах совещаний за это число (16 октября 1843 г.) в виде замечания, регистрирующего факт, что я тогда попросил и получил разрешение прочитать доклад о кватернионах на первом общем заседании сессии; чтение имело место в понедельник 13-го следующего ноября. Этими четырьмя параграфами заканчиваю свое первое письмо, но надеюсь в скором времени написать второе.

Твой любящий отец У. Р. Гамильтон¹

Последние 22 года своей жизни Гамильтон почти целиком посвятил разработке и развитию исчисления кватернионов и их практических применений.

В 1846 г. Гамильтон отказался от поста президента Ирландской Академии. Отказ этот был связан как с его желанием освободиться от административных обязанностей, так и с неприятным инцидентом, имевшим место во время обеда Геологической ассоциации и вызванным некоторым злоупотреблением алкогольными напитками.

Гамильтон умер 2 сентября 1865 г. в возрасте 60 лет.

Гамильтону принадлежит 141 печатная работа по различным вопросам математики, оптики и динамики.

¹ Гамильтон У. Р., Письмо Арчибальду Х. Гамильтону от 5 августа 1865 г. Цит. по Graves.

Примыкая к работам английской математической школы с ее разработкой символической, формальной стороны математических операций, Гамильтон развил ряд представлений, оказавшихся исключительно плодотворными. У Гамильтона мы находим понятие, особенно ценное для физики, — это понятие поля. Он исходит из того, что обе части кватерниона¹ суть функции точки, т. е. каждой точке пространства сопоставлен кватернион, или, другими словами, один скаляр и один вектор. К такого рода полю кватернионов

$$i(x_i) + iu(x_i) + jv(x_i) + kw(x_i)$$

он применяет определенные операции и получает в результате их новые поля.

Гамильтон строит символические операторы из частных производных по координатам поля. Наиболее важный из них «оператор Гамильтона»:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Формальные операции над ∇ производятся так, как если бы этот оператор был вектором.

Если φ скаляр, то $\nabla\varphi = \text{grad } \varphi$. Если $iu + jv + kw$ вектор, то $\nabla(iu + jv + kw) =$

$$= -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Скаляр этого произведения — дивергенция поля, а вектор — вихрь или ротор.

Применив ∇ к скаляру φ дважды, получим оператор Лапласа Δ :

$$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \varphi.$$

Таким образом, Гамильтон внес значительный вклад в разработку основ современного операционного исчисления.

Физики, механики, техники широко использовали аппарат, данный кватернионами, выделив из него идею вектора и векторного и скалярного умножения. Заметим, что термин «вектор»² впервые появляется у Гамильтона в 1845 г.

¹ Подробнее о работах Гамильтона по гиперкомплексным числам см. Поллак Л. С., Гамильтон У. Р., Труды института истории естествознания и техники, т. 15, М., 1956, стр. 206—276. В своем исчислении кватернионов Гамильтон кладет в основу группу вращений. «При этом, — замечает Ф. Клейн, — Гамильтон поступает совершенно наивным образом: он не знает того, что выбор ортогональной группы допускает известный произвол». Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, т. 2, Геометрия, Гостехиздат, М.—Л., 1934, стр. 95.

² Hamilton W. R., Quarterly Journal, т. 1, 1845, стр. 56.

Наряду с понятием «вектор», Гамильтон ввел понятие «скаляр». Скаляр — это не что иное, как инвариант относительно всех преобразований координат. Скаляр не меняется, следовательно, при сдвиге, вращении и инверсии. Величина, отличающаяся от скаляра только тем, что при зеркальном отображении меняет знак, называется псевдоскаляром. Слово «скаляр» часто употребляется в векторном и тензорном анализе вместо термина инвариант. Скалярное произведение означает инвариантное произведение.

Гамильтон показал, как проще всего исследовать поля методами дифференциального и интегрального исчисления. Он основывается на двух положениях:

1) Дифференциалы dx , dy , dz , отношения которых определяют перемещения в данной точке пространства, изображают некоторый свободный вектор, т. е. они ведут себя при преобразовании координат как компонента свободного вектора.

2) Символы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ также имеют характер компонентов свободного вектора, т. е. при переходе к новой прямоугольной системе координат они переходят в символы $\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z'}$, так же как преобразованные координаты полярного вектора получаются из его первоначальных координат.

Нам остается дать краткую характеристику научной среды, в которой вращался Гамильтон. Значение коллективной научной организации и связей для научного исследования нельзя недооценивать. Близкими Гамильтону людьми в период его научного творчества был ряд крупных ученых и поэтов того времени. Отметим лишь некоторых из них. Известный астроном и оптик Эйри, исследования которого представляют крупный интерес, человек с резко выраженной склонностью к математической разработке научных вопросов; Дж. Гершель-сын великого В. Гершеля, крупный астроном, один из виднейших ученых того времени; Уэвелл, работавший не только в области точных наук, но и в сфере развития основных идей индуктивной, позитивистской философии; Де Морган — математик и один из плеяды английских «реформаторов» логики, которые шли в направлении математизации формальной логики и подчеркивали ее тавтологический характер; Уордсворт — известный английский поэт так называемой «озерной» школы. Гамильтон регулярно принимал участие в работах Ирландской академии наук, в дискуссиях, которые имели в ней место. И в этой академии, в отделе физики и математики, основную роль играли проблемы небесной механики и оптики, экспериментальной и теоретической. Гамильтон также принимал участие в съездах Британской ассоциации. На этих съездах он встречался с крупными английскими учеными, а также и с иностранными гостями. Так, надо отметить, что он встретился на одном из съездов с Якоби, который развил динамический метод Гамиль-

тона. Гамильтон высоко ценил работы Коши, Фурье и других представителей математического направления в физике первой половины XIX в. Можно сказать, что Гамильтон принадлежал к той группе ученых, занятия которых в области механики ограничивались проблемами небесной механики, а в области оптики — оптикой теоретической. Гамильтон был прежде всего математиком и воспринимал главным образом то, что либо лежало в сфере математики, либо так или иначе соприкасалось с ней. Он не создал какой-либо школы, но его исчисление кватернионов нашло целый ряд горячих последователей, его динамика развивалась Якоби, Ли, Пуанкаре и другими крупнейшими учеными, его геометрическая оптика послужила известным толчком к работам Максвелла, Клейна, Брунса.

Общие философские воззрения Гамильтона были близки к взглядам Беркли и Канта. В его письмах и конспектах мы находим много высказываний в духе кантианской философии. Насколько сильно было влияние Канта на мировоззрение Гамильтона, видно хотя бы из сделанной им попытки построить алгебру как науку о чистом времени. Работа под таким названием была опубликована Гамильтоном, который считал, что «если геометрия опирается на интуицию пространства, то алгебра могла бы опираться на родственную интуицию времени»¹. И далее: «...момент в алгебре, по-моему, является тем же, чем точка в геометрии, переходы, интервалы от одного момента к другому аналогичны ограниченным прямым линиям, время можно мысленно представить или изобразить в виде бесконечной прямой линии. Этот синтез алгебры или же построение ее заново в ее наиболее существенных отделах на основе идеи чистого времени является предметом, которым я недавно занимался»².

Мы «наблюдаем, вернее создаем при помощи математических формул» очертания и соотношения, придаем им форму звезд и созвездий. Однако созданная нами схема оказывается скоро недостаточной, и мы творим все новые и новые теории, вынимая «из сокровищницы математической мысли новую формулу, в которой впечатления нашего зрительного чувства принимают форму и характеристику»³. Наконец, приблизившись к более или менее адекватному представлению явлений, мы хотим, — говорит Гамильтон, — чтобы оно, кроме того, было максимально простым.

Теория эпициклов в общем удовлетворительна, но она позволяла объяснить лишь прошлое, она «была довольно гибкой, вы могли приспособить ее к чему угодно, ее никогда нельзя было окончательно опровергнуть фактами, хотя всегда требовалось немного изменить и исправить; но эта теория не представляла собой гениального ме-

¹ Гамильтон У. Р., Письмо к Graves от 11. VII. 1835. Цит. по Graves...

² Там же.

³ Гамильтон У. Р., Вступительная лекция по астрономии в 1833 г. Цит. по Graves...

тогда, ибо не содержала принципа постоянного прогресса. Как бы точно ни было знание старых и примитивных движений, оно не дает гениальной помощи для будущего открытия и не является исходным пунктом для вывода новых и зависимых движений»¹.

И вот на смену этой картине возникает новая, более продуктивная. Сначала Кеплер соединил факты, а затем Ньютон объединил законы. Он переплавил в огне интеллекта в одно блестящее целое все отдельные истины, которые установил Кеплер. Он создал закон всемирного тяготения, о грандиозной общности которого, по его мнению, трудно дать точное понятие. Однако и этот закон не является последним моментом исследования, идущего ко все более общим и новым проблемам. Так, в процессе нашей мыслительной деятельности воссоединяется в единую картину тот видимый мир, познание которого является важнейшей задачей человеческого интеллекта.

Мы видим, что Гамильтон особо отмечает то, что исходным моментом познания являются «видимости». Математическая обработка явлений, наблюдаемых нами, создает свой особый мир математических символов, который находится в каком-то соответствии с внешним миром.

В отношении конкретных проблем методологии естествознания позиция Гамильтона может быть охарактеризована следующими моментами:

1. Он — динамист, занимающий по отношению к атомистике позицию, близкую к позиции Бошковича и Канта.

2. Он рассматривает процесс научного исследования как распадающийся на два разделенных во времени этапа: индуктивный и дедуктивный, причем первый предшествует второму.

3. Он считает науку идеальным построением, которое находится в некотором соответствии с внешним миром, но ни в коем случае не является его отражением.

Теория непротяженных атомов-центров сил восходит к Бошковичу и Канту, произведениями которого особенно увлекался Гамильтон в это время.

С точки зрения Гамильтона вообще не существует никаких атомов, представляющих собой некоторые материальные «кирпичи» мироздания. Не существует никаких реальных частиц, которые хотя и лежат вне возможностей чувственного восприятия, но которые своими движениями производят наблюдаемые нами физические явления. Мы имеем дело только с силами, только с «energies» отталкивания и притяжения; причем, исследуя эти силы, мы находим их исходящими из определенных центров. Эти пространственные центры сил не являются протяженными: они «математические точки» без всякой фигуры. Это — некоторый своеобразный узел

¹ Гамильтон У. Р., Вступительная лекция по астрономии в 1833 г. Цит. по Graves . . .

сил, и все физическое содержание этого «атома» исчерпывается его ролью центра сил. Зачем же нужно такое понятие? Дело в том, что динамика того времени — это, прежде всего, динамика центральных сил. Механическая система есть совокупность связанных между собой некоторыми силами массовых точек, объем которых не играет никакой роли. Пространственный фактор не имеет значения, и самую постоянную m , характеризующую массу, можно рассматривать как некоторый коэффициент. При написании уравнений динамики можно утверждать, что допущение некоторого конечного объема «чего-то», откуда исходят силы, является лишней усложняющей механику гипотезой, которая притом представляет трудности в двух отношениях. Во-первых, она вводит в науку понятие об объектах непосредственно не наблюдаемых, ибо в опыте мы имеем дело только с силовыми действиями. Во-вторых, эта гипотеза ставит проблему установления свойств этого протяженного атома, выяснения причин его неделимости, которая не могла быть решена в начале XIX в.

Итак, Гамильтон — динамист. Для него нет материи как носителя тех явлений, которые проявляются в силовом действии. Любопытно, что, определяя предмет динамики как науки, он ничего не говорит о материи. Он пишет, что в его работе «Об общем методе динамики» речь идет «... о динамике, или науке о силе, рассматриваемой как сила, действующая по определенному закону в пространстве и времени»¹.

Взгляды Гамильтона близки к взглядам Бошковича, но в то же самое время он считает нужным произвести некоторое изменение концепции ученого иезуита. Вот что говорит Гамильтон в одном письме: «Что касается Бошковича, хотя он, вероятно, имел в виду (как вы заметили) лишь исправить имеющиеся в физической науке мнения о предмете, однако, как я попутно установил выше, его взгляды кажутся имеющими связь с возвышенным метафизическим идеализмом, и как к таковым я давно имел к ним склонность. Я прекрасно знаю, как близко они соприкасаются в физике со взглядами, принятыми великими современными аналитиками, и высказывался об этом как о полезном открытии во вступлении к своему «Динамическому очерку». Однако прерывность (хотя и не непроницаемость), которую Бошкович предполагает, кажется мне в известной мере неудовлетворительной, и я время от времени размышлял о возможности оживления старой идеи «заполненности» (plenum), но освобожденной от некоторых устарелых пут. Могла быть создана гипервысшая математика, чтобы осуществить эту идею. Я думаю, что моя характеристическая функция движения системы прерыв-

¹ Гамильтон У. Р., Письмо к Уэвеллу от 31. III. 1834: «... of Dynamics or the science of force, as treating of power acting by law in Space and Time», цит. по Graves...

ных точек могла бы распространиться на «полноту» (plenum) «энергий», чтобы выражать результаты их взаимодействия изменением четырехкратного интеграла, но я не развил идеи...»¹.

Мы видим, что Гамильтон в известной мере солидаризируется с теми взглядами, которые развивал Бошкович. Но они не представляются ему совершенно удовлетворительными, так как Бошкович построил картину, основанную на принципе прерывности. Гамильтон находит желательным «оживление старой идеи plenum'a», т. е. представления о заполненном пространстве. Эта мысль, конечно, вытекает из того, что волновая теория света, ставшая к этому времени почти общепризнанной, существенно связана с допущением некоторой среды—эфира.

В связи с этой идеей Гамильтона о «plenum'e» любопытно отметить, как ему представляется возможность осуществить конкретную разработку этой идеи. Он считает, что для этого «могла бы быть создана гипервысшая математика...»².

Эта мысль вообще очень близка Гамильтону, творцу исчисления кватернионов. Истоки ее восходят к теории Френеля, который для выражения количественных отношений новых физических образов должен был построить особый математический аппарат. Вообще с каждым новым принципиальным изменением физической картины мира возникает необходимость либо развить старый, либо разработать новый математический аппарат. Это усложнение иногда удается скрыть благодаря свойствам математического языка выражать в краткой и сжатой форме целый ряд отношений. Так, например, уравнение $\text{rot } H = \frac{1}{c} \left(\frac{dF}{dt} + eq \right)$ заменяет три дифференциальных уравнения в частных производных. Математически возможны какие угодно объединения такого типа, лишь бы они удовлетворяли требованию непротиворечивости, но физически они имеют смысл только тогда, когда такая «концентрированная» формула выражает какое-либо определенное свойство или отношение изучаемого объекта. Источники взгляда Гамильтона становятся еще более ясными, если заметить, что Гамильтон полагает возможным решить поставленную задачу созданным им методом исчисления характеристической функции. Это непосредственно вытекает из стремления Гамильтона к единой математической схеме. Подобные абстрактные математические исследования представляли собой сферу, где математический талант Гамильтона находил свое полное применение. Его склонность к такого рода задачам отражена в одной любопытной заметке, которую мы находим в его письме к Ллойд: «Во всяком случае, — пишет Гамильтон, — автор не претендует на оригиналь-

¹ Гамильтон У. Р., Письмо к Logan H. F. C. от 27. VI. 1834, Цит. по Graves...

² Это замечание и в наши дни звучит вполне современно.

ность своим парадоксом о четвертом измерении пространства, ибо помнит, что давно слышал его в разговоре; новизна, если она имеется, заключается в применении этого парадокса к современной теме, именно — к умножению триплетов.

«Действительно, я помню, что несколько лет назад в Вашем присутствии и, вероятно, в вашей квартире возникла беседа о четвертом измерении пространства или, вернее (что почти одно и то же), о геометрии четырех измерений, причем кто-то заметил: „Это как раз предмет для разработки Гамильтону“, в ответ на что Вы, я вполне уверен, заметили, что „наука о механике уже является геометрией четырех измерений“¹.

Перейдем теперь к вопросу о том, как представлялся Гамильтону процесс развития науки в смысле эволюции методов познания. Эта проблема важна еще и потому, что Гамильтон подчеркивает, что его исследования относятся к определенному, как мы увидим, дедуктивному этапу развития науки. Наука, и, в частности, оптика и динамика, по мнению Гамильтона, «имеет два различных направления процесса, которые могут быть названы путями анализа и синтеза, восходящей и нисходящей линиями, индуктивным и дедуктивным методами. В каждой физической науке мы должны восходить от фактов к законам путем индукции и анализа; и можем нисходить от законов к следствиям дедуктивным или синтетическим путем. Мы должны собирать и группировать видимости до тех пор, пока научное воображение различит их скрытый закон и единство возникнет из разнообразия; и затем из единства мы должны вывести вновь разнообразие и заставить открытый закон обнаруживать будущее»².

Для построения дедуктивной науки необходимо сформулировать тот основной закон или принцип, который должен являться исходной точкой всего исследования. Этот принцип должен отличаться большой общностью. Он должен устанавливать то, что является наиболее общим и типичным в свойствах данной области явлений. Общий метод «должен вытекать из некоторого закона или принципа наивысшей общности»³. Этот исходный принцип должен быть высшим результатом индукции. Другими словами, он должен быть «наивысшей и наиболее общей аксиомой (в смысле Бэкона)»⁴, которая и должна быть отправным пунктом дедуктивного исследования. Что же представляет собой общая аксиома в том смысле, который

¹ Гамильтон У. Р., Письмо к его преподобию Lloyd H. от 3. XII. 1844, цит. по Graves...

² Hamilton W. R., On a General Method of Expressing the Paths of Light and of the Planets, by the Coefficients of a Characteristic Function. Dublin. Univ. Rev., October, 1833, стр. 795—826. (Цит. по Hamilton: Math. Papers, т. 1, стр. 314.)

³ Там же, стр. 216.

⁴ Бэкон Ф., Новый Органон, Собр. соч., пер. Бибикова, т. 2, СПб., 1874, стр. 83—84.

придал этому слову Бэкон? Обратимся к его основному трактату «Новый Органон» и там мы найдем следующее место: «...много можно ожидать от наук, когда в надлежащей постепенности, т. е. по непрекращающемуся ряду ступенек, без перерыва, без скачков, научатся восходить от частных фактов к аксиомам низшего порядка, от последних к средним аксиомам, постепенно поднимающимся от одной к другой, чтобы достигнуть самых широких обобщений, ибо аксиомы низшего порядка мало чем отличаются от простого опыта. Но высшие аксиомы или самые широкие обобщения (я говорю только о тех, какие мы имеем) суть чисто идеальные; это суть настоящие отвлечения, не имеющие ни реальности, ни прочности. Настоящие аксиомы, надежные и как бы живые, суть средние аксиомы, на которых покоятся все надежды, все истинное счастье человеческого рода. На них же опираются и последние обобщения; под последними словами мы разумеем не просто отвлеченные принципы, но принципы действительного ограничения средними аксиомами¹.

Значение же этих аксиом в том, что они могут дать больше, чем заключено в том материале, из которого они получены (афоризм CVI). Гамильтон также считает, что аксиомы должны дать больше, чем в них, как в результатах индукции, заключено, так как математический метод дедукции позволяет установить новые соотношения, хотя бы формального характера.

Что же касается представления о том, что наука идет двумя путями: индукции и дедукции, взаимно дополняющими друг друга, то оно могло быть заимствовано Гамильтоном как из философской, так и из естественно-научной литературы. Не останавливаясь на соответствующих местах у Бэкона, сочинения которого были хорошо знакомы Гамильтону, можно указать на одно безусловно известное ему место у Ньютона. «Оптику» Ньютона Гамильтон читал и в конце ее мог найти следующие слова, дающие характеристику методологических устремлений Ньютона: «Как в математике, так и в натуральной философии исследование трудных предметов методом анализа всегда должно предшествовать методу соединения. Такой анализ состоит в производстве опытов и наблюдений, извлечений общих заключений из них посредством индукции и недопущения иных заключений, кроме полученных из опыта или других достоверных истин, ибо гипотезы не должны рассматриваться в натуральной философии. И хотя аргументация на основании опытов и наблюдений посредством индукции не является доказательством общих заключений, однако это—лучший путь аргументации, допускаемой природой вещей, и он может считаться тем более сильным, чем более общей является индукция... Путем такого анализа мы можем переходить от соединений к ингредиентам, от действия к их причинам, от частных причин

¹ Бэкон Ф., Новый Органон, Собр. соч., пер. Бибикова, т. 2, СПб., 1874, стр. 83—84.

к более общим, пока аргумент не заключится наиболее общей причиной. Таков метод анализа, синтез же предполагает причины открытыми и установленными в качестве принципов; он состоит в объяснении при помощи принципов явлений, происходящих от них, и в доказательстве объяснений¹.

Однако сходство высказываний Ньютона и Гамильтона далеко не полное. Различие, и различие весьма резкое, заключено в понимании «принципов», которые являются результатом индукции. Мы видим, что с точки зрения Ньютона принципы это — наиболее общие причины явлений. Дедукция начинается с того момента, когда причины явлений открыты и установлены в качестве принципов. В соответствии с материалистически-детерминистическим мировоззрением XVII в. Ньютон выдвигает как цель и как результат индукции нахождение общих причин данной группы изучаемых явлений. Для Гамильтона же общие принципы, которые получаются в результате индукции и которые являются исходными пунктами для построения дедуктивной теории, имеют совсем другой смысл. Гамильтон считает, что эти принципы являются просто математической формулировкой какого-нибудь свойства, которое нам представляется наиболее важным. Наиболее важным оно является для нас, так как наиболее часто встречается. В самом деле, что является исходным пунктом оптических работ Гамильтона? Относительно этих работ он сам указывает, что их основная цель — «ввести гармонию и единство в положения и заключения оптики, рассматриваемой как отдел чистой науки»².

Эти работы начинаются, по мнению Гамильтона, с того момента, когда этап индукции в оптике уже закончен. Основной исходный принцип — основа дедукции — уже найден. Какой же это принцип? Гамильтон считает, что таким принципом является принцип Ферма, который в едином соотношении выражает всю совокупность опытных фактов, относящихся к прямолинейности распространения света. То же самое относится к динамике, которая должна быть построена как единая дедуктивная наука, основанная на одном центральном соотношении, которое будет служить основанием для разрешения всех проблем динамической науки.

Что касается существа динамики, то Гамильтон проводит различие между двумя видами динамики, различающимися по их источнику. Один из них черпает свои заключения в наших размышлениях об идеях нашего рассудка, другой — в явлениях. Одна динамика — наука *a priori*, а другая — *a posteriori*. У Канта мы найдем такое же членение науки. Так, в «Пролегоменах ко всякой будущей метафизике» Кант говорит о том, что целый ряд положений явля-

¹ Ньютон И., Оптика, пер. С. И. Вавилова, Гиз, 1927, стр. 314.

² Гамильтон У. Р., Письмо к Coleridge S. T. от 3. X. 1932. Цит. по Graves...

ется априорным; «таковы положения: субстанция пребывает неизменно и постоянно; все, что совершается, всегда определено известной причиной по постоянным законам и т. д. Это действительно, — общие законы природы, существующие вполне *a priori*»¹. Сравним с этим высказывание Гамильтона, который, обсуждая проблему теории науки, пишет, что «здесь имеются или могут быть представлены две динамические науки: одна — субъективная, *a priori*, метафизическая, дедуцируемая из размышлений о наших идеях силы, пространства, времени; другая — объективная, *a posteriori*, физическая, открываемая наблюдением и обобщением фактов и явлений; что эти две науки различны по роду, но интимно и чудесно связаны, вследствие последнего единства, субъективного и объективного, в божестве или, говоря менее специально и более религиозно, благодаря святости обнаружений, которые ему самому угодно было совершить во Вселенной для человеческого интеллекта; так что две науки никогда полностью неотделимы, но могут продвигаться вперед совместно и пользоваться многими общими выражениями и каждая должна обладать аналогами для некоторых, если не для всех, результатов и теорем другой»².

Итак, мы видим, что с точки зрения Гамильтона мы должны априорно приписывать любое мыслимое нами изменение (в частности, криволинейное движение) некоторой причине, но если мы наблюдаем тело, движущееся криволинейно (т. е. изменяющее свое состояние движения), то мы только можем ожидать, что найдем какое-либо другое тело, которое своим действием вызывает наблюдаемое нами изменение; однако это не необходимо. Тот факт, что человечество бесчисленно много раз наблюдало причинно-следственные ряды и вывело отсюда заключение о детерминированности всех явлений (без этого невозможна практическая деятельность человека), не является для Гамильтона доказательством принципа причинности. Индукция от n раз повторенного опыта к $n + 1$ случаю может дать только «ожидание» или, переводя на язык математический, «математическое ожидание — вероятность».

Что является с точки зрения Гамильтона основной задачей и целью физической науки? На этот вопрос он дает недвусмысленный ответ в одной из своих лекций по астрономии: «Цель физики как науки — констатировать и объяснять видимые явления; классифицировать и обобщать факты; открывать скрытое единство и постоянство природы среди кажущегося разнообразия и изменчивости; построить, по крайней мере отчасти, историю внешнего мира, приспособленную к пониманию человека; дать отчет о прошлых явлениях и предвидеть будущее, изучать язык и истолковывать прооро-

¹ Кант И., Пролегомены ко всякой будущей метафизике, ОГИЗ, 1934, стр. 167.

² Гамильтон У. Р., Письмо к Уэвеллу от 25. V. 1833. Цит. по Graves...

чества Вселенной». В этом определении прежде всего нуждается в раскрытии выражение «объяснять видимые явления». Слово «объяснять» — достаточно многозначное. Без дополнительных разъяснений остается неясным, что надо под ним понимать.

Трудно сказать, чувствовал это Гамильтон или нет, но он дает некоторые пояснения тому, что он понимает под вышеприведенным выражением: «...в физической науке мы стремимся не только давать отчет о видимых явлениях, но и объяснять их, т. е. устанавливать связь между рассудком и опытом, и не только путем сравнения одних явлений с другими, но и путем раскрытия аналогий между их законами и нашими собственными законами и формами мышления, проникая нашим существом через землю, воду и воздух»¹. Это понимание объяснения не выходит за пределы философии Канта. Достаточно вспомнить учение Канта об опыте с характерным сочетанием данных чувственного восприятия и априорных форм рассудка, чтобы увидеть, что именно так и обстоит дело. Но здесь, кроме того, интересно разделение Гамильтоном применяемой в науке аналогии на аналогию видимых явлений, получающуюся путем сравнения их, и на аналогию между законами нашего собственного мышления и законами этих явлений. Этот взгляд, имеющий свои корни в общей идеалистической концепции Гамильтона, интересен в том отношении, что на его примере ясно видно, как идеализм в извращенной, перевернутой форме схватывал известные действительные соотношения бытия и мышления. Однако вряд ли требуются какие-либо дополнительные замечания, чтобы констатировать, что выраженная здесь тенденция Гамильтона вскрывать в законах бытия законы нашего мышления — тенденция, которую он неоднократно подчеркивает, является идеалистической. Процесс объяснения по мнению Гамильтона, «по существу принадлежит воображению»², хотя он сам говорит, что «я не отрицаю, он должен быть связан с большим вниманием к самим видимым явлениям в их мельчайших деталях», а также и «со строгим обсуждением гипотез, подсказанных научным воображением». Рассмотрим в качестве примера теорию Ньютона. При рассмотрении характера теории Ньютона Гамильтон ставит и по-своему решает целый ряд философских вопросов. Это, прежде всего, — вопрос о соотношении создаваемой нами картины мира с тем миром, который мы называем внешним для нас, и связанный с ним вопрос о характере нашего познания и критерии истинности тех результатов и теорий, которые мы строим в процессе нашего познания — процессе, который, по мысли Гамильтона, чрезвычайно близок к процессу художественного творчества.

¹ Гамильтон У. Р., Извлечение из вступительной лекции к курсу астрономии, 1831 г. Цит. по Graves...

² Там же.

³ Там же.

Для взглядов Гамильтона характерен следующий случай: «Кто-то однажды заметил: «Я не знаю людей, которые, не видя конической рефракции, поверили бы в ее существование. Я сам обратил два десятка математиков, показывая им конус света». Гамильтон ответил: «Насколько это отлично от моего подхода! Если бы я только видел коническую рефракцию, я бы никогда не поверил в нее. Мои глаза так часто обманывали меня. Я верю в коническую рефракцию, потому что я доказал ее»¹.

Ньютон, по мнению Гамильтона, выбирая из различных возможных форм идеальных миров, выбрал тот, который казался ему проще и согласованнее с действительностью которого была больше. Этот мир, построенный Ньютоном, есть мир, состоящий из сил, представляющий собой идеальную систему, согласующуюся с внешним миром. Таким образом, идеализм черпает свои аргументы в одностороннем абсолютизировании сложности процесса отражения человеком действительности; в том, что результатом этого процесса является некоторая определенная система понятий, которая в общей форме выражает, схватывает целую совокупность фактов. Кроме того, то, что путем математического рассуждения можно прийти к каким-то соотношениям, которым что-то «соответствует» во внешнем мире, представляется какой-то предначертанной гармонией, если рассматривать, как это и делают идеалисты, математику как порождение имманентной человеческой мысли. Теория выступает как форма, оторванная от того реального содержания, которое она должна выражать и элементы которого она должна связывать так, чтобы эти связи были копиями, снимками реальных связей.

2. Оптико-механическая аналогия Гамильтона

Для того чтобы понять позицию Гамильтона по отношению к корпускулярной и волновой теориям света, надо прежде всего представить, каково было положение этих теорий в первой трети XIX в. Вновь возрожденная трудами Юнга², Френеля и ряда других ученых волновая теория света одерживала одну победу за другой, постепенно расширяя круг объясняемых ею явлений. Однако и корпускулярная теория еще не уступила своего места и объясняла новые экспериментальные факты, хотя и с помощью введения усложняющих и довольно произвольных гипотез. Решающий эксперимент, который позволил бы окончательно решить вопрос в пользу той или другой теории, еще не был выполнен. Поэтому создавалось представление, что обе теории, описывающие совокупность оптических

¹ Sarton I., Discovery of Conical Refraction, Isis, 52, 1932, стр. 60.

² Полак Л. С., Из истории развития волновой теории света, Вопросы истории естествознания и техники, вып. 2, 1956, стр. 76—91; О. Френель, Избранные труды по оптике, ГТТИ, М., 1955.

явлений, не затрагивают их сущность, что можно применять ту или иную из них в каждом конкретном случае в зависимости от характера рассматриваемой задачи, или просто считать, что вопрос об истинности этих двух теорий остается до поры до времени открытым. Можно было говорить о существовании дуализма—волнового и корпускулярного — в физическом представлении как о природе света, так и о наблюдаемых экспериментально физических явлениях.

Естественно, что такое положение дела благоприятствовало рассмотрению оптических задач обоими методами, подсказывало, во всяком случае, идею их известной эквивалентности. Именно поэтому Гамильтон рассмотрел свою оптическую задачу как в корпускулярной, так и, в известном смысле слова, в волновой трактовке.

В 1808 г. Малюс (1775—1812) установил теорему, которая играет основную роль в геометрической оптике. Важнейшей задачей геометрической оптики является исследование световых лучей, вышедших из общей точки и претерпевших многократное отражение или преломление. В теории оптических лучей большую роль играют понятия теории поверхностей.¹ В век Лагранжа, Лапласа, Монжа совершенно закономерным является аналитическое исследование геометрических свойств световых лучей. Малюс так и говорит, что «лучи, выходящие из светящейся точки в среду однородной плотности, могут быть рассматриваемы как система прямых линий, проходящих через эту точку. Когда эти лучи встречаются поверхность некоторого тела, которое их отражает или преломляет, их взаимное расположение испытывает различные изменения, откуда возникают все явления оптики. Прежде чем перейти к анализу этих явлений, мы изложим некоторые свойства, общие всем пучкам лучей, отраженных или преломленных (не параллельных).

Пусть

$$m(z - z') = o(x - x'), n(z - z') = o(y - y')$$

уравнения прямой линии, принадлежащей к системе лучей, расположенных в пространстве согласно некоторому аналитическому закону, а m , n , o будут произвольными функциями от x' , y' , z' . Каждой точке пространства, т. е. каждому частному значению x , y , z соответствуют новые линии, принадлежащие к той же системе».²

Путем такого метода, аналогичного методу аналитической геометрии, Малюс рассматривает проблемы геометрической оптики. Установленная им теорема формулируется в этой работе дважды: один раз для случая отражения, а другой — для случая преломления света. В первом случае формулировка гласит: «система

¹ Геометрия систем лучей впоследствии была подробно и в очень общем виде разработана Куммером в труде «Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlungssysteme», Crelle Journ., т. 57, 1860, стр. 189—230.

² Malus M., Optique, Journ. de l'École Polytechn., т. VII, Paris, 1808, стр. 1—44, 84—129.

отраженных лучей может быть рассматриваема как место пересечения двух систем поверхностей разверток, которые пересекают поверхность (F) зеркала по двум рядам кривых (SS') и $(S'S')$, а точки встречи этих лучей находятся на двух кривых поверхностях (Σ) , (Σ') , которые мы называем каустическими поверхностями¹.

Малюс установил эту теорему для случая однократного отражения или преломления лучей, вышедших из некоторой точки. Он считал, что применимость этой теоремы ограничена только случаем единичного преломления и отражения и неприменима уже в случае вторичного². В 1816 г. Дюпен (1784—1873) дал очень простое доказательство этой теоремы для случая отражения в самом общем виде³. Французская академия наук создала специальную комиссию в составе Араго, Ампера и Коши для рассмотрения этой работы Дюпена. Доказательство, которое было дано Дюпеном, основывалось на том, что все отраженные лучи нормальны к огибающим сферам, имеющим центры на зеркале, и касаются одной из поверхностей, к которым нормальны падающие лучи. Однако общего доказательства теоремы Малюса еще не было. Полное доказательство этой теоремы искал Дюпен, но ему удалось дать строгое обоснование только для случая отражения. В 1825 г. Кэтлэ (1796—1874) и одновременно с ним Жергон (1771—1859), продолжая работу Дюпена⁴, дали полное доказательство этой теоремы. Таким образом, теорема Малюса была доказана в общем виде.

К теореме Малюса можно подойти тремя различными путями: во-первых, исходя из опытных законов отражения и преломления, во-вторых, исходя из корпускулярной теории и основываясь на принципе наименьшего действия, и, наконец, в-третьих, исходя из волновой теории, в которой согласно конструкции Гюйгенса—Френеля волновой фронт нормален к лучу. Что касается третьего пути доказательства теоремы Малюса, то волновая теория делает ее непосредственно очевидной, ибо любая волновая поверхность или любое семейство волновых поверхностей имеет ортогональные траектории, которые и являются лучами. Собственно говоря, это значит, что так называемая теорема Малюса заключалась в скрытом виде в теории Гюйгенса. Работы Дюпена и др. не заключали в себе ничего нового по существу. Вот что пишет Гамильтон по этому поводу: «И это удивительнее всего, что важная и оспаривавшаяся теорема была открыта и как нечто обыкновенное употреблялась Гюйгенсом более чем сто лет назад и затем была так полно забыта.

¹ Malus M., *Optique*,... стр. 13. Вторая формулировка (для случая преломления) находится на стр. 84 этой работы.

² Malus M., *Traité d'Optique, Mémoires présentés à l'Institut par divers savants*, Paris, 1811, стр. 214—302.

³ Dupin, *Applications de Géometrie*, Paris, 1822, стр. 195—197.

⁴ Quetelet, *Correspondance mathématique et physique*, I, 1825, стр. 147—149. Geronne, *Ann. Math.* (16), 1826, стр. 307.

Мой собственный метод, которым я вновь открыл ее, отличен от метода Гюйгенса и основывается на моем общем взгляде на оптику или скорее на еще более общей идее, примеры которой я дал в динамике¹.

Гамильтон в начальной стадии своих исследований исходил из теоремы Малюса², которую он, очевидно, знал только в том частном виде, который ей придал сам Малюс.

Интерес Гамильтона к оптике восходит еще к тому времени, когда он сидел на школьной скамье. Интерес этот возник благодаря изучению различных математических трактатов по оптике и механике, к которому Гамильтон приступил после того, как обнаружились его математические способности. Углубление этого интереса обусловливалось связью проблем геометрической оптики с вопросом о конструкции астрономических инструментов, которые Гамильтон изучал в связи со своими астрономическими занятиями. Уже в 1824 г., т. е. 19-ти лет, им была написана оставшаяся неопубликованной работа «On Caustics» (О каустиках). С того момента, когда он в 1827 г. стал во главе Дублинской обсерватории, интерес к оптике нашел и более непосредственное практическое основание.

Начиная с 1827 г., Гамильтон публикует ряд работ по «теории систем лучей». По поводу формы этих работ Клейн делает очень меткое замечание. Он говорит, что «эти статьи по их форме суть все, что угодно, — только не безупречные; в необозримом, неуклюжем порядке, полные невыведенных намеков и повторений, они все-таки представляют собой большое богатство мыслей»³. Первые работы Гамильтона были «по форме весьма растрепанными»⁴, замечает Лармор.

Эти работы, завершившиеся блестящим предсказанием конической рефракции, представляют основное из того, что сделано Гамильтоном в оптике. Он подошел к проблемам геометрической оптики с очень общей точки зрения, стремясь найти такое математическое соотношение, к которому сводились бы все проблемы этой науки. Он исходил при этом из мысли, что этап индукции, который он считал в развитии всякой науки предшествующим этапу дедукции, для геометрической оптики уже завершен. История этой науки, по мнению Гамильтона, уже выявила наиболее общее свойство оптических явлений, которое, будучи сформулировано математически, должно быть положено в основу геометрической оптики. Излагая в кратком очерке историю оптики, Гамильтон прежде всего подчер-

¹ Гамильтон У. Р., Письмо к Aubrey de Vere, 9. V. 1834. Цит. по Graves...

² Hamilton W. R., Theory of Systems of Rays, § 15, Math. Pap., т. 1.

³ Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I, М.—Л., 1937, стр. 239.

⁴ Larmor J., Mathematical and Physical Papers, т. 1 (Appendix), London, 1927, стр. 640.

кивает прямолинейность распространения света. Этот опытный факт, в конце концов, выкристаллизовывается в следующее важное положение, которое является «фундаментальной теоремой» оптики: «Связь между освещенным и освещающим телом или между рассматриваемым объектом и воспринимающим глазом осуществляется посредством постепенного, но очень быстрого распространения некоторого предмета или влияния, или состояния, называемого светом, от светящихся или видимых тел вдоль математических или физических линий, называемых обычно лучами и оказывающихся при самых общих условиях точно или приближенно прямыми».¹

Для объяснения законов прямолинейного распространения света были предложены две главные теории. Это—теории Ньютона и Гюйгенса. По мнению Гамильтона, обе они основываются на сравнении, аналогии. Первая сравнивает распространение света с движением частиц; применяя к ним принцип инерции, она легко объясняет факт прямолинейного распространения света. Вторая же сравнивает распространение света со звуком в воздухе и водяными волнами. По мнению Гюйгенса, «нет такой вещи в обычном смысле слова, такого тела, которое двигалось бы от солнца к земле или от видимого объекта к глазу; а состояние, движение, возмущение — были сначала в одном месте и после того в другом»². Эта теория утверждает существование эфира—некоторой среды, непрерывно заполняющей пространство. Развита и обогащенная Френелем и Юнгом, она дает как будто бы большее согласие с опытными фактами, чем теория Ньютона.

Какая же теория кажется более приемлемой Гамильтону? Он пользуется сначала корпускулярными, а затем волновыми представлениями, но не потому, что считает, что природа света действительно такова. Гамильтон рассматривает математическую оптику, не только не ставя перед собой, но даже считая вообще несущественной проблему о природе света. Сравнение с наблюдаемыми явлениями — это все, что может быть достигнуто. «Примем ли мы ньютонову или гюйгенсову, или какую-либо другую физическую теорию для объяснения законов, которые регулируют линии световой или видимой связи, мы можем рассматривать сами эти законы и свойства и отношения этих линейных траекторий света как важнейший предмет самостоятельного изучения и образовать отдельную науку, называемую часто математической оптикой»³. В одном

¹ H a m i l t o n W. R., On a General Method of Expressing the Paths of Light and of the Planets by the Coefficients of a Characteristic Function, Math. Pap., т. 1, стр. 312.

В том, что Гамильтон говорит «приближенно прямыми», можно видеть как указание на явление дифракции, так и на возможную недостаточную точность экспериментов.

² H a m i l t o n W. R., On a General Method..., Math. Pap., т. 1, стр. 313.

³ Там же, стр. 314.

письме, определяя задачи своей теории системы лучей (и, между прочим, косвенно указывая на связь ее в конечной инстанции с практическими потребностями), он пишет: «Моей целью было не открывать новые явления, не улучшать конструкции оптических инструментов, но с помощью дифференциального или флюксионного исчисления преобразовать геометрию света посредством установления единого метода для решения всех задач этой науки, выводимого из рассмотрения центрального или характеристического соотношения»¹. Для построения законов геометрической оптики достаточно одного представления о прямолинейности распространения света и принципа Ферма. Поскольку в «Теории систем лучей» рассматриваются вопросы геометрии света, постольку Гамильтон совершенно прав, когда говорит: «...для образования моего общего метода не является даже необходимым принимать какое-либо частное мнение относительно природы света»². Этот метод, как мы видим, существенно феноменологичен. Однако эта феноменологичность диктуется самим характером изучаемых проблем, давая возможность наиболее быстрого и простого их охвата; кроме того, развиваемая таким образом теория есть необходимый момент для перехода к физической оптике, имеющей дело с теми или иными гипотезами о внутренней структуре света. Однако именно то, что Гамильтон решает задачи высшей геометрической оптики, очень характерно для его общего подхода к проблемам, лежащим вне чистой математики.

То, что для Гюйгенса и Юнга являлось проблемой, для Гамильтона — исходный пункт. Они ставили себе задачу — объяснить опытный факт прямолинейного распространения света, выведя его из каких-то причин, скрытых во внутренней природе световых явлений. Гамильтон видит свою задачу не в объяснении этого факта, а в такой его формулировке, которая максимально удовлетворяла бы стремлению к единству и стройности математической схемы. Это не значит, что нельзя пользоваться вспомогательными конструкциями, вроде волновых фронтов, но не следует приписывать им реальность.

Все значение этих вспомогательных конструкций состоит в том, чтобы сделать возможной математическую формулировку наблюдаемых соотношений. В этом Гамильтон убедился еще больше, когда в третьем добавлении к своей «Теории систем лучей» показал, что построенный им общий метод геометрической оптики может быть выражен как корпускулярным, так и волновым языком, причем, независимо от принятого аспекта, весь аналитический аппарат сохраняется, и при желании все выводы могут быть истолкованы как в терминах волновой, так и в терминах корпускулярной теории.

¹ Гамильтон У. Р., Письмо к Кольриджу от 3 октября 1832 г.

² Там же.

Основные научные интересы Гамильтона в этот период его жизни концентрировались вокруг таких математических проблем, которые так или иначе были связаны с астрономией. Его оптические работы были в различной степени связаны с задачей улучшения астрономических наблюдательных средств, его динамические исследования — с задачами движения небесных тел и особенно с теорией возмущений. Он не проявлял большого интереса ни к измерительной технике астрономии, ни к отдельным вопросам этой науки. Его интересы не выходили за пределы математической разработки задач оптики и динамики. Его занятия общей теорией оптических систем связаны с проблемами изучения оптических свойств астрономических инструментов. Это видно из простого перечисления названий некоторых его работ¹.

Заглавия этих работ показывают, что Гамильтон непосредственно изучал и сам разрабатывал теорию оптических приборов. Долголетняя работа в качестве астронома Ирландии и руководителя Дублинской астрономической обсерватории непосредственно толкала Гамильтона к таким проблемам. В силу же особенностей его таланта деятельность его направлялась не по линии конструктивно-экспериментальной, а по линии теоретико-математической разработки тех или иных оптических проблем, непосредственно или в конечном счете имевших важное практическое значение. Что Гамильтон имел в виду практические интересы, видно из того, какие лучи рассматриваются им в его основной оптической работе — «Теория систем лучей». Клейн говорит по этому поводу: «При своих исследованиях систем лучей Гамильтон имел в виду прежде всего практические запросы инструментальной науки. Поэтому он оперировал исключительно с такими световыми волнами, которые исходят из отдельных точек»².

Как мы уже отмечали выше, Гамильтон считал, что дедуктивная наука должна развиваться, отправляясь от некоторого обобщения опытных данных. Это обобщение должно характеризовать некоторое наиболее общее, типичное свойство рассматриваемого круга явлений. Соотношение, которое Гамильтон кладет в основу своего исследования, — это принцип Ферма³.

«Опыт показывает, — говорит Гамильтон, — что во всех случаях, когда мы имеем дело с распространением света в каких-либо средах

¹ «On the Effect of Aberration in Prismatic Interference»; «The Auxiliary Function for Two Thin Lenses Close together in Vacuo and for a Single Thin Lens in Vacuo»; «The Aberration of an Optical Instrument of Revolution»; «Two letters to Professor Phillips on the Construction of Object Glasses»; «On the Improvement of the Double Achromatic Object Glass» и т. д.

² Klein F., Über neuere englische Arbeiten zur Mechanik, *Gesam. Mathem. Abhandl.*, т. 2, Springer, 1922, стр. 601—602, «Сборник», стр. 513—514.

³ Принцип Ферма для Гамильтона неотделим от принципа наименьшего действия и выражает одну и ту же совокупность оптических явлений.

при самых разнообразных условиях, траектория луча оказывается подчиненной одному основному соотношению. Это соотношение гласит, что путь распространения света от одной точки к другой всегда оказывается таким, что если его сравнить с другими бесконечно близкими линиями, при помощи которых могут быть соединены эти точки в мысли и в геометрии, то некоторый интеграл (или сумма), называемый часто „действие” и зависящий по определенным правилам от длины и положения траектории и среды, в которой распространяется свет, меньше, чем для любых других соседних линий¹.

Центральная идея этого метода — идея характеристической функции для каждой оптической системы лучей. Это характеристическое соотношение, различное для различных систем, таково, что геометрические свойства системы могут быть выведены из него методом, аналогичным тому, который был изобретен Декартом для алгебраического решения геометрических проблем. Все свойства оптических систем для каждой кривой или поверхности вытекают из основного соотношения. В этой теории устанавливается связь восьми величин, из которых шесть суть координаты двух переменных оптически связанных точек в пространстве, седьмая есть индекс цвета (*index of colour*) и восьмая, которую Гамильтон назвал характеристической функцией, есть «действие» между двумя переменными точками. Эта функция называется характеристической, ибо Гамильтон нашел, что в способе зависимости этой функции от семи названных выше величин заключены все свойства оптической системы. Поэтому Гамильтон говорит: «я рассматриваю как сводимые к изучению этой характеристической функции посредством... фундаментальной формулы все проблемы математической оптики, относящиеся ко всем мыслимым сочетаниям зеркал, линз, кристаллов и атмосфер»².

Гамильтон отмечает, что построить общую теорию системы лучей — это значит «обобщить изучение одной системы так, чтобы можно было, не изменяя плана, перейти к изучению других и установить общие правила и общий метод для того, чтобы гармонично связывать между собой отдельные оптические устройства»³.

Для того, чтобы решить эту задачу, надо воспользоваться новой математикой, в первую очередь аналитической геометрией Декарта. Первым применил этот метод к геометрической оптике Малюс.

¹ Hamilton W. R., On a General Method of Expressing the Paths of Light and the Planets by the Coefficients of a Characteristic Function. *Math. Pap.*, т. 1, 1935, стр. 613.

² Hamilton W. R., On a View of Mathematical Optics, *Brit. Assoc. of the Advanc. of Sc. Rep.*, 1831—1832, стр. 545—547; «*Math. Pap.*», т. 1, 1935, стр. 295—297.

³ Гамильтон У. Р., Сообщение о теории систем лучей, представленное 23. IV. 1827 г. Королевской Ирландской академии. Цит. по Graves...

Однако метод Гамильтона имеет более общий характер. Вводя одну функцию, которая полностью характеризует оптическую систему, Гамильтон указывает: «функция, которую я... положил в основу своего метода дедукции в математической оптике, представлялась в другой связи прежним авторам выражением результата весьма высокой и обширной индукции в области этой науки. Результат этот известен и обычно называется законом наименьшего действия, а иногда — принципом наименьшего времени и заключает в себе все, что было до сих пор открыто в отношении правил, определяющих форму и положение линий, по которым распространяется свет, и изменений направления этих линий, вызываемых отражением или преломлением, обычным или необычным. Некоторое количество, являющееся в одной теории действием, а в другой — временем, затрачиваемым светом при переходе от любой одной точки к любой другой, оказывается меньшим, если свет идет своим фактическим путем, а не каким-нибудь иным, или же, по крайней мере, имеет то, что на языке специалистов называется вариацией, равной нулю»¹.

Мы видим, что Гамильтон рассматривает вводимую им функцию как результат индукции в оптической науке. Эта функция охватывает всю геометрическую оптику. Но важно и другое. Гамильтон уже здесь отмечает в общем виде родство принципа Ферма и принципа наименьшего действия. Конечно, отсюда еще довольно далеко до построения такой математической схемы, в которой оптика лучей совпала бы с механикой материальной точки. Здесь еще нет ничего принципиально нового, ибо родство принципа Ферма и принципа наименьшего действия отмечалось и ранее. Лишь в последующее время, когда в разработанной Гамильтоном математической теории совпадут формы уравнений лучевой оптики и механики, возникнет то, что мы называем оптико-механической аналогией. Но уже в 1827 г. Гамильтон прекрасно осознает математическую новизну своего метода, подчеркивая, что благодаря этому методу «математическая оптика представляется... в совершенно новом виде, аналогичном тому, в каком Декарт представил применение алгебры к геометрии»².

Рассмотрим математический метод Гамильтона, с помощью которого он исследовал законы систем лучей.

Если предположить, что свет проходит через среду, оптическая плотность которой непрерывно изменяется (например земная атмосфера), то траектория луча будет кривой линией. Для определения этой линии надо согласно правилам вариационного исчисления исследовать вариацию интеграла $\int v ds$; здесь v — преломляющая

¹ Гамильтон У. Р., Сообщение о теории систем лучей... Цит. по Graves...

² Там же.

сила среды, а ds — элемент траектории; пределы интегрирования фиксированы. Имеем:

$$\begin{aligned} \delta \int (v ds) &= \int \delta (v ds) = \\ &= v \sum_i \alpha_i \delta x_i - v_0 \sum_i \alpha_{0i} \delta x_{0i} + \int \sum_i \left\{ \frac{dv}{dx_i} ds - d\left(v \frac{dx_i}{ds}\right) \right\} \delta x_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где α_i — косинусы углов, которые направления луча образуют с осями координат, α_{0i} — те же величины в начальном положении. Поскольку конечные положения фиксированы, то подынтегральные выражения в правой части (1) обращаются в нуль.

Покажем, что лучи перпендикулярны к некоторым поверхностям (поверхностям действия), для которых $\int v ds$ равен некоторой определенной величине. Лучи исходят из одной точки или поверхности перпендикулярно к ней, и потому второй член в правой части (1) исчезает.

Тогда

$$\delta \int v ds = v \sum_i \alpha_i \delta x_i. \quad (2)$$

Положим вариацию (2) равной нулю, т. е. интеграл равным некоторой постоянной величине; тогда

$$\sum_i \alpha_i \delta x_i = 0,$$

что и доказывает, что траектории искривленных лучей пересекают поверхность действия под прямым углом.

Обозначим $\int v ds = V$ для точки x_i , v ; тогда косинусы α_i определяются уравнениями

$$\alpha_i = \frac{1}{v} \frac{\partial V}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Здесь V есть характеристическая функция Гамильтона, при помощи которой можно вывести все свойства системы лучей, если нам известен вид функции v .

Появившаяся здесь функция V , определенная уравнением

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2, \quad (4)$$

и является основной характеристической функцией, которая будет фигурировать в последующих добавлениях к «Теории систем лучей». Непосредственного применения найденное соотношение в этой работе не получает. Раздел, в котором излагаются эти соображения, является последней главой. На ней заканчивается вторая часть

«Теории систем лучей». Дальнейшее развитие этих идей будет развернуто в опубликованных одно за другим трех добавлениях к этой работе.

В первом добавлении к «Теории систем лучей»¹ Гамильтон делает шаг вперед и принимает интеграл действия $\int vds$ в качестве определения функции V , которая рассматривается как функция конечных координат. Здесь снова утверждается, что все геометрические свойства оптических систем могут быть выведены аналитически из одной фундаментальной формулы. Функция V была введена еще в предыдущем мемуаре, но все ее значение не было там раскрыто. Основной результат гласит, что «коэффициенты вариаций конечных координат в вариации интеграла, называемого действием, равны коэффициентам вариаций косинусов углов, которые элемент луча образует с осями координат, в вариации некоторой однородной функции этих косинусов; эта однородная функция первого порядка равна произведению элемента луча под знаком интеграла и скорости этого элемента, определенной по эмиссионной гипотезе»².

Этот результат Гамильтон называет принципом постоянного действия. Название это выбрано им, исходя из двух соображений: во-первых, для того, чтобы «отметить его связь с известным законом наименьшего действия», и, во-вторых, «потому, что он дает непосредственно дифференциальное уравнение того важного класса поверхностей, которые согласно гипотезе колебаний называются волнами, а согласно гипотезе испускания частиц могут быть названы поверхностями постоянного действия»³. Это замечание имеет очень большое значение. Прежде всего, ясно осознаваемая Гамильтоном связь его оптического метода с принципом наименьшего действия механики указывает на большую общность, существующую между математической оптикой и механикой. Это показывает, что уже в то время Гамильтон вплотную подошел к идее оптико-механической аналогии. От представления поверхностей постоянного действия для распространяющегося в пространстве потока частиц—один шаг к картине движения материальных корпускул. Однако Гамильтон хочет быть свободным от каких бы то ни было гипотетических элементов, даже если они заключены лишь в способе выражения.

Для того чтобы совершенно освободиться от известного элемента гипотетичности, кроющегося в самом названии, Гамильтон называет в этом мемуаре принцип стационарного действия уравнением характеристической функции. Это название основано на утверждении, что «какова бы ни была природа света», интеграл $\int vds$ полностью определяет все свойства системы лучей.

¹ Напечатано в Transactions of Royal Irish Academy, т. 16, ч. 1, 1830, стр. 1—61, см. также Math. Papers, т. 1, стр. 107—145.

² Hamilton W. R., Supplement to «The Theory of Systems of Rays», Math. Papers, т. 1, стр. 107.

³ Там же.

В этой работе Гамильтон рассматривает не общий класс систем, а только систему прямых лучей¹.

После этих общих положений о всеобщем значении введенного им соотношения Гамильтон ограничивается рассмотрением однородной среды. Предварительно Гамильтон формулирует основной закон

$$\delta \int v ds = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial a_i} \delta x_i, \quad (5)$$

где x_i — координаты точки системы, a_i — косинусы углов наклон а луча, или элемента траектории к осям координат, а v — величина, которая по корпускулярной теории представляет скорость этого элемента, предполагается в общем случае функцией шести величин x_i , a_i , зависящей от природы среды и включающей также цвет света.

Частные производные $\frac{\partial v}{\partial a_i}$ получаются, если принять, что v есть однородная функция первого порядка от a_i . При этом a_i рассматриваются как три независимые переменные, хотя для их квадратов устанавливается необходимое соотношение: $\sum_{i=1}^3 a_i^2 = 1$. Наконец, определен-

ный интеграл $\int_1^2 v ds$ берется от светящегося источника до точки x_i

и вариация $\delta \int_1^2 v ds$ находится при предположении, что координаты этой точки получают бесконечно малое изменение, в то время как цвет луча остается неизменным. Для того чтобы вывести уравнение (5) из принципа наименьшего действия, воспользуемся правилами вариационного исчисления:

$$\delta \int v ds = \int (\delta v ds + v \delta ds). \quad (6)$$

По определению формы функции v имеем:

$$\delta v = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial v}{\partial a_i} \delta a_i \right),$$

а

$$v = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial v}{\partial a_i}.$$

Кроме того, по самому характеру a_i имеем:

$$\delta a_i ds + a_i \delta ds = \delta(a_i ds) = \delta dx_i = d \delta x_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

¹Prange G., Hamiltons Arbeiten zur Strahlenoptik und analytischen Mechanik, Nova Acta, Abh. d. Leop. Car. Deutsch. Akad. (Halle), Bd. 107, 1923, стр. 1.

так как

$$\alpha_i = \frac{dx_i}{ds} = x'_i.$$

И, следовательно,

$$\delta \int v ds = \int \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial x_i} \delta x_i \delta'_i \right) ds + \int \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} d \delta x_i, \quad (7)$$

потому что

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i ds + \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} \alpha_i \delta ds = \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} (\delta \alpha_i ds + \alpha_i \delta ds) = \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} d \delta x_i.$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим

$$\delta \int v ds = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_i} \delta x_i - \frac{\partial v'}{\partial \alpha_i} \delta'_i \right) + \int \sum_{i=1}^3 \delta x_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} ds - d \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} \right),$$

где штрихованные величины принадлежат нижнему пределу интегрирования и исчезают тогда, когда этот предел фиксирован.

Условие принципа наименьшего действия требует, чтобы величины, оставшиеся под знаком интеграла и стоящие в качестве коэффициентов при δx_i , исчезали. Это условие дает немедленно следующие общие уравнения луча:

$$\frac{\partial v}{\partial x} ds = d \frac{\partial v}{\partial \alpha} \quad (8)$$

и соответственно для y и β и для z и γ , откуда, отбрасывая обращаемые в нуль члены в выражении для $\delta \int v ds$, находим формулу (5), что и требовалось доказать.

Здесь уместно отметить два весьма существенных обстоятельства, прежде чем пойти дальше в рассмотрении функции v . Во-первых, два уравнения (8), очевидно, определяют третье. Во-вторых, эти уравнения непосредственно связаны с уравнениями динамики в форме Лагранжа. В самом деле, обозначив $\alpha_i = \frac{dx_i}{ds} = x'_i$, найдем,

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial v}{\partial x'_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \quad (9)$$

где $v = v(x_i, x'_i)$.

Это уравнение имеет ту же форму, что и известные уравнения динамики Лагранжа второго рода¹, которые являются необходимым условием для существования экстремума интеграла принципа Гамильтона—Остроградского.

Таким образом, уже здесь отчетливо видна связь развиваемой Гамильтоном математической теории систем лучей с механикой.

¹ Уравнения Лагранжа впервые встречаются в ранней его работе, напечатанной в *Miscellanea Taurinensia*, т. 2, 1760; см. также «Oeuvres», т. 1, стр. 411. Полученный результат, конечно, не является неожиданным по самому смыслу вариационной задачи.

В третьем добавлении теория характеристической функции достигает большой общности. Здесь v является уже функцией начальных и конечных координат и цветового индекса (chromatic index), т. е.

$$v = v(x_i, x_{0i}, \chi). \quad (10)$$

В общем случае элемент криволинейного пути

$$ds = \sqrt{\sum_i (dx_i)^2},$$

а

$$v = v(x_i, \alpha_i, \chi). \quad (10a)$$

Вариация v будет равна

$$\delta v = \sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i + \frac{\partial v}{\partial \chi} \delta \chi \quad (11)$$

и, учтя, что $\sum_i \alpha_i^2 = 1$, определим производные так, чтобы удовлетворялось условие

$$\sum_i \alpha_i \frac{\partial v}{\partial \alpha_i} = v, \quad (12)$$

т. е. v есть однородная функция первого порядка относительно α_i .

Фундаментальная задача математической оптики состоит в определении зависимости α , α_{0i} от x_i , x_{0i} и χ . Эта задача решается с помощью основного уравнения, которое Гамильтон называет законом переменного действия :

$$\delta V = \delta \int v ds = \sum_i \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_i} \delta x_i - \frac{\partial v_{0i}}{\partial \alpha_{0i}} \delta x_{0i} \right). \quad (13)$$

δV — стационарно при распространении света. Это уравнение распадается на шесть уравнений, которые дают искомую зависимость

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial \alpha_i}, \quad - \frac{\partial V}{\partial x_{0i}} = \frac{\partial v_{0i}}{\partial \alpha_{0i}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Основная идея Гамильтона состоит, таким образом, в том, что он рассматривает $V = \int v ds$ как функцию граничных точек. Другими словами, после того как значение V вычислено из $\delta V = 0$ при постоянных пределах, он рассматривает ее как функцию этих пределов. Функцию V он называет характеристической функцией, а в физике $\frac{1}{c} V = c(t - t_0)$ называют «оптическим путем», который является основным понятием в геометрической оптике.

Как кажется с первого взгляда, уравнения (14) требуют для приложения к некоторой системе сред знания формы функции V

и формы функций v и v_0 (т. е. оптических свойств конечной и начальной сред). Однако, как указывает Гамильтон, сами эти функции среды v и v_0 могут быть выведены из характеристической функции V . Гамильтон показывает, что если V есть однородная функция a_i , а для V имеем два уравнения в частных производных

$$\left. \begin{aligned} \Omega\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}, x_i, \chi\right) &= 0, \\ \Omega'\left(\frac{\partial V}{\partial x_{0i}}, x_{0i}, \chi\right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

то, обозначив $\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sigma_i$ и $-\frac{\partial V}{\partial x_{0i}} = \sigma_{0i}$, получим: $\Omega(\sigma_i, x_i, \chi) = 0$, $\Omega'(\sigma'_{0i}, x'_{0i}, \chi) = 0$ и

$$\frac{a_i}{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_i}, \quad \frac{a_{0i}}{v_0} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{0i}}, \quad (16)$$

откуда после простых преобразований найдем

$$\frac{dx_i}{dV} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_i}, \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial V} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_i}. \quad (17)$$

Родство формы уравнений (17) с уравнениями динамики очевидно: V соответствует интегралу действия Эйлера—Лагранжа уравнение (15) — уравнению живых сил, χ — некоторой функции полной энергии.

Уравнения (17) имеют форму канонических уравнений динамики и выражают постепенное перемещение поверхности $V = \text{const}$ как касательное преобразование вдоль луча.

Следовательно, развивая метод характеристической функции, мы вновь получили уравнения, имеющие форму уравнений динамики с той лишь разницей, что раньше были получены уравнения, имеющие форму уравнений Лагранжа, теперь же — канонические уравнения, введенные в динамику Гамильтоном.

С математической точки зрения переход от одной системы переменных $x, y, z, a, \beta, \gamma$ к системе $x', y', z', a', \beta', \gamma'$, или переход от одной поверхности к другой, можно рассматривать как преобразование.

Если две первоначальные поверхности касаются в какой-либо точке, то полученные из них преобразованием две поверхности также будут касаться в некоторой точке, сопоставленной первой точке. Поэтому Софус Ли и назвал это преобразование, определяемое функцией V , касательным.¹

Что же касается практического значения «принципа переменного действия», то Ф. Клейн справедливо указывает, что он «служит

¹Lie S., Die Störungstheorie und die Berührungstransformation, «Arch. of Math. of Nat. Wid.» т. 2, Kristiania, 1877, «Сборник», стр. 404—424.

не для того, чтобы дать ответ на вопрос о собственных целях, которые преследует природа в оптических процессах, но для того, чтобы ответить на вполне законный вопрос конструктора оптических приборов, как нужно искусственно сочетать эти процессы для получения возможно более совершенного прибора»¹

Раздел 26-й третьего добавления к «Теории системы лучей» Гамильтон посвятил «увязке предшествовавшего взгляда на оптику с волновой (undulatory) теорией света». Как указывает заголовок этого отдела, «величины σ , τ , ν , или

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

т. е. частные производные первого порядка характеристической функции V , взятые по текущим координатам, представляют собой в волновой теории света компоненты нормальной медленности (normal slowness) распространения волн. Фундаментальная формула (13) может быть легко объяснена и доказана согласно принципам этой теории»².

Цель этого раздела состоит в том, чтобы показать правомерность найденных результатов в волновой теории. Все прежние рассуждения базировались на принципе наименьшего действия и развивались в терминах эмиссионной гипотезы. Гамильтон хочет показать, что все аналитические результаты могут быть сохранены. Заметим, что в своем нобелевском докладе Шредингер дает следующую характеристику принципа Ферма: «Таким образом, принцип Ферма представляется просто тривиальной квинтэссенцией (разрядка Шредингера. — Л. П.) волновой теории». В волновой теории этот принцип находит свое обоснование: «только с точки зрения волновой теории принцип Ферма становится вполне понятным и перестает быть чудом»³.

С точки зрения волновой теории функция V будет временем распространения света данного цвета от источника x', y', z' до точки x, y, z через некоторую комбинацию сред, т. е.

$$V = V(x, y, z, x', y', z', \chi).$$

Если нормальная волновая скорость ω задана как функция направляющих косинусов α, β, γ нормали к волновой поверхности и $x, y,$

¹ Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I, Гостехиздат, 1937, стр. 241.

² Hamilton W. R., Third Supplement to an Essay on The Theory of Systems of Rays, «Math. Pap.», т. 1, стр. 277. «Нормальная медленность» равна обратной скорости.

³ Гейзенберг В., Шредингер Э., Дирак П., Современная квантовая механика, ОНТИ, 1934, стр. 41—60.

z, χ , то V может быть легко определено. Уравнение волны, имевшей в момент времени $t = 0$ координаты x', y', z' , будет $V(x, y, z, x', y', z', \chi) = t$.

Если эта волна проходит путь $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ за время $t + \delta t$, то

$$\sum \frac{\partial V}{\partial x} \delta x = \delta t$$

и т. д. С другой стороны очевидно, что

$$\sum \alpha \delta x = \omega \delta t,$$

а следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\alpha}{\omega}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\beta}{\omega}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\gamma}{\omega}. \quad (18)$$

Вспоминая, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ и возводя уравнения (18) в квадрат и складывая их, получим¹

$$\left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\omega}. \quad (19)$$

Выясним волновой смысл величин σ_i , которые были определены уравнениями

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sigma_i.$$

σ_i пропорциональны направляющим косинусам нормали к волне, для которой $V = \text{const}$ и которая имеет своим уравнением

$$\delta V = \sigma_i \delta x_i = 0.$$

Положим

$$\frac{1}{\sqrt{\sum \sigma_i^2}} = \omega.$$

Тогда направляющие косинусы выразятся произведением $\sigma_i \omega$, и ω будет нормальной скоростью, потому что бесконечно малое время δV , в течение которого волна распространяется по нормали на бесконечно малое расстояние δl от точки x_i до точки $x_i + \sigma_i \omega \delta l$, будет равно

$$\delta V = \sum_i \sigma_i \sigma_i \omega \delta l = \sum_i \omega \delta l (\sigma_i)^2 = \frac{\delta l}{\omega}. \quad (20)$$

Следовательно, σ_i можно назвать компонентами нормальной медленности. Отсюда легко выводится основное уравнение теории систем лучей Гамильтона.

¹ Уравнение эйконала.

Проанализируем переход от корпускулярной к волновой оптике несколько более подробно¹.

Обозначим через $V(x, y, z, x', y', z', \chi)$ время, которое требуется для волны частоты (по терминологии Гамильтона—цвета) χ , исходящей из источника (x', y', z') , чтобы достигнуть (x, y, z) . Покажем, как должна быть определена функция V , когда ω — нормальная скорость распространения волны — дана как функция α, β, γ (направляющих косинусов нормали к фронту волны), x, y, z, χ .

Эту функцию $\omega(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z, \chi)$ мы предполагаем однородной, нулевой степени относительно α, β, γ , причем $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

В корпускулярной теории для скорости v имеем $v = c/n$, где c — скорость света в пустоте, а n — коэффициент преломления данной среды, а в волновой теории $\omega = \frac{c}{n}$. Отсюда следует, что $v = c^2/\omega$, и интеграл

$$\int_0^1 v ds = \int_0^1 c^2 \frac{ds}{\omega} = \int_0^1 c^2 dt = c^2 (t_1 - t_0)$$

представляет (с точностью до постоянного множителя c^2) то время, которое необходимо для распространения волны от точки (x_0, y_0, z_0) до точки (x_1, y_1, z_1) по данному направлению.

Как уже было показано, при введении ω получим.

$$\omega \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 = 0. \quad (21)$$

Это уравнение может быть записано так:

$$\Omega \equiv \omega \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, x, y, z, \chi \right) \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 = 0. \quad (22)$$

Это уравнение в частных производных для V вместе с граничными условиями для $x = x', y = y', z = z'$ определяет V как функцию $x, y, z, x', y', z', \chi$.

Обозначив $\sigma = \frac{\partial V}{\partial x}$, $\tau = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\nu = \frac{\partial V}{\partial z}$, запишем уравнение (22) в виде

$$\Omega(\sigma, \tau, \nu, x, y, z, \chi) = 0. \quad (23)$$

$\Omega + 1$ однородно и первой степени относительно σ, τ, ν . Следовательно, так как соотношение (23) удовлетворяется тождественно

¹ См. Hamilton W. R., Math. Pap., т. 1. стр. 497—499.

для всех значений $x, y, z, x', y', z', \chi$, то :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial x'} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x'} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x'} = 0 \quad \text{и т. д.}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \quad \text{и т. д.}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \chi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \chi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \chi} + \frac{\partial \Omega}{\partial \chi} = 0. \quad (26)$$

Из уравнения (24) получим $\frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial (x, y, z)} = 0$, а следовательно, существует соотношение вида

$$\Omega' \left(-\frac{\partial V}{\partial x'}, -\frac{\partial V}{\partial y'}, -\frac{\partial V}{\partial z'}, x', y', z', \chi \right) = 0. \quad (27)$$

В волновой теории лучи могут быть лучше всего определены фазовым условием. Луч, соответствующий данному начальному волновому элементу (x', y', z')

$$p \delta x' + q \delta y' + r \delta z' = 0, \quad (28)$$

может быть определен условием, что возмущения (все некоторого определенного «цвета» χ), выходящие одновременно из всех точек (28), одновременно достигают каждой точки луча. Мы можем поэтому рассматривать (28) как элемент, все точки которого колеблются в одной фазе с частотой, соответствующей χ , и определять луч как геометрическое место точек, в которых результирующие возмущения находятся в фазе. Волновая скорость, которую мы обозначим через u , есть тогда скорость распространения определенной фазы вдоль луча. Очевидно из определения, что любая точка луча должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial V}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial V}{\partial z'} \delta z' = 0$$

для всех точек $\delta x', \delta y', \delta z'$, совместных с (28). Таким образом, в (x, y, z) луч характеризуется уравнением

$$\frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z} = p : q : r.$$

Так как согласно уравнению (28) эти величины являются постоянными, то для всех лучей, исходящих из x', y', z' , будет

$$\frac{\partial V}{\partial x'} = \text{const}, \quad \frac{\partial V}{\partial y'} = \text{const}, \quad \frac{\partial V}{\partial z'} = \text{const}. \quad (29)$$

Из уравнения $V = V(x_i, x'_i, \chi) = t$ получим

$$u(\sigma\alpha + \tau\beta + \nu\gamma) = 1 \quad (30)$$

и из (29)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial x} \alpha + \frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial y} \beta + \frac{\partial^2 V}{\partial x' \partial z} \gamma = 0 \quad \text{и т. д.} \quad (31)$$

Сравнивая (31) с (24), имеем соотношение

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} : \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} : \frac{\partial \Omega}{\partial \nu}, \quad (32)$$

которое дает α, β, γ как функции $x, y, z, x', y', z', \chi$. Из факта однородности $\Omega + 1$, а также из уравнений (30), (32) получим соотношения

$$\alpha u = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}, \quad \beta u = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, \quad \gamma u = \frac{\partial \Omega}{\partial \nu}, \quad (33)$$

которые по исключению $\sigma/\nu, \tau/\nu$ дадут u как функцию $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z, \chi$. Пусть $1/u$ будет однородной и первой степени относительно α, β, γ . Продифференцировав (33), исключив $\delta\sigma, \delta\tau, \delta\nu$ с помощью однородности $\Omega + 1$ и рассматривая $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta x, \delta y, \delta z, \delta\chi$ как произвольные (но учитывая, что $\alpha\delta\alpha + \beta\delta\beta + \gamma\delta\gamma = 0$), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{u} \right) &= \sigma, & \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{u} \right) &= \tau, & \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{u} \right) &= \nu, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \right) &= -\frac{1}{u} \frac{\partial \Omega}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{u} \right) &= -\frac{1}{u} \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{u} \right) &= -\frac{1}{u} \frac{\partial \Omega}{\partial z}, & \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{u} \right) &= -\frac{1}{u} \frac{\partial \Omega}{\partial \chi}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

По определению функции V как волново го времени очевидно, что

$$V(x, y, z, x', y', z', \chi) = \int_{x', y', z'}^{x, y, z} \bar{u}(\alpha, \beta, \gamma, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\chi}) ds, \quad (35)$$

причем интеграл берется вдоль луча.

Покажем, что лучи действительно суть экстремали этого интеграла¹. Уравнения экстремалей

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{u} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \right) = 0 \quad \text{и т. д.}, \quad (36)$$

¹ Интересные геометрические свойства экстремалей были отмечены в 1904 г. Каратеодори. Он показал, что экстремали можно рассматривать как кривые наискорейшего спуска. Теория, развитая Каратеодори, приводит к дифференциальным уравнениям теории Гамильтона—Якоби. (C a r a t h é o d o r y, Über diskontinuierliche Lösungen in der Variationsrechnung, диссертация, 1904 г.)

для луча по уравнениям (34):

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{u} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \right) &= \frac{d}{ds} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \\ &= \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{1}{u} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = \\ &= \frac{1}{u} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial v} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) = \\ &= 0 \text{ (согласно (25))}. \end{aligned} \quad (37)$$

Следовательно, лучи действительно являются экстремалими. Если мы определим

$$v(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z, \chi) = \frac{1}{u(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z, \chi)}, \quad (38)$$

тогда лучи есть экстремали $\int v ds$, и V равно $\int_{x'y'z'}^{xyz} v ds$, взятому вдоль некоторой экстремали. Таким образом, применимость гамильтонова метода к волновой теории установлена, причем v интерпретируется как обратная величина волновой скорости.

Итак, Гамильтон показал, что геометрическая оптика сводится к одному и тому же аналитическому аппарату, независимо от того, пользуемся ли мы в физической оптике волновыми или корпускулярными представлениями. Геометрическая оптика есть предельный случай физической оптики. Картины корпускулярная и волновая, вообще говоря, существенно различны, но внутри известного круга вопросов геометрических свойств оптического луча приводят к одним и тем же результатам. Луч может быть истолкован и как нормаль к некоторой волновой поверхности и как траектория потока световых частиц. Математический формализм теории и в том, и в другом случае один и тот же. Уже в этом заключена идея оптико-механической аналогии и идея синтеза волновых и корпускулярных свойств света.

Как мы видели, обобщая принцип Ферма, Гамильтон рассматривал v не только как функцию координат точки x_i и χ , но и как функцию направляющих косинусов α_i луча по отношению к некоторой особой системе осей кристалла. Это дало ему возможность подойти к задаче распространения света в двuosных кристаллах. Исследуя волновую поверхность в двuosных кристаллах, Гамильтон дал ясную картину ее геометрической формы и открыл существование четырех плоскостей, касающихся ее вдоль конических сечений, обобщив принцип Ферма на анизотропные среды.

Третье добавление к «Теории систем лучей» было представлено Гамильтоном Ирландской академии 22 октября 1832 г. В нем было теоретически предсказано существование внешней и внутренней конической рефракции. Гамильтон немедленно по получении этого

результата написал своему другу Г. Ллойд, прося его осуществить соответствующие опыты. После больших затруднений и неудач Ллойд удалось обнаружить предсказанные Гамильтоном явления. 14 декабря 1832 года Ллойд сообщил Гамильтону запиской, что он, наконец, нашел коническую рефракцию на кристаллах арагонита.

Работы Гамильтона по теории систем лучей остались мало известными на континенте. Одной из основных причин этого является то, что «Transactions» Ирландской академии в Германии, Франции и России являлся редким и мало доступным журналом. Неумелая и запутанная форма изложения этих работ Гамильтона также не способствовала их распространению. Только постепенно идеи, заключенные в этих работах Гамильтона, становятся известными. В Англии Максвелл¹, а в Германии Брунс² и Ф. Клейн³ в той или иной степени, в связи с работами Гамильтона, продолжали развивать это направление и впоследствии методы, созданные Гамильтоном, нашли широкое применение в геометрической оптике и теории оптических приборов.

Прежде всего, в виде частного примера так называемой теоремы Бельтрами—Липшица рассмотрим световые лучи в оптически изотропной, но неоднородной среде с коэффициентом преломления $n(x, y, z)$, меняющимся от точки к точке. Световые лучи тождественны с геодезическими линиями метрического многообразия, имеющего линейным элементом $ds_1 = nds$, где ds — обыкновенный линейный элемент евклидова пространства, nds — не что иное, как элемент времени dt , который требуется свету, чтобы пройти элемент пути ds . Отсюда: световые лучи, которые в заданный момент выходят из заданной поверхности A в направлении, ортогональном к ней, или, в частности, из единственного центра, остаются всегда ортогональными к поверхности $t = \text{const}$, каков бы ни был показатель преломления, т. е. какова бы ни была неоднородность среды. Эти поверхности, представляющие собой геометрические места точек, к которым свет приходит за один и тот же промежуток времени, образуют так называемые волновые поверхности.

Важный предельный случай имеет место тогда, когда n меняется внезапно при переходе через некоторую поверхность a , оставаясь приблизительно постоянным, но имея разные значения с одной и

¹ Maxwell J. K., On the General Laws of Optical Instruments, «Sci. Pap.» 6, Cambridge, 1890, стр. 271—286; его же, On Hamilton's Characteristic Function for a Narrow Beam of Light, стр. 381—391; его же, On the Relation of Geometrical Optics to Other Parts of Mathematics and Physics, стр. 391—393; его же, On the Application of Hamilton's Characteristic Function to the Theory of an Optical Instrument Symmetrical about its Axis, стр. 439—445.

² Bruns H., Das Eikonal, «Abh. d. Mathem.—Phys. Kl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.», т. 1, Leipzig, 1895, стр. 325 и след.

³ Klein F., Über das Brunssche Eikonal, «Zeitschr. f. Mathem. u. Phys.», 46, 1901, стр. 372—375; Über neuere englische Arbeiten zur Mechanik, «Gesam. Mathem. Abh.», т. 2, стр. 601—602.

другой стороны от этой поверхности. Рассмотрение этого случая приводит к теореме Малюса—Дюпена: если пучок световых лучей, выходящих из некоторого центра или, вообще, нормальных к заданной поверхности, подвергается какому угодно числу преломлений, то пучок лучей, выходящих из последней поверхности, будет по-прежнему состоять из нормалей к некоторому семейству поверхностей.

Особенно важный шаг в развитии основ обобщенной геометрической оптики сделал Г. Брунс (1848—1919) в 1895 г. в работе «Das Eikonal»¹.

Брунс поставил перед собой задачу развить в общем виде теорию оптических инструментов. Обычно «представления геометрической оптики... исходят в большинстве случаев с самого начала из того, чтобы построить теорию системы линз»². Такое ограничение вытекает из практических потребностей инструментальной оптики, так как линзовые инструменты представляют собой важнейшее и труднейшее изделие оптической техники. Однако при таком построении геометрической оптики остается скрытым, не выделенным, основной фундамент, на котором воздвигается здание этой науки; кроме того, во многих случаях теряется необходимая общность заключений и формулировок. Если попытаться представить ход рассуждений в этой области, то надо выделить, как это впервые было сделано Аббе, «логически необходимые и достаточные предпосылки»³ этой науки. Если проделать это исследование, то совокупность общих положений геометрической оптики, о которых идет речь в теории оптических изображений, «может быть до известной степени сведена к простому выражению: объект и изображение коллинеарны»⁴.

Это положение дает основание для введения некоторой функции E , которая объединяет с общей точки зрения проблемы геометрической оптики.

Эйконал E есть в общем случае функция шести переменных $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Если x_1, y_1, z_1 даны, и известно начальное направление луча из уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -nm_1, \quad \frac{\partial E}{\partial y_1} = -np_1, \quad \frac{\partial E}{\partial z_1} = -nq_1,$$

где n — коэффициент преломления среды, m, p, q — направляющие косинусы луча, то всегда можно определить координаты конечной точки x_2, y_2, z_2 . Таким образом, эйконал определяет оптическое изображение.

¹ Bruns H., Abh. d. math.-phys. Classe d. Königl. Sachs. Gesellsch. d. Wissensch., т. 21, Leipzig, 1895.

² Bruns H., Das Eikonal..., стр. 325.

³ Там же.

⁴ Там же, стр. 327.

Лучше всего можно уяснить себе роль, которую играет эйконал в геометрической оптике, путем сравнения «с другим отделом прикладной математики»¹, а именно с механикой в гамильтоновой форме. В механике принцип Гамильтона играет «привилегированную» роль, которая основывается на том, что он позволяет с общей точки зрения охватить все проблемы механики. Аналогичную роль играет «понятие эйконала в гораздо более узкой области геометрической оптики. Оно (понятие эйконала — Л. П.) дает для обобщенного рассмотрения общих вопросов простейшую математическую форму вычисления. Само собой разумеется, что при этом затруднения, которые представляет какая-либо частная задача, пока еще должны преодолеваться особыми, рассчитанными на данный случай вспомогательными средствами»².

Эта аналогия приобретает особый интерес, если вспомнить, что динамика Гамильтона находится в глубокой и тесной связи с его же исследованиями в области геометрической оптики. На эту сторону дела и обратил свое внимание Ф. Клейн, который аналитически установил, что эйконал равен характеристической функции Гамильтона для некоторого частного случая³.

Заметим, однако, что для лучей невозможно ввести функцию, аналогичную функции Лагранжа для частиц. В самом деле, так как

$$L = p \frac{\partial H}{\partial p} - H,$$

то, заменяя H через частоту ω , а импульс волновым вектором k , найдем, что в оптике функция Лагранжа будет иметь вид

$$L_{\text{опт}} = k \frac{\partial \omega}{\partial k} - \omega = 0,$$

так как $\omega = ck$. Впрочем, невозможность введения функции Лагранжа видна и из того факта, что распространение лучей аналогично движению частиц с нулевой массой.

В примечании к переизданию указанной заметки в своем собрании сочинений Клейн замечает, что оптика, о которой идет здесь речь, есть оптика, имеющая дело с понятием лучей. Это означает исключение явлений дифракции. Оптика лучей основана на уравнении, имеющем в прямоугольных координатах вид

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{u^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2;$$

оно является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка второй степени. В физической оптике,

¹ Bruns H., Das Eikonal..., стр. 327.

² Там же.

³ Klein F., Über das Brunssche Eikonal. Ztschr. f. mathem. Physik, 46, 1901.

охватывающей явления интерференции и дифракции, основным будет уравнение

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right) = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

которое является дифференциальным уравнением второго порядка первой степени. Различие между этими фундаментальными уравнениями, таким образом, весьма велико. Однако, как известно, последнее уравнение переходит в первое в предельном случае бесконечно малой длины волны, выражая тем самым переход физической оптики в геометрическую.

Этот переход был прекрасно показан в 1911 г. А. Зоммерфельдом и И. Рунге¹, которые исходили при этом из одной идеи П. Дебая (род. 1884). Постановка задачи этими авторами интересна еще в том отношении, что они сделали удачную попытку изложить известные ранее результаты геометрической оптики на языке векторного анализа. Применение векторного анализа к проблемам геометрической оптики дало возможность рассматривать ее под углом зрения картины физического поля. Векториальная формулировка может облегчить физическую интерпретацию аналитических соотношений путем обычной аналогии с гидродинамикой, к которой, собственно говоря, обычно и сводится истолкование физического смысла векторных уравнений, будут ли то уравнения электродинамики или какой-либо другой области физики. Не останавливаясь на вопросе о пределах такой аналогии и ее связи с формой и содержанием физических процессов, укажем, что она может, во всяком случае, как показала история науки, открыть известные возможности для более глубокого рассмотрения исследуемых проблем.

Работа Зоммерфельда и Рунге интересна еще в том отношении, что в векторной формулировке основные свойства систем лучей получают чрезвычайно отчетливое выражение.

Рассматривая световой луч в однородной среде с геометрической точки зрения, мы определяем его как пучок прямых линий, при помощи которых можно в каждой точке пространства построить нормальные поверхности. Попытаемся выразить это условие прямолинейности и существования нормальных поверхностей на языке векторного исчисления. В этом состоит поставленная Зоммерфельдом и Рунге² задача. Решение основывается на том, что в направлении светового луча вводится в каждой точке единичный вектор $\mathbf{A}$. Так как луч есть линия тока $\mathbf{A}$, то условие прямолинейности требует, чтобы кривизна была равна нулю.

¹ Sommerfeld A. u. Runge J., Anwendung der Vectorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik. Annalen d. Physik, 4. Folge, т. 35, 1911, стр. 277—299.

² Там же, стр. 277.

Рассмотрим сначала случай произвольной кривизны. Длина вектора $\mathbf{A}$ постоянно равна единице; всякий бесконечно малый вектор $d\mathbf{A}$ перпендикулярен к $\mathbf{A}$ и равен изменению угла между соседними векторами $\mathbf{A}$. Обозначим элемент траектории через ds ; тогда кривизна, или изменение направления на единице длины, будет равна $\frac{d\mathbf{A}}{ds}$ и в случае прямолинейного луча должно быть

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = 0.$$

Введем компоненты:

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Очевидно, что $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ — не что иное, как A_x , A_y , A_z и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = A_x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}. \quad (\text{A})$$

А так как $|\mathbf{A}|^2 = 1$, то для каждого направления

$$\frac{1}{2} \text{grad} |\mathbf{A}|^2 = 0 = A_x \text{grad} A_x + A_y \text{grad} A_y + A_z \text{grad} A_z. \quad (\text{B})$$

Вычитая уравнение (A) из (B), получим следующее соотношение:

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = A_x \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \text{grad} A_x \right) + A_y \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - \text{grad} A_y \right) + A_z \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} - \text{grad} A_z \right)$$

Рассмотрим теперь x -компонент этого векторного уравнения, т. е.

$$A = A_x, \quad \text{grad} = \frac{\partial}{\partial x}.$$

В этом случае первый член последнего уравнения обращается в нуль; выражение внутри скобок второго члена дает

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -\text{rot}_z \mathbf{A}$$

и выражение внутри скобок третьего члена —

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \text{rot}_y \mathbf{A}.$$

Следовательно,

$$\frac{dA_x}{ds} = -A_y \text{rot}_z \mathbf{A} + A_z \text{rot}_y \mathbf{A} = [\text{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}]_x$$

и аналогично для A_y и A_z . Окончательно получаем

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = [\text{rot} \mathbf{A}, \mathbf{A}] = 0.$$

Итак, векториальное условие прямолинейности светового луча гласит:

$$[\text{rot } \mathbf{A}, \mathbf{A}] = 0.$$

Вектор $\mathbf{A}$ — нормальный к некоторой поверхности по направлению определяется как градиент некоторой функции φ , зависящей только от координат; отождествить $\mathbf{A}$ с $\text{grad } \varphi$ можно, умножив его на некоторую величину, зависящую также только от координат. Таким образом,

$$\lambda \mathbf{A} = \text{grad } \varphi.$$

Образуем

$$\text{rot } \lambda \mathbf{A} = \text{rot grad } \varphi = 0,$$

и

$$\text{rot } \lambda \mathbf{A} = \lambda \text{rot } \mathbf{A} - [\mathbf{A}, \text{grad } \lambda],$$

откуда

$$\lambda \text{rot } \mathbf{A} = [\mathbf{A}, \text{grad } \lambda],$$

т. е.

$$\text{rot } \mathbf{A} \perp \mathbf{A},$$

или

$$(\text{rot } \mathbf{A}, \mathbf{A}) = 0.$$

Сопоставляя два уравнения

$$[\text{rot } \mathbf{A}, \mathbf{A}] = 0 \quad \text{и} \quad (\text{rot } \mathbf{A}, \mathbf{A}) = 0,$$

видим, что они только тогда могут быть оба удовлетворены, когда

$$\text{rot } \mathbf{A} = 0,$$

так как согласно им $\text{rot } \mathbf{A}$ одновременно перпендикулярен и параллелен $\mathbf{A}$.

Итак, характеристическим условием оптической системы является исчезновение $\text{rot } \mathbf{A}$ или, иначе, отсутствие вихрей в токе $\mathbf{A}$.

Как же установить аналогичные условия векториального типа для луча в неоднородной среде? Рассмотрим этот вопрос тем более важно, что именно здесь может быть установлена прямая связь между рассмотренными выше по сути дела геометрическими условиями и физическим содержанием проблемы. Конечно, при исследовании распространения луча в неоднородной среде нельзя уже будет воспользоваться непосредственно установленными для вектора $\mathbf{A}$ соотношениями. Ведь исходным пунктом всего анализа распространения светового луча в однородной среде (влияние которой совершенно не рассматривалось, так как в пределах геометрической оптики луч «равнодушен» к специфике однородной среды) был тот факт, что этот луч прямолинеен. В случае неоднородной среды необ-

ходимо исходить из криволинейного, в общем случае, распространения светового луча. Более того: «познание неоднородной среды и ее физического влияния на световой луч должно образовать исходный пункт»¹. Для того чтобы, учитывая это обстоятельство, продвинуться дальше в исследовании вопроса, необходимо ввести некоторые новые физические понятия, отсутствовавшие при изучении луча в однородной среде. Мы будем теперь считать, что поверхности, к которым нормален световой луч, представляют собой волновые поверхности. Тогда скорость распространения света (фазовая скорость) выразится через распространение этих поверхностей. Распространение этого общего случая приведет к векториальной формулировке закона распространения криволинейного луча.

При помощи этой формулировки получаются далее теорема Малюса, закон преломления света на границе двух сред и другие общие теоремы геометрической оптики. Также легко устанавливается связь между методом лучевых векторов и эйконалом. Уравнение эйконала непосредственно вытекает из этой концепции в обычной форме

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial E}{\partial x_i} \right)^2 = n^2.$$

Это уравнение, как указал ранее Дебай, получается из дифференциального уравнения волновой оптики путем некоторого предельного перехода. Если в уравнении волновой оптики освободить ψ от множителя $e^{2\pi i v t}$, то уравнение перейдет в

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0,$$

где k — «волновое число», равное $2\pi/\lambda$, измеряемое в см^{-1} . Как же ввести эйконал в это уравнение? Для этого необходимо уточнить тот факт, что световые лучи, с которыми имеет дело геометрическая оптика, могут рассматриваться, с физической точки зрения, как «части плоской волны, протяжение которой должно быть велико по сравнению с длиной волны света».² С точки зрения волновой оптики для плоской волны имеем

$$\psi = \psi_0 e^{ik(ax + \beta y + \gamma z)},$$

где

$$k(ax + \beta y + \gamma z)$$

есть путь света вдоль направления распространения волны. Введем теперь для функции ψ другое определение, учитывая значение эйконала как величины, определяющей путь светового луча.

¹ Sommerfeld A. u. Runge J., Anwendung der Vectorrechnung, стр. 282.

² Там же, стр. 291.

Пусть

$$\psi = \psi_0 e^{-i \frac{k}{n} E},$$

причем E рассматривается здесь как функция координат, определенная так, чтобы, принимая во внимание величину k , приближенно удовлетворять волновому уравнению. Что касается ψ_0 , то эта величина, имеющая смысл амплитуды, не представляет собой в точном смысле слова постоянной величины, но является также функцией координат. Эта зависимость ψ_0 от координат такова, что ψ_0 есть медленно изменяющаяся функция, которая на пути порядка длины волны заметно не меняется.

Определим $\text{grad } \psi$

$$\text{grad } \psi = e^{i \frac{k}{n} E} \left(\frac{ik}{n} \psi_0 \text{grad } E + \text{grad } \psi_0 \right);$$

найдем далее значение $\text{div grad } \psi$:

$$\begin{aligned} \text{div grad } \psi &= \Delta \psi = \\ &= e^{i \frac{k}{n} E} \left\{ -\frac{k^2}{n^2} \psi_0 (\text{grad } E)^2 + \frac{ik}{n} \psi_0 \Delta E + 2 \frac{ik}{n} (\text{grad } \psi_0, \text{grad } E) + \Delta \psi_0 \right\}^1. \end{aligned}$$

Подставим теперь найденное значение $\Delta \psi$ в дифференциальное уравнение

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{k^2 \psi_0}{n^2} \left\{ n^2 - (\text{grad } E)^2 + \frac{in}{k} \Delta E + \frac{in}{k \psi_0} (\text{grad } \psi_0, \text{grad } E) + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{\psi_0 k^2} \Delta \psi_0 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (C)$$

так как на множитель $e^{i \frac{k}{n} E}$ уравнение сокращается.

Для того приближения, с которым геометрическая оптика рассматривает процесс распространения света, множитель $1/k$ может считаться малым. В таком случае можно пренебречь всеми членами уравнения (C), в которые этот множитель входит. Тогда все члены, стоящие в скобках, кроме первых двух, могут быть отброшены и останется

$$\frac{k^2 \psi_0}{n^2} [n^2 - (\text{grad } E)^2] = 0,$$

т. е.

$$n^2 - (\text{grad } E)^2 = 0$$

¹ В оригинале по ошибке опущен множитель 2 в третьем члене.

или в развернутом виде

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2 = n^2.$$

Это уравнение и есть уравнение эйконала. Таким образом, границы геометрической оптики определяются степенью допустимости сделанного нами пренебрежения некоторыми членами в уравнении (С). Для того чтобы еще более уточнить эти границы, рассмотрим два случая, когда это пренебрежение членами, включающими множитель $1/k$, недопустимо. Это будет иметь место в том случае, когда какой-либо из этих членов — порядка величины k . Положим, что ΔE — велик. Так как $\text{grad } E = n\mathbf{A}$, то $\Delta E = n \text{ div } \mathbf{A}$. Что же представляет собой $\text{div } \mathbf{A}$? По своему векториальному определению $\text{div } \mathbf{A}$ есть, как известно,

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\iint \mathbf{A} d\mathbf{w}}{V}.$$

В фокусной точке или поверхности $\text{div } \mathbf{A}$ очень велика, так как соседние сечения очень сильно сближены, и, следовательно, можно фокус рассматривать как источник векторного поля. В этом случае необходимо волново-теоретическое рассмотрение вопроса.

Наконец, можно предположить, что $\text{grad } \psi_0$ велик. Это означает, что ψ_0 изменяется сравнительно быстро, а не является медленно изменяющейся переменной. Такая картина будет иметь место на геометрической границе тени. В этом случае наступает дифракция, и законы геометрической оптики уже не дают удовлетворительного приближения и должны быть заменены законами волновой оптики. Здесь отчетливо показаны границы и переход между геометрической и физической оптикой.

Таким образом, геометрическая оптика была представлена в векторной форме, сближающей ее изложение с изложением гидромеханики. Это изложение позволило также отчетливо определить границы применимости геометрической оптики. Разработка методов геометрической оптики позволила применить их для рассмотрения задач электронной оптики. Электромагнитное поле ведет себя по отношению к заряженным частицам как среда, показатель преломления которой не только изменяется непрерывно от точки к точке, но зависит также от направления луча в данный момент. Для меридионального потенциала, который является в этой задаче аналогом показателя преломления, получается выражение, в которое неявно входит как направление движения, так и положение частицы в любой данный момент.

В силу этого непосредственное применение метода Гамильтона к электроннооптической задаче вполне обосновано, причем форма выражений не меняется, а лишь вводится определенное значение

показателя преломления. Применительно к электронной оптике метод Гамильтона был развит Глезером.¹

Глезер принимает за аксиому принцип Ферма и выводит из него уравнение Гамильтона—Якоби, т. е. решает задачу, обратную той, с которой приходится иметь дело в волновой механике.

Пользуясь представлениями, основанными на оптико-механической аналогии Гамильтона, Функ² развил электродинамическую теорию электронных линз, аналогичную волновой теории Глезера. Воспользовавшись теми же принципами, Грей³ вывел форму поля, дающего минимальную абберацию.

Найдем теперь, следуя Глезеру, выражение для точечной характеристической функции Гамильтона и выведем основные уравнения геометрической электронной оптики.

Имеем согласно принципу Ферма

$$\delta I = \delta \int n ds = 0.$$

Исследуем с его помощью траектории заряженных частиц в электромагнитном поле. Пусть n показатель преломления поля, причем

$$n = n\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right);$$

для оптической длины пути получим $\left(x' = \frac{dx}{ds} \text{ и т. д.}\right)$:

$$I = \int_{s_1}^{s_2} n(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}} ds = \int_{s_1}^{s_2} w ds.$$

Проварьировав это выражение и выполнив обычные преобразования и интегрирование по частям, и заметив, что на границах $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, найдем уравнения траектории заряженной частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial w}{\partial x'} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

и аналогично для y и z , т. е. уравнения экстремалей $\int w ds$.

Введем значения w ; тогда получим

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial w}{\partial x'} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right) - \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad \text{и т. д.,}$$

так как $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, когда параметр представляет собой длину дуги траектории.

¹ Gläser, Zs. f. Phys., т. 83, 1933, стр. 104; т. 97, 1935, стр. 177; т. 121, 1943, стр. 647. См. также Gläser, Beiträge zur Elektronenoptik, 1937, стр. 24; Глезер В., Основы электронной оптики, ГТТИ, М., 1957.

² Funk, Mon. Math. Phys., т. 43, 1936, стр. 305.

³ Gray, Bell Syst. Techn. Journ., т. 18, 1939, стр. 1.

С помощью этих уравнений Пихт¹ вывел дифференциальные уравнения для траекторий электрона.

При рассмотрении вопросов, связанных с изменением длины пути при изменении положения точки объекта A_1 и соответствующей точки изображения A_2 , заменим функцию I характеристической функцией V , определяемой как выше

$$V = V(x_{i_1}, x_{i_2}) = \int_{A_1}^{A_2} n ds.$$

Так как функция характеризует луч, идущий от одной точки к другой, то ее называют точечной характеристической функцией Гамильтона или точечным эйконалом, который удовлетворяет уравнениям, совпадающим с уравнениями Гамильтона—Якоби, т. е. в данном случае

$$\sum \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 = n^2, \quad (39)$$

Уравнение (39) определяет изменения длины траектории в зависимости от положений точек A_1 и A_2 и поэтому позволяют найти результирующую абберацию точки изображения, выражая ее через разности длин траекторий. Надо заметить, что эта продольная абберация в направлении лучей не имеет практического значения. Обычно отыскивают поперечную абберацию в параксиальной плоскости изображения Гаусса; для этой цели можно воспользоваться функцией, зависящей от направления, а не от координат луча в точке объекта и в точке изображения. Глезер рассматривает «смешанную» характеристическую функцию W , зависящую от координат x_1, y_1, z_1 объекта и от направляющих косинусов луча в точке изображения, Пихт же пользуется «угловой» характеристической функцией T , которая является функцией только направляющих косинусов.

Будем относить все измерения к оси. z и рассмотрим только поля с вращательной симметрией. Тогда выражение для оптической длины пути примет вид

$$V = \int_{A_1}^{A_2} n \sqrt{x'^2 + y'^2 + 1} dz = \int_{A_1}^{A_2} w dz,$$

где w определяется так же, как выше. Далее Глезер пишет:

$$\delta V = \int_{A_1}^{A_2} \delta w dz = \int_{A_1}^{A_2} \left(\sum \frac{\partial w}{\partial x'} \delta x' + \sum \frac{\partial w}{\partial x} \delta x \right) dz.$$

¹ Picht, Einführung in die Theorie der Elektronenoptik, 1939.

Интегрируя, как обычно, по частям, найдем для действительного луча, идущего из точки A_1 в точку изображения A_2

$$\delta V = \left(\frac{\partial w}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y'} \delta y \right)_{A_2} - \left(\frac{\partial w}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial w}{\partial y'} \delta y \right)_{A_1}.$$

Представим это выражение в векторной форме; если ввести радиус-вектор $\mathbf{r}$ с компонентами x и y и вектор $\mathbf{n}$ нормали к поверхности V с компонентами $\sigma = \frac{\partial w}{\partial x'}$ и $\tau = \frac{\partial w}{\partial y'}$, то тогда

$$\delta V = (\mathbf{n}_2 \delta \mathbf{r}_2) - (\mathbf{n}_1 \delta \mathbf{r}_1).$$

Это выражение можно считать основным уравнением гамильтоновой оптики, так как оно в неявном виде содержит все законы образования изображения. Отсюда

$$\delta V = \delta(\mathbf{n}_2 \mathbf{r}_2) - (\mathbf{r}_2 \delta \mathbf{n}_2) - (\mathbf{n}_1 \delta \mathbf{r}_1)$$

или

$$\delta[V - (\mathbf{n}_2 \mathbf{r}_2)] = -(\mathbf{r}_2 \delta \mathbf{n}_2) - (\mathbf{n}_1 \delta \mathbf{r}_1).$$

Обозначим

$$-\delta W = (\mathbf{r}_2 \delta \mathbf{n}_2) + (\mathbf{n}_1 \delta \mathbf{r}_1) = (x_2 \delta \sigma_2 + y_2 \delta \tau_2) + (\sigma_1 \delta x_1 + \tau_1 \delta y_1),$$

т. е.

$$W = V - (\mathbf{n}_2 \mathbf{r}_2) = \int_{A_1}^{A_2} w dz - (\mathbf{n}_2 \mathbf{r}_2).$$

Заметим, что функция W называется смешанным эйконалом: $W = W(x_1, y_1, \sigma_2, \tau_2)$.

В обычной оптике угловую функцию T применяют тогда, когда падающие лучи образуют параллельный пучок, а функцию W —тогда, когда падающие лучи исходят из одной точки.

Если известна функция $W(x_1, y_1, \sigma_2, \tau_2)$, то можно найти положение точки изображения A_2 , соответствующей точке A_1 . Однако надо иметь в виду, что W есть функция направления луча в точке изображения, а не в точке объекта, а потому обычно невозможно непосредственно определить эту функцию. Вместо этого можно разложить W в ряд по возрастающим степеням независимых переменных, беря только те члены, которые определяют аберрации третьего порядка и заменяя угловые переменные более наглядными координатами луча в некоторой произвольной апертурной плоскости. В этом разложении будут только четные степени, так как нечетные исчезают в силу вращательной симметрии

$$W = W_0 + W_2 + W_4 + \dots$$

Дифференцируя этот ряд по σ_2 и τ_2 , получим координаты x_2 и y_2 с любой степенью точности, а пользуясь первыми двумя членами $W_0 + W_2$, получим точку изображения для параксиальных лучей и т. д.¹

3. Динамика Гамильтона

От разработки оптических проблем Гамильтон перешел к динамике вполне закономерно. Прежде всего внутренняя логика разработанного им метода исследования оптических проблем вела к распространению этого метода на динамику. Связь той математической формы, в которую он облек геометрическую оптику, с уравнениями механики была ему ясна еще задолго до написания мемуаров по динамике. Конечно, из того, что внутренняя логика оптических работ Гамильтона приводила к возможности расширения сферы применения его метода, не вытекает, что именно сам Гамильтон должен был проделать этот новый этап. Тот факт, что именно Гамильтон исследовал данную проблему, объясняется еще некоторыми дополнительными условиями. Прежде всего нужно указать на интересы Гамильтона в области астрономии. Будучи королевским астрономом Ирландии и профессором астрономии, он, хотя и держался в стороне от наблюдательной астрономии, но усиленно интересовался проблемами небесной механики. Чтение курса астрономии, который тогда в основном представлял собой небесную механику; вычислительные работы Дублинской обсерватории в связи с составлением навигационных таблиц; наконец, тесная связь математики, которая всегда была его основной стихией, с небесной механикой — все это толкало его занятиям в области математических методов механики. Поэтому он, исследуя различные системы притягивающихся или отталкивающихся материальных точек, предлагает свой метод прежде всего к решению классической задачи возмущенного движения.

Наконец, объединение оптики и механики в единой математической схеме вытекало из основных методологических воззрений Гамильтона; его склонность к общей и абстрактной постановке вопросов благоприятствовала этим работам.

Таким образом, как объективные причины — потребности небесной механики, так и субъективные — деятельность Гамильтона в качестве королевского астронома и профессора астрономии и внутренняя логика его работ (оптико-механическая аналогия) — определили направление работы Гамильтона в области дальнейшей разработки найденного и примененного им в оптике математического метода. Сам Гамильтон неоднократно подчеркивал тесную связь своих работ по динамике с предшествовавшими работами по теории систем

¹ Косслет В., Введение в электронную оптику, ИЛ, М., 1950.

лучей. В письме к Уэвеллу (18 марта 1834 г.) он пишет, что публикуемая им в «Philosophical Transactions» работа есть «новое приложение тех математических принципов, которые... (он) уже прилагал к оптике». В его письме к Дж. Гершелю (17 октября 1834 г.) мы читаем следующее: «... почти достигнув в оптике желаемой цели, ... я вернулся к старому проекту применения того же метода к динамике». Гамильтон не ставит себе задачей создание новых или даже видоизменение классических основных принципов механики. Его задача — иная; она точно выражена им в названии его работы: «On a General Method in Dynamics; by which the Study of the Motions of all Free Systems of Attracting or Repelling Points is Reduced to the Search and Differentiation of one Central Relation or Characteristic Function.»¹ «Об общем методе в динамике, посредством которого изучение движения всех свободных систем притягивающихся или отталкивающихся точек сводится к отысканию и дифференцированию одного центрального соотношения или характеристической функции.»

В механике Гамильтон является прямым продолжателем направления Лагранжа. Это выражается не только в его восхищении «Аналитической механикой», которую он называл «научной поэмой», и не только в том, что он работал аналитически, не используя наглядных геометрических представлений даже там, где они могли бы оказать ему непосредственную помощь. Важнейшим обстоятельством здесь является точка зрения Гамильтона на задачи исследования в области механики, сближающая его с Лагранжем: механические задачи суть класс математических задач, разработка механики есть разработка математических методов.²

Дадим характеристику отношения оптики Гамильтона к его динамике.

Функция V оптики соответствует интегралу действия в динамике, величины σ , τ , ν — компонентам импульса, $\Omega(\sigma, \tau, \nu, x, y, z, \chi) = 0$ — уравнению энергии, $\Omega\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, x, y, z, \chi\right) = 0$ — первому уравнению в частных производных Гамильтона в динамике, а χ в обоих случаях соответствует некоторой функции полной энергии.

Так как обобщение оптического метода на любое число измерений не вызывает затруднений, то мы рассмотрим связь оптической теории и динамики в общем случае и будем писать x' вместо (x, y, z) , α' вместо (α, β, γ) , σ_r вместо (σ, τ, ν) .

¹ Hamilton W. R., Philosophical Transactions Roy. Soc., London, 1834—1835; Math. Pap., т. 2, 1940; «Сборник», стр. 175—233.

² В аналитический метод Лагранжа вполне можно ввести геометрические аналогии и представления. Это можно сделать, ибо свойства уравнений Лагранжа тесно связаны со свойствами некоторой квадратичной формы точно такого же вида, какой имеет в геометрии форма, выражающая дугу кривой.

Пусть имеем динамическую систему с n координатами x^r , кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} a_{rs} \dot{x}^r \dot{x}^s \quad (40)$$

и потенциальной энергией $\varphi(x)$. Необходимо далее выбрать метрику в x -пространстве; возьмем

$$ds^2 = a_{rs} dx^r dx^s; \quad (40a)$$

так как $v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2T}$, то

$$v = \sqrt{2(E - \varphi)}. \quad (41)$$

Траектории движения будут экстремальями $\int v ds$. Таким образом, движение механической системы полностью представлено оптикой (эмиссионной теории) в среде n измерений, причем функция среды v дана уравнением (41), а E соответствует цветовому индексу χ . Следовательно, можно применить оптическую теорию Гамильтона для того, чтобы получить уравнение динамической системы.

Для того чтобы ввести v в метод Гамильтона, напомним $a^r = \frac{dx^r}{ds}$ (a —направляющие косинусы лучей). Тогда из уравнения (40) имеем

$$a_{rs} a^r a^s = 1 \quad (42)$$

и выражение (41) запишется так:

$$v = \sqrt{2(E - \varphi)} a_{rs} a^r a^s, \quad (43)$$

а так как $V = \int_{x_1}^x v ds$, то согласно методу Гамильтона

$$\sigma_r = \frac{\partial V}{\partial x^r} = \frac{\partial v}{\partial a^r} = a_{rs} a^s \sqrt{2(E - \varphi)}. \quad (44)$$

Для того, чтобы получить соотношение $\Omega = 0$, надо исключить a из этих уравнений. Обозначив a^{rs} члены детерминанта (a_{rs}) , деленные на этот детерминант, мы получим

$$a^r = \frac{a^{rs} \sigma_s}{\sqrt{2(E - \varphi)}},$$

и, следовательно,

$$1 = a_{rs} a^r a^s = \frac{a^{rs} \sigma_r \sigma_s}{2(E - \varphi)}.$$

Напишем это соотношение в виде

$$\Omega(\sigma, x, E) \equiv \sqrt{\frac{a^{rs} \sigma_r \sigma_s}{2(E - \varphi)}} - 1 = 0. \quad (45)$$

Из уравнений (41) и (44) найдем обобщенные импульсы

$$\sigma_r = a_{rs} \dot{x}_s$$

и

$$2T = v^2 = a'^s \sigma_r \sigma_s.$$

Гамильтонова функция H в динамике будет, следовательно, иметь вид

$$H(\sigma, x) = T + \varphi = \frac{1}{2} a'^s \sigma_r \sigma_s + \varphi,$$

а отсюда согласно уравнению (45)

$$\Omega(\sigma, x, E) = \sqrt{\frac{H - \varphi}{E - \varphi}} - 1; \quad (46)$$

таким образом, $\Omega = 0$ эквивалентно $H = E$.

Уравнения, полученные для Ω в оптике,

$$\frac{\alpha}{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}, \quad \frac{\beta}{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, \quad \frac{\gamma}{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \nu}$$

дают

$$\frac{a'}{v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_r} = \frac{1}{2 \sqrt{(H - \varphi)(E - \varphi)}} \frac{\partial H}{\partial \sigma_r}$$

или, положив $H = E$, $2(E - \varphi) = v^2$, получим

$$\frac{\partial H}{\partial \sigma_r} = v a' = \dot{x}_r, \quad (47)$$

т. е. первую половину уравнений движения. Другая группа уравнений, полученных для Ω в оптике,

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial \chi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \chi}$$

дает

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x'} = \frac{\partial \Omega}{\partial x'} = \frac{1}{2 \sqrt{(H - \varphi)(E - \varphi)}} \left(\frac{\partial H}{\partial x'} - \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right) + \frac{\sqrt{H - \varphi}}{2(E - \varphi)^{3/2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial H}{\partial x'},$$

если положить $H = E$. Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial x'} = -v \frac{\partial v}{\partial x'} = -v \frac{d\sigma_r}{ds} = -\dot{\sigma}' \quad (48)$$

(так как $d \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{\partial v}{\partial x} dx$), и мы получаем вторую половину уравнений движения.

Рассмотренная здесь для выяснения перехода от геометрической оптики к динамике оптическая среда является изотропной, так как v не зависит от направления. Таким образом, развитая Гамильтоном динамика использует лишь частные случаи его оптической теории.

Основная черта гамильтонова метода в оптике есть согласование минимального принципа (принципа наименьшего действия или принципа Ферма) с каноническим преобразованием (принцип Гюйгенса), и этот фундаментальный дуализм переносится и в динамику, в которой Гамильтон, начав с хорошо известного принципа наименьшего действия, исследует уравнения движения по существу говоря, с помощью бесконечно малого касательного преобразования.¹

Первой работой Гамильтона в области динамики является неопубликованная при его жизни рукопись, помеченная 1833 г. и озаглавленная «Проблема трех тел, рассматриваемая с помощью моей характеристической функции.»²

Гамильтон находил новые результаты тяжелой и трудоемкой предварительной работой. Он исследовал много примеров и часто приходил к общим результатам постепенно через ряд частных выводов. Когда же он, наконец, публиковал свои работы, то излагал их в более или менее компактной и сжатой форме, которая не только доставляла многозатруднений читателям, но и скрывала от них путь, приведший Гамильтона к тем или иным открытиям.

Так как многие из положений, найденные Гамильтоном в оптике, могут быть применены в динамике, то он начал исследовать различные частные случаи. В то время задачи динамики носили в значительной части астрономический характер, так что вполне естественно, что прежде всего Гамильтон взялся за рассмотрение знаменитой задачи трех тел. Большинство прежних попыток ограничивалось нахождением классических интегралов и приложением хорошо известных приближенных методов к частным задачам. Гамильтон тоже мало прибавил к этим результатам, хотя подход его к решению поставленной задачи был совершенно новый. Ограничившись случаем Солнца, Юпитера и Сатурна, орбиты которых он предположил лежащими в одной плоскости, он исследовал приближенную картину их движения. Однако, задаваясь, как обычно, различными частными предположениями, он не приходил к правильным результатам.

¹ Klein F., Ges. Math. Abhandlungen, т. 2, стр. 601; Lie S., Berichte Leipzig, Math.-Physik Cl., 48, 1896, стр. 131—133; Cartan E., Leçons sur les invariants intégraux, Paris, 1922, Chaps. XVIII, XIX; Lovitt E. O., Trans. Cambridge Phys. Soc. 18, 1900, стр. 256—268; Study E., Jahresbericht d. Deutsch. Math. Verein, 14, 1905, стр. 421.

² Hamilton W. R., The Mathematical Papers, т. 2, Dynamics, ed. by the R. J. A., 1940, Cambridge University Press, стр. 1—103.

Вернувшись к простейшему случаю двух тел, Гамильтон нашел тот результат, который был необходим, чтобы дополнить его теорию. Дифференцирование функции действия по постоянной закона живых сил дало ему время. С помощью интенсивной вычислительной работы он показал, что этот результат имеет общее значение для всех консервативных систем и смог приступить благодаря этому к написанию и последующему опубликованию своей первой работы по динамике.

Вот как Гамильтон пришел к этому результату. Он нашел, что

$$\frac{\delta V_1}{\delta a} = \frac{T}{2(1+m)a^2},$$

где T — время на эллиптической орбите.

«Это последнее выражение показывает, что, хотя мы должны в настоящем методе рассматривать полуоси a , a' как функции координат, тем не менее их вариации, исчезают из вариации части $mV_1 + m'V'_1$ функции V , поэтому

$$m \frac{\delta V_1}{\delta a} \delta a + m' \frac{\delta V'_1}{\delta a'} \delta a' = \frac{T}{2} \left(\frac{m \delta a}{(1+m)a^2} + \frac{m' \delta a'}{(1+m')a'^2} \right) = 0 \quad (49)$$

согласно (найденному ранее — Л. П.)

$$0 = 2h + \frac{ma^{-1}}{1+m} + \frac{m'a'^{-1}}{1+m'}, \quad (A)$$

Мы можем, следовательно, при дифференцировании $mV_1 + m'V'_1$ рассматривать a , a' как постоянные, и, следовательно, можно дифференцировать V_1 только по координатам m , а V'_1 только по координатам m' .

Мы также видим, что если предположить $m' = 0$ и таким образом свести V к mV_1 и, следовательно, к функции от $r + r_0$, χ , a , m , которая может рассматриваться как функция от $r + r_0$, χ , h , m , то мы имеем:

$$\frac{\delta V}{\delta h} = m \frac{\delta V_1}{\delta a} \frac{\delta a}{\delta h} = \frac{mT}{2(1+m)a^2} \left(\frac{\delta h}{\delta a} \right)^{-1} = T = t.$$

Это будет чрезвычайно любопытная теорема, если мы сможем найти, что в общем случае $\frac{\delta V}{\delta h} = t$.

Таким образом, мы сможем завершить наше решение задачи о трех телах или о любой другой системе при помощи функции действия V без использования какого-либо интегрирования, после того как эта функция однажды определена.

¹ h — произвольная постоянная.

В то же время, не считая m или m' исчезающе малыми, мы видим, что часть $\frac{\delta V}{\delta h}$, которая не является малой, а именно

$$m \frac{\delta V_1}{\delta h} + m' \frac{\delta V'_1}{\delta h}, \quad \text{или} \quad m \frac{\delta V_1}{\delta a} \frac{\delta a}{\delta h} + m' \frac{\delta V'_1}{\delta a'} \frac{\delta a'}{\delta h},$$

или

$$\frac{mTa^{-2}}{2(1+m)} \frac{\delta a}{\delta h} + \frac{m'Ta'^{-2}}{2(1+m')} \frac{\delta a'}{\delta h},$$

в действительности равна T на основании (А).

(8 января 1834 г.): Тримя страницами далее я даю общее доказательство справедливости этой теоремы $t = \frac{\delta V}{\delta h}$. При помощи этой теоремы интегрирование дифференциальных уравнений движения любой системы тел (включая задачу вращения) сводится к нахождению вида функции V , к дифференцированию ее по начальным координатам и по h и к определению конечных координат как функций полученных таким образом частных производных и начальных координат. Полученные таким путем выражения для конечных координат не должны содержать h .¹

Гамильтон показывает, что эта функция должна удовлетворять двум уравнениям в частных производных первого порядка. Он сравнивает найденное решение с решением рассматриваемой задачи Лапласом, определяет характеристическую функцию для эллиптического движения и устанавливает уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t, \quad (50)$$

где h — полная энергия системы («постоянная живых сил» по его терминологии). Гамильтон доказывает, что два уравнения в частных производных, которым удовлетворяет функция V , действительно дают общее решение задачи динамики, и он ищет это решение с помощью последовательных приближений.

Уже в этой работе даны многие существенные результаты, которые вошли в две его более подробные работы, опубликованные в последующие 1834—1835 годы.

В обеих работах развивается оригинальная идея Гамильтона: рассматривать входящий в принцип действия интеграл после его вычисления как функцию от его пределов. В них формула для главной функции Гамильтона V дана для случая системы точек, но для простоты мы рассмотрим случай движения одной точки. В этом случае уравнения движения будут

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (51)$$

¹ Hamilton W. R., Math. Pap., стр. 49; «Сборник», стр. 762.

причем кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m \sum \dot{x}_i^2, \quad (52)$$

а силовая функция $U = U(\dot{x}_i)$ будет функцией только координат. Начальные значения координат обозначим x_{0i} , а скорости — $\dot{x}_{0i}$. Запишем закон живых сил в форме

$$T = U + H.$$

Величина H , которая получила название гамильтониана системы, независима от времени для данного движения системы; но поскольку при переходе к другому движению изменяются начальные данные, постольку H изменяется с изменением T и U , то

$$\delta T = \delta U + \delta H.$$

Умножая на dt и интегрируя от 0 до t , приняв во внимание закон живых сил и хорошо известное уравнение

$$\sum_i m \ddot{x}_i \delta x_i = \delta U,$$

Гамильтон получает

$$\int_0^t \sum m dx_i \delta \dot{x}_i = \int_0^t \sum m d\dot{x}_i \delta x_i + \int_0^t \delta H dt$$

Обозначив

$$V = \int_0^t \sum m \dot{x}_i dx_i = \int_0^t 2 T dt, \quad (53)$$

получим по правилам вариационного исчисления:

$$\delta V = \sum m \dot{x}_i \delta x_i - \sum m \dot{x}_{0i} \delta x_{0i} + t \delta H. \quad (54)$$

Надо заметить, что координаты x_i и скорости $\dot{x}_i$ являются функциями t , x_{0i} и $\dot{x}_{0i}$, а следовательно, V есть также функция этих величин. Но если x_i есть функция от t , x_{0i} , $\dot{x}_{0i}$, то можно, наоборот, рассматривать $\dot{x}_{0i}$ как функцию t , x_i , x_{0i} и, таким образом, V будет функцией x_i , x_{0i} , t . Подобным же образом H есть функция x_i , x_{0i} , t ; исключив t , мы найдем V как функцию от x_i , x_{0i} , H . Тогда из (54) получим:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m \dot{x}_i, \quad (55a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_{0i}} = -m \dot{x}_{0i}, \quad (55b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t \quad (55c)$$

и если рассматривать V как известную функцию от $x, y, z, x_0, y_0, z_0, H$, то исключение H дает возможность получить уравнения, которые будут на самом деле интегральными уравнениями проблемы.

Функция V , как считал Гамильтон, удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям в частных производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} m \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 &= U + H, \\ \frac{1}{2} m \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_{0i}} \right)^2 &= U_0 + H_0, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

которые, если они могут быть проинтегрированы, дадут V как функцию от x_i, x_{0i}, H ; тем самым движение системы будет определено.

Гамильтон говорил: «так что, если функция V известна, то остается только исключить H из $3n + 1$ уравнений (55a), (55c) для того, чтобы получить все $3n$ первых интегралов, или из (55b) и (55c) для получения всех $3n$ конечных интегралов дифференциальных уравнений движения; в конечном счете это сводится к получению $3n$ искомых отношений между $3n$ переменными координатами и временем, включающих, следовательно, массы и $6n$ вышеупомянутых начальных данных; открытие этих соотношений явится общим решением общей проблемы динамики.»¹

Таким образом, «уравнение (54), выражающее фундаментальный закон вариации V , мы назовем уравнением, характеристической функцией или законом переменного действия».²

Гамильтон обнаружил, что «в динамике эта функция V включает в себя в виде вспомогательной величины постоянную H в известном выражении половины живой силы системы».³

Это привело его к мысли ввести новую функцию S , которая была бы связана с V и из которой была бы исключена упомянутая постоянная. В итоге «исключения, посредством которых [он]... был принужден избавиться от этой вспомогательной постоянной и ввести взамен ее время, сделали метод более обширным, чем он был».⁴ В дальнейшем функция S становится основной функцией Гамильтона. Уже в конце своей первой статьи Гамильтон помещает краткую главу под названием «General Introduction of the Time into the Expression of the Characteristic Function in any Dynamical Problem». (Введение времени в общем виде в выражение характеристической функции в любой динамической задаче.)

¹ Hamilton W. R., On a General Method in Dynamics, «Phil. Trans.», ч. 1, 1834, стр. 251—252; «Сборник», стр. 180.

² Там же, стр. 252.

³ Гамильтон У. Р., Письмо Дж. Гершелю от 17 марта 1834 г. Цит. по Graves...

⁴ Там же.

Функция S связана с функцией V уравнением

$$V = tH + S \quad (57)$$

или, что то же самое, новая функция S определена уравнением

$$S = \int_0^t (T + U) dt = \int_0^t L dt^1, \quad (58)$$

где

$$S = S(x_i, x_{0i}, t),$$

в то время как

$$V = V(x_i, x_{0i}, H).$$

Выражение для вариации S будет таково:

$$\delta S = -H \delta t + m \sum \dot{x}_i \delta x_i - m \sum \dot{x}_{0i} \delta x_{0i}, \quad (59)$$

По поводу введения функции S , которая по мысли Гамильтона должна удовлетворять двум дифференциальным уравнениям [см. ниже уравнение (60)], Якоби справедливо замечает: «Мне кажется, что этим Гамильтон представил свое прекрасное открытие в ложном свете, кроме того, что оно в то же время стало излишне усложненным и ограниченным. Здесь есть еще неудобство, заключающееся в том, что когда функцию нельзя определить посредством двух дифференциальных уравнений в частных производных, которым она одновременно удовлетворяет (не доказав, что такая функция действительно существует), теорема Гамильтона в его формулировке не может быть понята сама по себе. Если вследствие того, что он принимает именно эту, особую функцию S , произвольные постоянные становятся первоначальными значениями координат и скорос-

¹ По аналогии с термодинамикой можно было бы назвать функцию $L = T - E_{\text{пот}}$ «свободной энергией» в отличие от «полной энергии» $T + E_{\text{пот}}$.

Термин живая сила (*vis viva*) был впервые применен Лейбницем. Термин энергия был введен Томасом Юнгом (в работе «*A Treatise on Natural Philosophy, Lecture VIII*») и термин работа — Кориолисом. Гамильтон в письме к Тэту, написанном в 1862 г., говорил: «Энергия и Работа в их старом английском значении — это вещи мне знакомые. Но у меня лишь самые туманные представления о современном значении этих терминов.» (Цит. по Graves . . . , 3, стр. 150.)

Понятие механической работы возникло в тесной связи с изучением машин. «Я охотно отмечаю этот важный пример плодотворного воздействия чисто технической проблемы — в данном случае вопроса о полезном действии машин — на теоретические исследования», — пишет Ф. Клейн (Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии, ч. I, ОНТИ ГТТИ, М.—Л., 1937, стр. 109).

тей, разложенных по осям координат, то это не представляет существенного интереса, так как введение этих постоянных, как правило, усложняет форму интегральных уравнений,¹ а также не представляет возможности ввести интегральные уравнения другой формы. Возможно, что именно потому, что Гамильтон всегда имел перед глазами одновременно два дифференциальных уравнения в частных производных, он не смог применить к своей теореме те общие положения, которые Лагранж дал в Лекциях об исчислении функций для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка между тремя переменными. Вследствие этого, как я покажу в другой статье, от Гамильтона ускользнули выводы, имеющие для механики огромнейшую важность. Я замечу также, что требование, чтобы функция S , после того как она удовлетворяет первому дифференциальному уравнению в частных производных, удовлетворяла бы и второму, приводит к ограничению, которое исключает тот случай, когда силовая функция U содержит также явно время t , так как для нее второе дифференциальное уравнение в частных производных больше не действительно.²

Так как $H = F - U = F(u_i, \eta_i) - U(\eta_i)$, то главная функция S должна удовлетворять двум дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка следующей формы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + F\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_i}, \eta_i\right) &= U(\eta_i), \\ \frac{\partial S}{\partial t} + F\left(\frac{\partial S}{\partial e_i}, e_i\right) &= U(e_i). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Обратно, если форма функции S известна, то из нее может быть выведен вид уравнений (60) посредством исключения величин η_i или e_i в выражениях ее частных производных; и, таким образом, мы возвратимся от функции S к функциям F и U и, следовательно, к выражению H и уравнениям движения Гамильтона. В целом ряде случаев именно это свойство функции S имеет основное значение. В том же случае, когда ставится задача определения функции S , для этого отнюдь не является необходимым проинтегрировать предварительно уравнения движения, чтобы получить $H = T + E_{\text{пот}}$ как функцию времени, которая, если ее проинтегрировать, дает S . Если бы приходилось идти этим путем, то ценность функции S была бы ничтожна, и построенный на ее основе метод вряд ли бы имел какое-нибудь значение. В том-то и состоит суть дела, что Гамильтону удалось показать, что эта функция имеет некоторое особое свойство.

¹ Интегральным уравнением в то время называли интеграл дифференциального уравнения.

² Jacobi C. G. J., *Gesammelte Werke*, т. IV, стр. 73—74.

Она удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка вида

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}, \eta, t\right) = 0. \quad (61)$$

Если получить решение этого уравнения (а не двух уравнений (60), как считал Гамильтон), то это будет решение всей задачи.

Собственно основную идею можно сформулировать следующим образом: если η_i будут выражены как интегралы дифференциальных уравнений через t и $2n$ произвольные постоянные η_i^0 , p_i^0 и будут введены в интеграл $\int_0^t (T + U) dt$ и результат выражен через t , η_i , η_i^0 , то полученное выражение для S будет решением дифференциального уравнения (60).

Теорема, обратная этой, есть теорема Якоби¹. Если $S(\eta_i, \eta_i^0, t)$ есть полный интеграл уравнения (61), то выражения

$$\frac{\partial S}{\partial \eta_i^0} = -p_i^0,$$

где p_i^0 — новые произвольные постоянные, будут интегралами дифференциальных уравнений движения.

Эти две теоремы представляют основу теории Гамильтона—Якоби.

Теоремы Гамильтона, с одной стороны, и Якоби — с другой, могут быть сопоставлены так: Гамильтон доказал, что если известны общие интегралы уравнений движения в канонической форме, то можно вывести полный интеграл уравнения (61), а Якоби доказал, что и, наоборот, если известен какой-либо полный интеграл уравнения (61), то можно из него вывести общий интеграл уравнений движения.

Все это построение основано на том, что канонические уравнения движения суть уравнения характеристик уравнения в частных производных первого порядка (61), определяющего S в функции от η_i , t , взятых как независимые переменные.

Для того чтобы дать геометрическую интерпретацию гамильтоновой главной функции, рассмотрим пространство $n + 2$ измерений x_r, t, V .

¹ Якоби К., Лекции по динамике, Гл. ред. общетехн. литер., М.—Л., 1936, гл. XX.

Лекции по динамике (прочитанные в зимний семестр 1842—1843 г.) К. Г. Якоби были записаны Борхардом и впервые изданы Клебшем в 1866 г. в Берлине под названием «Vorlesungen über Dynamik», а затем помещены во втором, исправленном издании: Якоби, *Gesammelte Werke, Suppl. Band*, изд. Э. Лотнера, Берлин, 1884. Русский перевод вышел в 1936 г. под ред. Н. С. Кошлякова в издании ОНТИ под названием «Лекции по динамике». Перев. О. А. Полосухиной. Якоби рассматривает «принцип наименьшего действия» в шестой и частично в седьмой лекции.

В этом многообразии уравнение $V = V(x, t)$ представляет гиперповерхность, и если V удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}, t\right) = 0, \quad (62)$$

то ее можно назвать интегральной гиперповерхностью. Если $f(x, t, a) + a_{n+1}$ есть полный интеграл (62), то

$$V = f(x, t, a) + a_{n+1}$$

есть семейство интегральных гиперповерхностей, зависящее от $n+1$ параметров $a_1, \dots, a_{n+1}$. Возьмем из этого семейства ту гиперповерхность, которая проходит через точку $x_0, t_0, 0$; условием этого будет

$$f(x_0, t_0, 0) + a_{n+1} = 0,$$

и новое семейство, зависящее от n параметров, будет

$$V = f(x, t, a) - f(x_0, t_0, a). \quad (63)$$

Огибающая этого семейства получится исключением a из (63) и из n уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial a_r} - \frac{\partial f_0}{\partial a_r} = 0.$$

Это исключение приводит к гиперповерхности

$$V = S(x, t, x_0, t_0).$$

Следовательно, если $S(x, t, x_0, t_0)$ есть главная функция Гамильтона, то гиперповерхность

$$V = S(x, t, x_0, t_0)$$

есть огибающая n -бесконечного семейства интегральных гиперповерхностей гамильтонова уравнения в частных производных, которые все проходят через точку $(x_0, t_0, 0)$.

Вариационное исчисление устанавливает эквивалентность между выражением вида $\delta \int L dt = 0$ и группой дифференциальных уравнений¹. Этот метод приложим в том случае, когда дана f — функция трех переменных и требуется определить кривую $x = x(t)$ такую, что вариация интеграла $\int f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) dt$, взятого по этой кривой, равна нулю. Искомая кривая предполагается проходящей через две закрепленные точки (x_1, t_1) , (x_2, t_2) , и интеграл берется между этими двумя точками.

¹ Carathéodory C., Variationsrechnung und die partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig, 1935.

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы кривая обладала указанным свойством, состоит в том, чтобы она удовлетворяла дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (64)$$

Пусть далее имеем несколько независимых переменных $x, y, \dots$, и пусть f есть функция от $x, y, \dots, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \dots, t$; пусть также даны две закрепленные точки $(x_1, y_1, \dots, t_1), (x_2, y_2, \dots, t_2)$, и мы должны подчинить интеграл $\int f dt$, взятый между этими точками, условию стационарности. Уравнения искомой кривой будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Если мы имеем несколько независимых $s, t, \dots$ и несколько независимых переменных $x, y, \dots$, то вопрос усложняется. Нашей целью является, начав с функции

$$f \left(x, y, \dots, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \dots, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}, \dots, s, t, \dots \right),$$

отыскать функции

$$\begin{aligned} x &= x(s, t, \dots), \\ y &= y(s, t, \dots), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

для которых интеграл

$$\int f \left(x, y, \dots, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \dots, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}, \dots, s, t, \dots \right) ds dt \dots\dots$$

стационарен по отношению к малым изменениям $x, y, \dots$. Интеграл берется по закрепленной области независимых переменных, а значения зависимых переменных на границах области рассматриваются как фиксированные. Дифференциальные уравнения этой задачи будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx}{ds} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dx}{dt} \right)} \right) + \dots - \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dy}{ds} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{dy}{dt} \right)} \right) + \dots - \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (65a)$$

.....

Для принципа Гамильтона уравнения (65), представляющие условия стационарности интеграла $\int L dt$, являются уравнениями Лагранжа движения системы¹.

Уравнения Эйлера—Лагранжа (64) выражают необходимые условия стационарности² некоторого интеграла относительно вариации переменных, входящих в его подынтегральную функцию. Если интеграл является инвариантом относительно преобразования координат, то соответствующие уравнения Эйлера—Лагранжа выражают условия, которые не могут зависеть от выбора координат, иначе говоря, уравнения Эйлера—Лагранжа являются ковариантными дифференциальными уравнениями.

Развивая далее свой метод, Гамильтон в рассматриваемой работе выводит уравнения, получившие название канонических уравнений Гамильтона.

Еще в 1809 г. Пуассон ввел функцию $\sum_i \dot{q}_i p_i - T$, рассматриваемую как функцию от q_i и p_i и вывел половину гамильтоновых уравнений³.

¹ Конечно, принцип наименьшего действия дает блестящий способ вывода уравнений Лагранжа, но в этом выводе не раскрывается истинная природа этих уравнений, заключающаяся в свойствах преобразований механических величин. Можно вывести уравнения Лагранжа, воспользовавшись тем, что при преобразовании различных механических величин координаты связаны между собой касательным преобразованием, скорости преобразуются линейно (причем коэффициенты этого преобразования в свою очередь зависят от координат), а обобщенные силы и обобщенные импульсы преобразуются контравариантно по отношению к обобщенным скоростям и ковариантны между собой. Такой вывод имеет гораздо более глубокий смысл, чем несколько искусственный, хотя и наглядный вывод уравнения Лагранжа из принципа наименьшего действия.

² Необходимо отчетливо различать стационарное значение и экстремум и ближе рассмотреть их взаимоотношение. Стационарное значение требует только равенства нулю первой вариации без какого-либо ограничения в отношении второй вариации. Экстремум требует равенства нулю первой вариации плюс добавочные условия относительно второй вариации. Более того, проблему экстремума мы рассматриваем, предполагая, что находимся внутри границ пространства конфигураций. Функция, которая не имеет экстремума внутри области, может иметь его на границе этой области. На границе смещения необратимы. Для необратимых смещений функция может иметь экстремум без того, чтобы она имела в этой точке стационарное значение. В этом случае экстремум существует без равенства нулю первой вариации.

Так, например, если шар катится по желобу, то он будет в равновесии в самой низкой точке желоба, где касательная к траектории горизонтальна. Если же остановить шар раньше с помощью колышка, то шар будет в этом случае в наинизшем доступном для него положении, хотя угол касательной не обращается в нуль и высота не имеет стационарного значения. Это условие больше не требуется, потому что шар достиг границы доступного ему конфигурационного пространства и здесь вариация положения необратима.

³ Poisson S. D., Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique, «Journ. de l'École Polytechn», т. 8. 1809, стр. 266—344.

Лагранж в 1809 г., рассматривая варьирование элементов орбит, установил систему уравнений в гамильтоновой форме, в которые вместо функции H входила пертурбационная функция R ¹.

Лагранж применил эти дифференциальные уравнения в каноническом виде в своей теории возмущений и отметил, что несмотря на то, что число их в два раза больше, чем число обычных уравнений динамики, они обладают некоторыми преимуществами.

Во втором издании «Аналитической механики»² Лагранж приводит следующие уравнения :

$$\frac{da_i}{dt} = -\frac{\partial R_i}{\partial S_i}, \quad \frac{dS_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a_i},$$

где a_i — начальные значения координат, S_i — начальные значения $\frac{\partial T}{\partial q_i} = p_i$. Это — простейший пример системы канонических элементов.

Возьмем консервативную механическую систему, имеющую n степеней свободы и находящуюся в постоянном консервативном поле сил. Ее движение может быть выражено дифференциальными уравнениями различной формы. Среди них уравнения, введенные Гамильтоном, имеют прежде всего преимущество симметрии. В гамильтоновом методе состояние механической системы с n степенями свободы определяется n координатами q_i , которые фиксируют конфигурацию системы, и n соответствующими импульсами p_i . Координаты q_i могут быть выбраны различными путями, в частном случае это могут быть декартовы координаты x, y, z , цилиндрические или сферические координаты.

В консервативном поле имеем

$$T = U + \text{const}$$

в течение действительного движения. T определяется n значениями q_i и n значениями p_i , а U — только n значениями q_i . Отсюда видно, что полная энергия системы будет выражаться некоторой комбинацией из n координат q_i и n импульсов p_i . Такое выражение полной энергии называется гамильтоновой функцией и обозначается $H(q_i, p_i)$. Построение гамильтоновой функции для данной механической системы не вызывает затруднений. Точный вид этой функции зависит, однако, от особенностей как рассматриваемой механической системы, так и поля, в котором она движется, а следовательно, и от выбора нами n координат q_i .

¹ Lagrange J., Second Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de Mécanique, dans lequel on simplifie l'application des formules générales à ses problèmes, «Mem. Inst.», 1890, стр. 343—352; Oeuvres de Lagrange, т. 6, стр. 809 и след.

² Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 1, ГТТИ, М.—Л., 1950, изд. 2-е, стр. 420—6.

Удачный выбор q_i может сильно облегчить решение задачи ; в особенности просто решается динамическая задача, если можно выбрать n координат q_i так, что H будет функцией только от p_i .

При изучении задач динамики мы исходили из уравнений

$$m_i \ddot{x}_{ik} = \frac{\partial U}{\partial x_{ik}} \quad \left(\begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n, \\ k = 1, 2, 3 \end{matrix} \right).$$

Для решения полезно выразить $3n$ декартовых координат как функции $3n$ других обобщенных координат η (Гамильтон называет их marks of position). Тогда дифференциальные уравнения движения примут замечательно общую форму, открытую Лагранжем :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad (65b)$$

где $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m \dot{x}_k^2$. Это уравнение (65a) легко доказывается, если принять во внимание, что

$$\delta U = \sum_{k=1}^3 m \ddot{x}_k \delta x_k.$$

В самом деле,

$$\frac{\partial U}{\partial \eta_i} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n m \ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n m \dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} - \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n m \dot{x}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i},$$

так как $\frac{\partial U}{\partial \eta_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \eta_i}$ и т. д.

Преобразуем наши выражения :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n m \dot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n m \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \\ \text{и} \quad \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n m \dot{x}_k \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial \eta_i} &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^n m \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \eta_i} = \frac{\partial T}{\partial \eta_i}, \end{aligned}$$

причем T здесь будет функцией $6n$ величин вида $\eta_i, \dot{\eta}_i$, получаемой, если их ввести в выражение для T , ибо

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{3n} \dot{\eta}_i \frac{\partial x}{\partial \eta_i} \quad \text{и т. д.}$$

Функция T , являющаяся однородной функцией второй степени¹

¹ В исследовании Гамильтона переход от лагранжевых уравнений к новым уравнениям существенно зависит от того, что T есть однородная функция второй степени от производных координат по времени.

Вообще же можно показать, что это ограничение не является необходимым, и аналогичные рассуждения могут быть проведены в случае, когда T есть любая функция координат и их первых производных по времени.

от $\dot{\eta}_i$, должна удовлетворять соотношению

$$2T = \sum_i \dot{\eta}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i}, \quad (66)$$

а так как $T = T(\dot{\eta}_i, \eta_i)$, то вариация функции T будет

$$\delta T = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \delta \dot{\eta}_i + \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \delta \eta_i \right).$$

Взяв вариацию выражения (66), получим

$$2\delta T = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \delta \dot{\eta}_i + \eta_i \delta \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \right),$$

а так как $\sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} \delta \dot{\eta}_i = \delta T - \sum_i \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \delta \eta_i$, то окончательно

$$\delta T = \sum_i \left(\dot{\eta}_i \delta \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial T}{\partial \eta_i} \delta \eta_i \right).$$

Положим для сокращения $\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_i} = \bar{\omega}_1, \dots, \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_{3n}} = \bar{\omega}_{3n}$ и представим T как функцию следующих переменных¹

$$T = F(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{3n}, \eta_1, \dots, \eta_{3n}).$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}_i} = \dot{\eta}_1, \dots, \frac{\partial F}{\partial \bar{\omega}_{3n}} = \dot{\eta}_{3n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial \eta_1} = -\frac{\partial T}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \eta_{3n}} = -\frac{\partial T}{\partial \eta_{3n}}.$$

Подставив полученные значения в уравнение Лагранжа (65b), найдем

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial(U - F)}{\partial \eta_i}.$$

Введя функцию H следующего вида:

$$H = F - U = F(\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{3n}, \eta_1, \dots, \eta_{3n}) - U(\eta_1, \dots, \eta_{3n}),$$

мы получаем новые дифференциальные уравнения движения системы n точек²:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\omega}_i}, \quad \frac{d\bar{\omega}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}. \quad (67)$$

¹ Величина $\bar{\omega}$ вводится потому, что она остается неизменной при отсутствии силы, в то время как обобщенная скорость может и не быть постоянной.

² Уравнения (67) являются исторически первой записью канонических уравнений механики (1835 г.)

«С этой точки зрения задача математической динамики системы n точек состоит в интегрировании системы $6n$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, связывающих $6n$ переменных η_i, ω_i и время t ; решение задачи должно состоять в определении этих $6n$ переменных как функций времени и их собственных начальных значений...»¹.

Уравнения Гамильтона² пишутся в такой форме только для консервативных систем, и в таком виде они неприменимы для случая полей, не имеющих потенциала, и в случае неголономных связей.

Интересно отметить, что Гамильтон не дал каноническим уравнениям какого-либо применения и был более заинтересован в рассмотрении одной характеристической функции и в нахождении последовательных приближений с ее помощью. Он, однако, сразу заметил, что общий метод, развитый им в динамике, может быть значительно расширен.

В физике уравнения Гамильтона в форме (67) играют первостепенную роль, в частности в статистической и квантовой механике.

Значение гамильтоновой функции H как для классической, так и для квантовой механики прекрасно выразил Дирак.

Дирак пишет: «Известно, что в некоторых предельных случаях, например, когда массы очень велики, классическая механика удачно описывает поведение механических систем. Если же мы не имеем дела с этими предельными случаями, то можно надеяться построить теорию таких же механических систем, сделав в классических уравнениях некоторые естественные обобщения и выбрав квантовые условия таким образом, чтобы они были естественным обобщением классического закона, по которому все переменные коммутируют друг с другом. Мы увидим, что таким путем возможно построить квантовую теорию отдельных механических систем, аналогичную

¹ Hamilton W. R., Second Essay on a General Method in Dynamics, Philos. Trans., 1835, стр. 98.

² К форме уравнений типа уравнений Гамильтона привела и теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Как показали Пфафф (Pfaff J., Berl. Abhandl., 1814—1815, стр. 76) и Коши (Cauchy A., Bull. Soc. Philomath, 1819, стр. 10), дифференциальные уравнения характеристик уравнения в частных производных

$$f(x_i, p_i) = 0,$$

где

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

имеют вид

$$\frac{dx_1}{\partial f} = \dots = \frac{dx_n}{\partial f} = \frac{dp_1}{-\partial f} = \dots = \frac{dp_n}{-\partial f}.$$

классической механике»¹. Как же построить уравнения движения для квантовой системы по аналогии с классической механикой? По мысли Дирака, для этого надо воспользоваться скобками Пуассона, которым соответствуют некоторые аналоги и в квантовой теории.

Дирак определяет квантовые скобки Пуассона так, чтобы и они обладали отмеченными выше свойствами классических скобок Пуассона (в первую очередь линейностью и инвариантностью при касательном преобразовании). Тогда не трудно получить для любых переменных ϑ и η

$$\begin{aligned}\vartheta_1 \eta_1 - \eta_1 \vartheta_1 &= i\hbar(\vartheta_1, \eta_1), \\ \vartheta_2 \eta_2 - \eta_2 \vartheta_2 &= i\hbar(\vartheta_2, \eta_2),\end{aligned}$$

где $\hbar$ не зависит от ϑ и η и является числом (и притом вещественным). Следовательно, для любых двух переменных квантовые скобки Пуассона (ϑ, η) определяются так:

$$\vartheta\eta - \eta\vartheta = i\hbar(\vartheta, \eta), \quad (68)$$

где $\hbar$ — универсальная постоянная с размерностью действия (т. е. произведения количества движения на длину). Такая размерность вытекает из того, что в классической механике отношение $\vartheta\eta$ к скобке Пуассона (ϑ, η) имеет размерность действия. Для согласования теории с опытом надо положить $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, где h — постоянная Планка.

«Гипотеза, согласно которой квантовые скобки Пуассона являются аналогами классических скобок Пуассона, позволяет перенести в квантовую теорию классические уравнения движения

$$\dot{q}_i = (q_i, H), \quad \dot{p}_i = (p_i, H)$$

или в общем виде

$$\dot{\vartheta} = (\vartheta, H),$$

а также любые классические уравнения, которые, могут быть написаны через посредство скобок Пуассона»².

Таким образом, заменив классические выражения $\vartheta\eta - \eta\vartheta = 0$ условием (68), мы решили задачу построения уравнений движения и квантовых условий, представляющих естественное обобщение классической механики.

Понятие «скобка Пуассона» в квантовой теории является более фундаментальным, чем в классической механике, так как в ней ее

¹ Дирак П., Основы квантовой механики, пер. с англ. М. П. Бронштейна, М.—Л., ОГИЗ, 1932, стр. 106.

² Там же, стр. 109.

можно определить без всякого отношения к каноническим переменным, а в классической теории это невозможно. По этой же причине понятие канонических переменных в квантовой теории менее важно, чем в классической.

Рассмотрев вид функции H и ту форму, которую она принимает для квантовомеханических задач, Дирак пишет: «Мы теперь в состоянии получить все, что требуется для любой механической системы, для которой известна гамильтонова функция H , выраженная через q и p и, быть может, зависящая также явно и от времени t »¹.

Таким образом, задание H полностью определяет, и притом однозначно, поведение классической системы. Что же касается соотношения функций H для классической системы и для системы квантовомеханической, то тут имеется налицо следующее важное обстоятельство. «Одной и той же классической функции Гамильтона может соответствовать, вообще говоря, несколько функций Гамильтона в квантовой механике; поэтому, если дается определенная механическая система в классической механике, то, вообще говоря, нет никакого смысла говорить о такой же самой системе в квантовой теории. Однако существуют и исключения из этого общего правила; и на практике во многих случаях в квантовой механике оказывается возможным однозначно описывать механические системы языком классической теории»².

Мы видим здесь отражение того общего факта, что, хотя микромир имеет свои собственные специфические закономерности, представляя собой качественно своеобразную форму, его специфичность не абсолютна. Микромир внутренне связан с макромиром. В известных пределах мы можем непосредственно пользоваться для изучения явлений микромира понятиями и соотношениями, полученными как обобщение макроскопического человеческого опыта. Гейзенберг указывает, что в квантовой механике «математическая схема, в конце концов, внешне похожа на классическую теорию и отличается от последней только наличием перестановочных соотношений, при помощи которых, впрочем, уравнения движения могут быть выведены из функции Гамильтона»³.

Надо заметить, что в математике уравнения того же вида, что (67), определяют касательное преобразование.

Так как нет прямого метода для интегрирования канонических уравнений, то наиболее эффективным методом для их решения является метод преобразования координат. В этом отношении канонические уравнения имеют много преимуществ по сравнению с уравнениями Лагранжа. В формализме Лагранжа основную роль

¹ Дирак П., Основы квантовой механики, ОНТИ, 1932, стр. 112.

² Там же.

³ Гейзенберг В., Шредингер Э., Дирак П., Современная квантовая механика, ГТТИ, 1934, стр. 21.

играет лагранжиан L , равный разности кинетической и потенциальной энергий, в силу чего при упрощении выражения потенциальной энергии может осложниться выражение для кинетической энергии, и наоборот. Одновременное же их упрощение представляет большие трудности.

В формализме Гамильтона дело обстоит проще, так как гамильтониан H содержит только самые переменные, а их производные в него не входят. Поэтому гамильтониан по своей математической форме схож с потенциальной энергией в лагранжевом формализме. Входящая в гамильтониан кинетическая энергия имеет вид $\sum p_i \dot{q}_i$ и не преобразуется при преобразовании координат.

То обстоятельство, что в гамильтоновы уравнения входит вдвое больше переменных, чем в уравнения Лагранжа, позволяет за этот счет расширить область возможных преобразований. Наконец, в формализме Лагранжа нет единого систематического метода упрощения лагранжиана. В гамильтоновом же формализме существует единый метод исключения переменных и упрощения гамильтониана. Этот метод сводит проблему интеграции к отысканию некоторой фундаментальной функции, являющейся производящей функцией некоторого преобразования.

При применении метода преобразования координат мы уже не рассматриваем q_i и p_i как функции времени t , как это делается при непосредственном интегрировании. Эти величины q_i и p_i при таком преобразовании рассматриваются просто как некоторые переменные. Они являются координатами фазового пространства и этим исчерпывается их содержание. Другими словами, специфика проблемы механического движения, заключенная в дифференциальных уравнениях механики, полностью исключена. Существенным является лишь сохранение формы канонических уравнений при рассматриваемых преобразованиях. Так как канонические уравнения сохраняют свою форму, если сохраняется дифференциальная форма подинтегрального выражения интеграла $\int (\sum p_i \dot{q}_i - L) dt$, то рассматриваемые преобразования характеризуются инвариантностью некоторой дифференциальной формы. Эти преобразования, сохраняющие форму канонических уравнений, называются каноническими.

Этот результат представляет собой обобщение того положения, что путь светового луча определяется постепенным продвижением волнового фронта. Так как касательные преобразования образуют группу, то это предложение является основанием теории преобразований механики системы.

Разработанный Гамильтоном метод был применен им к различным задачам астрономии (небесной механики). Он подробно рассматривает движение различных систем материальных точек под влиянием сил, действующих между ними и изменяющихся в зависимости от расстояния. Наибольшее внимание он уделяет задаче исследования движения при действии возмущающих сил. Эта про-

блема возмущенного движения есть основная проблема движения планет, и решение ее есть центральная задача небесной механики. Непосредственная цель, которую ставил перед собой Гамильтон, состояла в интегрировании уравнений движения и нахождении удобного метода решения астрономической задачи возмущенного движения.

Первый мемуар Гамильтона содержит приложения его метода к задаче двух тел и к задаче трех или большего числа тел.

Гамильтон занимается исследованием приближенного интегрирования уравнений движений посредством разделения функции V на две части, одна из которых зависит только от главных сил, другая — от сил, возмущающих движение. Однако, как указал Кэли, «метод, предложенный (Гамильтоном. — Л. П.) для этой цели, включает рассмотрение вариаций произвольных постоянных, но не легко получить при помощи него точные результаты или выяснить его отношение к результатам Лагранжа и Пуассона»¹. То же самое приложимо и к ряду разделов второй работы Гамильтона по динамике. Лишь в § 13 второго мемуара развивается теория, которая «дает формулы для вариации элементов, более схожие с уже известными формулами»².

В этом втором мемуаре Гамильтон приложил свои новые функции S и H к проблеме трех и большего числа тел, причем движение всех тел зависело лишь от одной возмущающей функции³.

Функция H полагается состоящей из двух частей, одна из которых рассматривается как возмущающая функция. В силу этого уравнения движения принимают следующий вид :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial \omega} + \frac{\partial H_2}{\partial \omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\partial H_1}{\partial \eta} - \frac{\partial H_2}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Членом, в который входит H_2 , можно в первом приближении пренебречь. Интегралы результирующих уравнений представятся тогда в форме, введенной Пуассоном, в которой постоянные $a, b, \dots$ рассматриваются как выраженные через t и две группы переменных $\eta, \dots$ и $\omega, \dots$. Этот интеграл посредством вариации элементов распространяется на полные уравнения.

¹ Cayley A., Report on the recent Progress of Theoretical Dynamics, Report of the Twenty-Seventh Meeting of the British Association for the Advancement of Science, London, 1858, стр. 13.

² Hamilton W. R., Second Essay on a General Method in Dynamics, Philos. Trans., 1835, стр. 107; «Сборник», стр. 246.

³ В исследовании Гамильтона имеется центральное тело, к которому относятся все другие тела. Кэли указывает, что метод Гамильтона был применен М. Нбуе'ем в его «Thèse d'Astronomie : Application de la méthode de M. Hamilton au calcul des perturbations de Jupiter», Paris, 1855. К сожалению, мне не удалось достать этой работы.

Гамильтон получает для $\frac{da}{dt}$ такое же выражение, какое было получено Пуассоном:

$$\frac{da}{dt} = (a, b) \frac{\partial H_2}{\partial b},$$

где

$$(a, b) = \frac{\partial(a, b)}{\partial(\eta, \omega)} + \dots \quad \text{а} \quad \frac{\partial(a, b)}{\partial(\eta, \omega)} = \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{\partial b}{\partial \omega} - \frac{\partial b}{\partial \eta} \frac{\partial a}{\partial \omega}.$$

Наоборот, $\frac{\partial H_2}{\partial a}$ в функции $\frac{da}{dt}$ может быть выражено в форме, аналогичной форме Лагранжа.

Символ (a, b) имеет тот же смысл, что и в теории Пуассона и Лагранжа. Это видно из того, что как в теориях Пуассона и Лагранжа, так и в этом методе Гамильтона производная от (a, b) по времени исчезает, что означает, что (a, b) есть функция только элементов, являясь инвариантом относительно времени.

В небесной механике методы Гамильтона сыграли свою исторически важную роль и имеют большое значение также и в настоящее время¹. Задачей истории небесной механики является исследование и анализ их развития.

Таково богатое математическое содержание развитого Гамильтоном общего метода рассмотрения проблем механики, который получил впоследствии многочисленные применения².

Якоби в 1837 г. рассмотрел общее понятие канонических переменных. Он исследовал вопрос о том, каковы самые общие канонические подстановки, т. е. те подстановки

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \varphi_i(q_{0i}, p_{0i}), \\ q_i &= \psi_i(q_{0i}, p_{0i}), \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

которые переводят канонические уравнения снова в канонические. Эта проблема с чисто геометрической точки зрения была совершенно иначе разработана Софусом Ли в так называемой теории касательных преобразований.

¹ Wintner A., The analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton—London, 1941; Chazy J. Mécanique céleste, Paris, 1953.

² В качестве важного применения вариационных принципов и методов укажем на так называемые прямые методы в математической физике. В математической физике прямыми методами называют методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений, сводящие такие задачи к системам алгебраических уравнений. См. Михлин С. Г., Прямые методы в математической физике, ГТТИ, М.—Л., 1950, Соболев С. Л., Уравнения математической физики, ГТТИ, М.—Л., 1947. Приложения вариационных методов см. также, например, Пругачев Я. А., Вариационные методы в строительной механике, ГТТИ, М.—Л., 1948, Демков Ю. Н., Вариационные методы в теории столкновений, Физматгиз, 1953 и др.

Якоби дал первое решение поставленной задачи, показав, что величины q_i , p_i всегда связаны с q_{0i} , p_{0i} каноническим преобразованием, если можно положить

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_{0i}} = -p_{0i}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial p_{0i}} = p_i, \quad (71)$$

где Ω произвольная дифференцируемая функция q_{0i} , q_i . Эти формулы имеют такой же вид, что и формулы для гамильтоновых функций V и S . Очевидно, что именно формулы Гамильтона привели Якоби к его исследованиям.

Этот метод можно обобщить на все подобного рода канонические преобразования. Оказалось, что предпочтительнее не определять q_i , p_i явно, а установить те дифференциальные уравнения, которым они должны удовлетворять. Следуя Пуассону, Шеринг и Ли в 1873 г. ввели символические скобки. Определим

$$[U, V] = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial q_{0i}} \frac{\partial V}{\partial p_{0i}} - \frac{\partial U}{\partial p_{0i}} \frac{\partial V}{\partial q_{0i}} \right); \quad (72)$$

тогда условием того, что функции q_i , p_i определяют каноническую систему преобразований, будет

$$\begin{aligned} [p_i, p_j] &= 0, \\ [q_i, q_j] &= 0, \\ [q_i, p_j] &= \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (73)$$

Отсюда легко получается теорема Лиувилля о том, что функциональный определитель канонического преобразования равен $+1$ или -1 .

Как же Гамильтон определяет место своего принципа и связанного с ним метода в системе физических наук? Ведь он недвусмысленно отказался признать космологическое значение принципа наименьшего действия. В самом деле, Гамильтон пишет:

«Хотя закон наименьшего действия стал, таким образом, в ряд высочайших теорем физики, все же его притязания на космологическую необходимость, на основе экономии во Вселенной, в настоящее время обычно отвергаются. Среди других причин это вытекает и из того, что величина, которая претендует на то, чтобы быть сэкономленной, в действительности часто расточительно расходуется»¹.

¹ Hamilton W. R., On a General Method of Expressing the Paths of Light and of the Planets by the Coefficients of a Characteristic Function, «Math. Pap.», т. 1, стр. 317.

Гамильтон видит в принципе средство «преобразовать в широком смысле слова всю динамику»¹ и считает, что сфера его применения значительно шире, чем только оптика и динамика. Эта широкая программа им самим осуществляется только частично, его задача — набросать основной план, развитие которого — дело будущего. Речь идет о новом построении физики, как он сам говорит в одном письме :

«Что касается заглавия — „О новом методе в динамике“, — признаюсь, что при точном истолковании оно означает : исключение оптики из моей исследовательской работы и включение гидростатики со многими другими отделами физической науки, лишь отдаленно связанными с астрономией. Но таково было мое намерение, ибо я надеюсь и стремлюсь преобразовать в широком смысле слова всю динамику при помощи теории характеристической функции или закона центрального отношения ; однако в настоящее время, я, конечно, не претендую на большее, как только набросать точный план, по которому можно будет выполнить эту великую задачу. С другой стороны, я сейчас не предлагаю Королевскому обществу такой обширной работы, какой она была бы по необходимости, в которой бы динамика и оптика рассматривались заведомо как естественные следствия из одного общего принципа. Пока я удовлетворился тем, что предложил одну дисциплину Ирландии, а другую — Англии, не теряя вместе с каждой надежды на их будущий союз, осуществленный практически. Несколько заключительных фраз из моего вступления к «Динамике», написанных до прибытия Вашего письма, но еще не отосланных и пока находящихся под сомнением, могут служить объяснением к только что сказанному и материалом для Вашей будущей критики. В настоящее время было бы безрассудно пытаться приступить к такой обширной теме, обнимающей в действительности наиболее важные физические явления, хотя в этом случае метод настоящей работы мог бы распространиться на вопросы, касающиеся вращений, вибраций и толчков твердых и жидких тел, и на другие важные исследования и предназначался бы для употребления в будущем ; но здесь он будет применен лишь к проблеме орбит и пертурбаций планет, и то лишь настолько, чтобы сделать принцип сам собою понятным. Уместно отметить, что этот динамический принцип является только другой формой идеи, примененной уже мной к оптике в „Теории систем лучей“, и что намерение применить ее к движениям систем тел было объявлено при публикации этой теории. Алгебраический метод, который, таким образом, служил примером в „Оптике“ и „Динамике“, кажется, не ограничивается двумя этими дисциплинами и допускает более широкую сферу применения. Заключающееся в методе особое соединение законов вариаций с законами частных дифференциалов может

¹ Гамильтон У. Р., Письмо к дяде Джемсу от 12 марта 1834 г. Цит. по Graves . . .

образовать в будущем, когда он разовьется трудами математиков, отдельную ветвь анализа»¹.

Оценивая значение своей работы об общем методе динамики, Гамильтон прежде всего подчеркивает, что благодаря найденной им новой математической форме динамика и оптика будут точно рассмотрены как следствия общего принципа. Для него основной целью является установление единой схемы, в которой бы из некоторого основного соотношения выводились все законы механики и оптики.

Итак, Гамильтон придает своему методу основное значение. Он считает, что он должен охватить всю физику. Но это универсальное значение разработанного им метода основывается на его математической форме. Единство и простота, симметрия, достигаемая таким путем, — вот главные и определяющие преимущества нового метода, по мнению Гамильтона.

Гамильтон придает своей работе специфически математический характер. Не только в самих статьях, опубликованных в «*Philosophical Transactions*», он избегает каких-либо принципиальных вопросов, но и в письме к де Моргану оценивает свою работу как лежащую в области математической разработки задач динамики. Несмотря на резко выраженные интересы к общим вопросам теории познания, Гамильтон пишет свои статьи максимально формально².

Он сам характеризует свои исследования так:

«Мои собственные исследования по динамике лежат в совершенно ином направлении, они приводят меня к системе строгих и общих выражений для интегралов дифференциальных уравнений движения системы материальных точек»³.

Так были заложены основы аналитической механики Гамильтона, ставшие в дальнейшем основой динамики в смысле Гамильтона—Якоби, так как замечательный немецкий математик Якоби (1804—1851) блестяще развил, уточнил и значительно обогатил идеи Гамильтона в области интегрирования дифференциальных уравнений движения.

4. Динамика Якоби

Карл Густав Якоб Якоби родился в 1804 г. в семье потсдамского банкира. Он окончил Берлинский университет и в 1825 г. защитил диссертацию. С 1826 г. он в течение 17-ти лет работает в Кенигсберге. Вступление его в факультет Кенигсбергского университета натолкнулось на затруднения, так как каждому из членов он успел сказать что-нибудь неприятное. Однако все же победило

¹ Гамильтон У. Р., Письмо к дяде Джемсу от 12 марта 1834 г.

² «*Unmetaphysisch*», как он выражается в письме к Уэвеллу.

³ Гамильтон У. Р., Письмо к де Моргану от 18 февраля 1842 г. Цит. по Graves...

очевидное значение его научных трудов. Он целиком отдался кипучей и разносторонней деятельности, которая подорвала его силы, и в 1843 г. он был вынужден в течение полутора лет отдыхать в Италии, а затем принять предложение в Берлине, где ему была предоставлена чисто академическая должность без твердых преподавательских обязанностей. Несмотря на спокойную жизнь, нарушаемую лишь внешними событиями, он уже никогда не достигал



К. ЯКОБИ (1804—1851)

прежнего творческого напряжения. Сначала он пользовался хорошим отношением прусского короля, но в 1848 г. явно склонился на сторону революции. После поражения революции 1848 г. он оставался для прусской монархии подозрительным человеком. Умер Якоби 18 февраля 1851 г. в Блаттерне.

Разностороннее математическое творчество Якоби, его блестящий педагогический талант, знаменитый и внушавший противникам страх сарказм позволили ему не только широко воздействовать на современников, но и создать научную школу.

Для Якоби характерно постоянное стремление к новому, к переменам, ему не хватает спокойствия, необходимого для завершения

логически стройных построений. Недаром Якоби однажды сказал: «Господа, для гауссовой строгости у нас нет времени».

О математике Якоби заметил: «*Mathesis est scientia earum quae per se clara sunt*». (Математика принадлежит к числу тех наук, которые ясны сами по себе.)

Физическая сторона проблем аналитической механики у Якоби обеднена, так как в его изложении утрачиваются всякие следы связи оптики с механикой, всякие следы оптико-механической аналогии. Уже у Якоби она подвергается забвению, которое продлилось до следующего возрождения проблемы волново-корпускулярного дуализма в XX в. Зато Якоби не только развил теорию интегрирования дифференциальных уравнений динамики, но и нашел такую форму выражения для принципа наименьшего действия, в которой его глубокая связь с геометрией обобщенного пространства делается особенно прозрачной.

Согласно Гамильтону функция

$$V(q_i, q_{i0}, H) = \int \sqrt{(H + U) \sum \alpha_{ij} dq_i dq_j}, \quad (74)$$

где q_i — координаты консервативной системы, q_{i0} — значения независимых переменных q_i для начального положения, из которой с помощью уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial q_{0i}} = -p_{0i} \quad (75)$$

можно получить импульсы p_i, p_{0i} в силу соотношения

$$H(q_i, p_i) = T - U = h, \quad (76)$$

дважды (как функция от q_{i0} и q_i) удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\begin{aligned} H\left(q_{0i}, \frac{\partial V}{\partial q_{0i}}\right) + h &= 0, \\ H\left(q_i, \frac{\partial V}{\partial q_i}\right) + h &= 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Якоби показал, исходя из этого, что если найдено какое-нибудь полное решение (77), т. е. решение с $n-1$ произвольными постоянными, то этого достаточно для того, чтобы с помощью такого полного решения можно было получить траектории задачи в проинтегрированной форме.

Действительно, если имеется такое решение

$$\tilde{V} = \tilde{V}(q_i, C_1, \dots, C_{n-1}), \quad (78)$$

то достаточно написать

$$p_i = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial C_1} = \alpha_1, \dots, \frac{\partial \tilde{V}}{\partial C_{n-1}} = \alpha_{n-1}. \quad (79)$$

Число постоянных C и a , т. е. $2n-2$, является как раз тем числом произвольных постоянных, которое необходимо для определения всех траекторий в пространстве, число измерений которого снижено благодаря соотношению $H(q_i, x, p_i) = h$ до $2n-1$.

Эта связь между дифференциальными уравнениями динамики и дифференциальными уравнениями в частных производных относится к общей теории дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных, где она и была открыта Коши в 1819 г. задолго до Якоби. После того как Якоби самостоятельно подметил и изучил эту связь, он получил общую теорию интегрирования дифференциальных уравнений динамики. Метод состоит в том, что вместо непосредственного исследования основных уравнений динамики ищут достаточно общее решение гамильтоновых уравнений в частных производных, из которого интегрирование первых получается, так сказать, само собой.

Пусть в обобщенных координатах принцип наименьшего действия будет

$$\delta \int \sum p_r dq_r = 0. \quad (80)$$

Имеем :

$$\begin{aligned} \delta \int \sum p_r dq_r &= \int \left\{ \sum a \left(\frac{\partial H}{\partial q_r} \delta q_r \right) + \delta H dt \right\} = \\ &= \sum_k (p_{fr} \cdot \delta_f q_r - p_{ar} \delta_a q_r) + \int \delta H dt, \end{aligned} \quad (81)$$

где индексы a и f обозначают вариации координат и импульсов в начальной и конечной точках пути соответственно. Если действительный и варьированный пути имеют одни и те же начальные и конечные точки и имеют одну и ту же энергию, то (81) переходит в (80).

Выражение $\sum p_r dq_r = \sum p_r \dot{q}_r dt$ равно $2T dt$ в классической и $(T + F)$ в релятивистской теории, где T — кинетическая энергия системы, а

$$F = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right);$$

следовательно, в классической теории

$$\delta \int 2T dt = \sum_r (p_{fr} \delta_f q_r - p_{ar} \delta_a q_r) + \int \delta H dt,$$

в релятивистской теории

$$\delta \int (T + F) dt = \sum_r (p_{fr} \delta_f q_r - p_{ar} \delta_a q_r) + \int \delta H dt$$

и в случае совпадения начальных и конечных точек траекторий и равенства энергии для них можем написать в классической теории

$$\delta \int 2T dt = 0, \quad (82)$$

а в релятивистской теории

$$\delta \int (T + F) dt = 0. \quad (83)$$

При применении принципа наименьшего действия необходимым условием является закон сохранения энергии. Гамильтон устранил это ограничение для варьированных траекторий.

Согласно Гамильтону в классической теории имеем

$$\delta \int L dt = \delta \int (2T - H) dt; \quad (84)$$

а в релятивистской теории

$$\delta \int L dt = \delta \int (T + F - H) dt, \quad (85)$$

и в том и в другом случае

$$\delta \int L dt = \sum_r (p_{fr} \delta_f q_r - p_{ar} \delta_a q_r) + \int \delta H dt - \delta \int H dt. \quad (86)$$

Вариация последнего интеграла имеет место, во-первых, за счет изменения энергии между действительным и варьированными путями, и, во-вторых, за счет изменения времени между двумя траекториями в их конечных точках¹, т. е.

$$(H_f \delta_f t - H_a \delta_a t).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \delta \int L dt &= \sum_r (p_{fr} \delta_f q_r - p_{ar} \delta_a q_r) + \int \delta H dt - \\ &\quad - \int \delta H dt - (H_f \delta_f t - H_a \delta_a t) = \\ &= \sum_r (\dot{p}_{fr} \delta_f r - p_{ar} \delta_a q_r) - (H_f \delta_f t - H_a \delta_a t). \end{aligned} \quad (87)$$

Пусть теперь варьированное движение не подчинено никаким ограничениям в отношении его энергии; предположим только, что оно имеет те же самые начальные и конечные точки в пространстве и времени, что и действительное движение. Тогда уравнение (87) примет вид

$$\delta \int L dt = 0,$$

т. е. вариация интеграла $\int L dt$ на действительной траектории равна нулю. Другими словами, $\int L dt$ стационарен.

Обозначив (87) через $\tilde{S}$ (напомним, что выражение (87) Гамильтон называет законом переменного действия), найдем отсюда для производных $\tilde{S}$ по начальным и конечным координатам:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{fr}} = p_{fr}, \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{ar}} = -p_{ar},$$

¹ Hamel G., Theoretische Mechanik, eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik, Berlin, 1949; Bolza O., Lectures on Calculus of Variations, 1946.

а так как энергия должна быть определенной, то

$$\left. \begin{aligned} H(p_r, q_r) &= E, \\ H\left(q_{fr}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{fr}}\right) &= E, \\ H\left(q_{ar}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_{ar}}\right) &= E. \end{aligned} \right\} \quad (87a)$$

Если в качестве исходного пункта взять (87), то E исключается, а время t , напротив того, входит в рассмотрение. Пусть $S = \int L dt$, который рассматривается как функция фиксированных начальных точек, переменных конечных точек и времени t , по которому берется интеграл. S и есть главная гамильтонова функция. Имеем тогда :

$$\frac{\partial S}{\partial q_{fr}} = p_{fr}, \quad \frac{\partial S}{\partial q_{ar}} = -p_{ar}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E \quad (88)$$

и

$$H\left(q_{ar}, \frac{\partial S}{\partial q_{ar}}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (88a)$$

или

$$H\left(q_{fr}, \frac{\partial S}{\partial q_{fr}}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (88b)$$

Так как H есть квадратичная функция p , то в уравнении (88a) не нужно писать $-\frac{\partial S}{\partial q_{ar}}$.

Чтобы найти S , надо проинтегрировать (88a) и (88b), что даст n уравнений, содержащих координаты частицы и время t . Уравнения эти содержат $2n$ произвольных постоянных q_{ar} , p_{ar} и достаточны для описания движения. Импульсы будут получены из уравнения (88) и уравнение $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ будет также немедленно удовлетворено.

Гамильтон, однако, сомневался, что этот метод дает правильные результаты при приложении его к любым задачам динамики.

Общий вид и обоснование этой теории дал Якоби. В функции $\tilde{S}$ или S , исследованные Гамильтоном, входят постоянные начальные координаты (а в $\tilde{S}$ также энергия E). Якоби¹ показал, что это ограничение необязательно и что вместо двух уравнений (88) необходимо только одно уравнение, а именно :

$$H\left(q_r, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_r}\right) = E, \quad (89a)$$

¹ J a c o b i C. G. J., Über die Reduktion der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgendeiner Zahl Variablen auf die Integration eines einzigen Systemes gewöhnlicher Differentialgleichungen, Crelle's Journal, 17, 1837. 97 ; Gesammelte Werke, т. IV, 1886.

или

$$H\left(q_r, \frac{\partial S}{\partial q_r}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0^1. \quad (89b)$$

Якоби указывает, что случай, когда одновременно имеют место закон живых сил и принцип наименьшего действия, очень важен: «Гамильтон заметил, что в этом случае задача может быть сведена к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка. Если найдено одно его полное решение, то получаются все интегралы уравнения. Функцию, определенную этим дифференциальным уравнением, Гамильтон называет характеристической.

Прекрасное соотношение, найденное Гамильтоном, было несколько недоступно и туманно вследствие того, что он свою характеристическую функцию заставил зависеть еще от второго дифференциального уравнения в частных производных. Присоединение этого условия усложняет ненужным образом все открытие, так как более точное исследование показывает, что второе дифференциальное уравнение в частных производных совершенно излишне².

Уравнения (89a) и (89b) тождественны с уравнениями (87a) и (88) соответственно; они являются двумя возможными написаниями уравнения Гамильтона—Якоби³. Для уравнения (89b) Якоби доказал, что достаточно рассматривать любой полный интеграл этого уравнения, т. е. интеграл, содержащий столько произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных ($n + 1$).

Можно показать, обозначив через a_r ($r = 1, 2, \dots, n$) n постоянных интегрирования, что система движется таким образом, что производные S по a остаются постоянными со временем, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial a_r} = \beta_r,$$

где β_r — новые произвольные постоянные.

Это выражение иногда называют теоремой Якоби; оно содержит $2n$ постоянных a_r и β_r . Обобщенные импульсы в любой точке траектории могут быть вычислены с помощью выражений

$$\frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r.$$

¹ Уравнение Гамильтона—Якоби в таком виде несправедливо для негономных систем (см. Quanjel, Rendiconti di Palermo, т. 22, 1906, стр. 263).

² Якоби К., Лекции по динамике, Гл. ред. общетехн. литер., М.—Л., 1936, стр. 6.

³ Соответствующее уравнению Гамильтона—Якоби уравнение в частных производных для более общих задач вариационного исчисления было предложено в 1868 г. Бельтрами (Beltrami, Sulla teoria delle linee geodetiche, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, ser. 2, 1868, стр. 708—718, см. также его Opere matematiche, т. 1, 1902, стр. 368).

Аналогично для уравнения (89a), обозначая a_r ($r = 1, 2, \dots, n - 1$), произвольные постоянные, получим уравнение

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial a_r} = \beta_r,$$

которое содержит $(2n - 1)$ произвольных постоянных a_r, β_r, E . Обобщенные импульсы находятся из

$$\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial q_r} = p_r.$$

Якоби рассматривал только ту форму теории функции действия, которая основана на функции S , и ограничился прямоугольными координатами. Он критиковал Гамильтона за то, что тот не пришел прямо к общей форме теории.

«Я поэтому не знаю, почему Гамильтон для того, чтобы быть в состоянии указать общие интегралы вышеприведенных дифференциальных уравнений, требует введения S функции $6n + 1$ переменных, а именно $3n$ величин x_i, y_i, z_i , $3n$ величин a_i, b_i, c_i и величины t , которая удовлетворяет одновременно двум уравнениям в частных производных первого порядка :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)^2 \right] &= U, \\ \frac{\partial S}{\partial a} + \frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i} \right)^2 \right] &= U_0, \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

в то время, как мы показали, что совершенно достаточно знать некоторую функцию $3n + 1$ величин t, x_i, y_i, z_i , которая удовлетворяет одному уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{1}{2} m_i \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i} \right)^2 \right] = U \quad (91)$$

и содержит, кроме аддитивной постоянной в S , еще $3n$ других произвольных постоянных¹.

Физический смысл функции S можно выяснить так. Найдем ее полную производную по времени :

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t},$$

так как импульсы p_i не изменяются со временем t . Но так как

$$p_i = \frac{\partial S(q_i, a_i, t)}{\partial q_i}$$

¹ J a c o b i C. G. J., Gesam. Werke, т. IV, стр. 173.

и

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

то

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L,$$

откуда находим

$$S = \int L dt + \text{const.}$$

Принцип Гамильтона есть высказывание об определенном интеграле $\int_{t_1}^{t_2} L dt$, который дает возможность найти решение задачи, введя уравнения Лагранжа. В уравнении (а) от той же функции берется неопределенный интеграл, который, впрочем, практически бесполезен, так как может быть взят только тогда, когда q_i и p_i известны как функции времени, другими словами, когда задача уже решена.

Гамильтон заметил, что $\int L dt$ является одной из главных функций S еще до того, как выяснилось, что уравнение Гамильтона—Якоби дает возможность полного решения конкретной механической задачи. Это сделал Якоби, который установил, что каноническое преобразование позволяет использовать любой полный интеграл уравнения Гамильтона—Якоби для решения задачи движения.

После того как дифференциальные уравнения движения написаны на основании вариационного принципа Гамильтона, возникает вопрос об их фактической интеграции. Для этой цели Гамильтоном и Якоби систематически развита специальная теория. Эта теория имеет особое значение для небесной механики и для классической теории атома Бора—Зоммерфельда. Согласно этой теории интегрирование должно заключать в себе три последовательных этапа. Прежде всего необходимо найти возможно более простую форму дифференциальных уравнений движения. Эта форма была найдена в канонических уравнениях Гамильтона. Затем надо установить общие законы таких преобразований этих дифференциальных уравнений, при которых они сохраняли бы свою форму. Такими законами оказались канонические преобразования и теория важнейших их инвариантов. Наконец, надо развить собственно теорию интегрирования систем канонических уравнений. Решение этой задачи привело к установлению и интегрированию уравнения в частных производных Гамильтона—Якоби.

Первое систематическое изложение этих вопросов дал Якоби в своих замечательных «Лекциях по динамике».

Рассмотрим консервативную систему с гамильтоновой функцией $H \neq H(t)$. Преобразуем механические переменные q_i, p_i в новую

группу переменных Q_i, P_i с помощью канонического преобразования. Не конкретизируя каноническое преобразование, потребуем только, чтобы гамильтонова функция была бы одной из новых переменных, например Q_n :

$$Q_n = H(q_i, p_i). \quad (92)$$

Остальные $2n - 1$ уравнений преобразования являются совершенно произвольными с тем, однако, чтобы преобразование было каноническим.

Пусть мы нашли это преобразование. Тогда в новой системе координат канонические уравнения легко проинтегрировать. Так как гамильтонова функция H есть инвариант канонического преобразования, то гамильтониан $\tilde{H}$ новой системы будет равен Q_n . Но это означает, что в новой системе все переменные — циклические¹, и мы можем выполнить полное интегрирование уравнений движения.

Первая группа уравнений

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}$$

дает

$$Q_i = \text{const} = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Мы отделили последний индекс n , потому что постоянная, связанная с Q_n , имеет специальное значение; она есть постоянная энергии

$$Q_n = \text{const} = E.$$

Вторая группа уравнений

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}$$

дает

$$P_i = \text{const} = -\beta_i; \quad (i = 1, \dots, n-1);$$

в то время как последнее уравнение приводит к

$$P_n = \tau - t. \quad (93)$$

Решение канонических уравнений может быть геометрически истолковано следующим образом. Представим, что в фазовом пространстве движется некоторый непрерывный флюид, который называем фазовым флюидом. Исходные мировые линии движущегося фазового флюида заполняют пространство состояний бесконечным семейством кривых. С помощью канонического преобразования

¹ Определение циклических переменных см. стр. 283 — 285 и гл. 5.

производится отображение пространства самого на себя, которым эти мировые линии выпрямляются в бесконечный пучок параллельных прямых линий, наклоненных под углом 45° к оси времен.

Замечательная черта этого преобразования состоит в том, что одним разворачиванием цилиндрических поверхностей $H = E$ в параллельные плоскости $Q_n = E$ мы автоматически обеспечиваем, что все ранее бывшие кривыми мировые линии фазового флюида теперь выпрямляются в параллельные прямые линии.

Таким образом, исходная задача интеграции приводится к проблеме нахождения канонического преобразования, которое удовлетворяет единственному условию (92). Это условие требует, чтобы при выражении данной гамильтоновой функции через новые переменные Q_i, P_i она переходила в Q_n .

Однако пока мы не можем решить эту задачу в явном виде, так как в нашем распоряжении нет средств произвести каноническое преобразование, выражающее q_i, p_i через Q_i, P_i .

Произведем промежуточную операцию. Вместо того, чтобы сразу вводить новые переменные Q_i и P_i , мы сначала введем только Q_i , сохраняя старые q_i , но исключив p_i . После этого исключим q_i .

Первый шаг может быть выполнен в явном виде, так как

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

выражает p_i через q_i и Q_i . Если мы подставим эти выражения в H , то гамильтониан станет функцией q_i и Q_i .

Предположим теперь, что в результате этих исключений гамильтониан примет вид Q_n :

$$H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}) = Q_n. \quad (89a')$$

В этом уравнении p_i отсутствуют, поэтому можно не исключать q_i , и наша задача решена. Уравнение (89a') есть уравнение в частных производных для функции S . Найдем какое-либо решение этого уравнения. Для того, чтобы функция S могла быть производящей функцией (см. стр. 187 и 214), она должна иметь форму

$$S = S(q_i, Q_i).$$

Теперь Q_i , за исключением Q_n , не появляются явно в дифференциальном уравнении; они встречаются только как параметры. С точки зрения интегрирования уравнения (89a') первые $(n-1)$ величин Q_i играют роль постоянных интегрирования.

В общей теории какое-либо решение дифференциального уравнения в частных производных, которое содержит столько постоянных интегрирования, сколько имеется переменных, называется «полным решением». Хотя в нашем случае число переменных n

и число постоянных интегрирования должно быть также n , но в действительности одна из постоянных не нужна.

Так как S сама не входит в рассматриваемое дифференциальное уравнение, а входят лишь частные производные этой функции, то решение определено с точностью до аддитивной постоянной. Однако эта постоянная не участвует в каноническом преобразовании и может быть опущена. Отстающие $n - 1$ постоянных интегрирования, которые входят в полное решение, отождествляется с $Q_1, \dots, Q_{n-1}$.

Итак процесс построения функции S таков. Находим полное решение дифференциального уравнения (89а') с $n - 1$ постоянными интегрирования $a_1, \dots, a_{n-1}$:

$$S = S(q_1, \dots, q_n, a_1, \dots, a_{n-1}, Q_n)$$

и заменяем эти постоянные переменными $Q_1, \dots, Q_{n-1}$. Когда это сделано, то полное решение канонических уравнений движения найдено. Уравнения

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},$$

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}$$

заключают в себе в неявном виде преобразование

$$q_i, p_i \text{ в } Q_i, P_i.$$

В результате q_i, p_i будут выражены через Q_i, P_i

$$\left. \begin{aligned} q_i &= f_i(Q_1, \dots, Q_n, -P_1, \dots, -P_n), \\ p_i &= g_i(Q_1, \dots, Q_n, -P_1, \dots, -P_n). \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Значения новых координат известны, как показало решение, проведенное выше. Подставив эти значения в (94), определим q_i и p_i в явном виде как функции времени t и $2n$ постоянных интегрирования $a_1, \dots, a_{n-1}, E, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau$:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= f_i(a_1, \dots, a_{n-1}, E, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, t - \tau), \\ p_i &= g_i(a_1, \dots, a_{n-1}, E, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, t - \tau). \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Так как нет необходимости для решения канонических уравнений менять сначала постоянные интегрирования на Q_i , а затем Q_i вновь на эти же постоянные (так же обстоит дело и с постоянной энергии E), то получим следующую схему решения.

Пишем уравнение энергии

$$H(q_i, p_i) = E,$$

затем заменяем p_i на производные некоторой функции S по q_i ; получим

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = E.$$

Находим полное решение этого уравнения с $n - 1$ постоянными интегрирования

$$S = S(q_i, a_1, \dots, a_{n-1}, E)$$

и образуем уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = t - \tau;$$

тогда, решая эти уравнения относительно q_i , получим полное решение

$$q_i = f_i(a_1, \dots, a_{n-1}, E, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, t - \tau).$$

Важнейшей теоремой канонических преобразований является теорема о том, что каноническое преобразование может быть полностью охарактеризовано, если знать одну-единственную функцию S , называемую производящей функцией этого преобразования. Аналогично этому канонические уравнения полностью характеризуются единственной функцией—гамильтонианом H .

Эти две функции могут быть связаны одна с другой некоторым соотношением. Упрощение канонических уравнений в целях интегрирования производится с помощью канонических преобразований, а так как эти преобразования характеризуются единственной функцией, то, следовательно, задача интегрирования группы канонических уравнений сводится к решению единственного уравнения, которое, как показал Якоби, является дифференциальным уравнением в частных производных¹.

Установить единое правило для строгого решения дифференциального уравнения Гамильтона—Якоби невозможно. Однако во многих случаях можно найти решение, если функция S может быть представлена как сумма функций, каждая из которых в отдельности зависит от координаты q (и, кроме того, от постоянных интегрирования a_f):

$$S = S_1(q_1) + \dots + S_f(q_f).$$

Тогда уравнения в частных производных

$$H\left(q_1, q_2, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots\right) = S(a_f) \quad (96)$$

¹ См. напр., Л о й ц я н с к и й Л. Г., Л у р ь е А. И., Курс теоретической механики, т. 2, Динамика, ГТТИ, М., 1938.

распадаются на f обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_k \left(\frac{\partial S}{\partial q_k}, q_k \right) = a_k \quad (97)$$

или, решая относительно $\frac{\partial S_k}{\partial q_k}$,

$$\frac{\partial S_k}{\partial q_k} = p_k(q_k, a_k). \quad (98)$$

В этом случае говорят, что (92) решается разделением переменных.

Уже Родригес в оставшейся незамеченной работе ¹, в 1815 г., совершенно определенно указал, что в принципе Лагранжа необходимо варьировать время. Но только Якоби впервые нашел выражение принципа, лишенное неясностей. В Лекциях по динамике он замечает, что принцип наименьшего действия в форме Лагранжа недостаточно понятен. Этот принцип, требующий, чтобы

$$\sum m \int v \, ds = \min,$$

как известно, действителен в тех случаях, в которых применим закон живых сил (см. гл. I, разд. 5—8).

Однако для того, чтобы сделать его свободным от упреков, связанных с вопросом о варьировании времени, последнее желательно исключить из выражения принципа и свести все подынтегральное выражение к величинам, не заключающим времени. Якоби решает эту задачу следующим образом:

$$\text{Так как } v = \frac{ds}{dt},$$

то

$$\sum \int m v \, ds = \sum \int \frac{m \, ds^2}{dt} = \int \frac{\sum m \, ds^2}{dt}. \quad (99)$$

Напишем закон живых сил в форме

$$\frac{1}{2} m v^2 = U + H,$$

где H — постоянная энергии. Отсюда

$$\frac{\sum m \, ds^2}{dt^2} = 2(U + H)$$

и

$$\frac{1}{dt} = \sqrt{2 \frac{(U + H)}{\sum m \, ds^2}}.$$

Подставим это значение $\frac{1}{dt}$ в наш интеграл. Получим

$$\int m v \, ds = \int \sqrt{2(U + H) \sum m \, ds^2} \quad (100)$$

¹ Rodrigues O., Corresp. sur l'École Polytechnique, т. III, № 2, 1815, стр. 159—162; см. гл. I, стр. разд. 8.

и, следовательно,

$$\delta \int \sqrt{2(U + H)} \sum m ds^2 = 0. \quad (101)$$

Таким образом, задача блестяще решена.

Первое опубликованное сообщение Якоби о его форме принципа наименьшего действия

$$\delta \int \sqrt{2(U + H)} \sqrt{m ds_i^2} = 0$$

содержится в «Note sur l'integration des équations différentielles de la dynamique»¹.

Форма, которую придал Якоби принципу наименьшего действия, выражает собой тот факт, что траектория консервативной, склерономной, голономной системы является геодезической линией в многообразии конфигураций с линейным элементом действия.

Исследование движения консервативной системы с линейным элементом действия содержит в себе глубокое сходство с изучением движения соответствующей системы с кинематическим элементом, не находящимся под воздействием сил, так как траектория, соответствующая движению без воздействия сил, представляет собой геодезическую линию кинематического линейного элемента.

Именно принцип Якоби вошел во многие учебники XIX в. как единственная форма принципа наименьшего действия².

В той форме, которую придал Якоби принципу наименьшего действия, связь его с законом живых сил видна еще более отчетливо, чем у Лагранжа. И в оценке принципа, в форме (101), Якоби во многом очень близок Лагранжу. Он говорит, что «значение принципа наименьшего действия . . . заключается, во-первых, в форме, в которой он представляет дифференциальные уравнения динамики, и, во-вторых, в том, что он дает такую функцию, которая имеет минимум, когда эти дифференциальные уравнения удовлетворяются». Что же касается так называемой метафизической стороны дела, то он замечает, «что трудно найти метафизическую причину для принципа наименьшего действия . . .»³, если он выражен в строгой и правильной форме (101).

Якоби отмечает, что хотя указанный «минимум существует во всех задачах, но, как правило, неизвестно, где его искать. Поэтому в то время, как самое интересное в этом принципе то, что вообще

¹ Jacobi C., Comptes Rendus, т. 5, 1837, стр. 61—67; см. также Jacobi C., Gesam. Werke, т. 4, стр. 129—136, ср. особенно стр. 132—134; «Сборник», стр. 289.

² Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, т. II, Париж, 1889, стр. 491—500; Appell P., Traité de mécanique rationnelle, изд. 2-е, т. II, Париж, 1904, стр. 425—429; Maggi G. A., Principii della theoria mathematica del movimento di corpi, Милан, 1896, стр. 394—396.

³ Якоби К., Лекции по динамике . . . , стр. 44.

можно получить минимум, раньше придавали преувеличенное значение тому, что такой минимум существует¹.

Якоби указывает далее, что для принципа наименьшего действия должно быть поставлено еще одно важное ограничение. Оно состоит в том, что минимум имеет место не между двумя любыми положениями системы, но только в тех случаях, когда конечное и начальное положения достаточно близки друг к другу. Якоби доказал следующую общую теорему по этому поводу: «Если из какой-нибудь точки поверхности провести по всем направлениям кратчайшие линии, то могут встретиться два случая: две бесконечно близкие кратчайшие линии либо проходят все время одна возле другой, не пересекаясь, либо они вновь пересекаются, и тогда последовательность всех точек пересечения образует их огибающую кривую. В первом случае кратчайшие линии никогда не перестают быть кратчайшими, во втором — они будут таковыми только до точки касания с огибающей кривой»².

Что же касается механического значения принципа наименьшего действия, то оно, по мнению Якоби, состоит в том, что в нем заключаются основные уравнения динамики в том случае, когда имеет место принцип живой силы.

Переходя к принципу Гамильтона, Якоби отмечает, что из него можно получить уравнения движения более простым способом, чем из принципа наименьшего действия. Кроме того, этот принцип более общий, чем принцип наименьшего действия, поскольку входящая в него силовая функция может содержать в явном виде также и время t . В формулировке же принципа наименьшего действия, данной Якоби, время исключено с помощью закона живых сил, в предположении, что силовая функция не содержит явно времени.

В работе³, опубликованной в 1837 г., Якоби приводит без доказательства две теоремы, представляющие большой интерес с точки зрения развития теории преобразования канонических переменных и аналитической динамики в целом. Первая теорема может быть изложена следующим образом.

Пусть

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3 \dots, n)$$

3n дифференциальных уравнений движения свободной системы и уравнение живых сил $\frac{1}{2} \sum m \dot{x}_i^2 = U + h$. Пусть V есть полное решение уравнения в частных производных

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 = U + h,$$

¹ Якоби К., Лекции по динамике, стр. 39.

² Там же, стр. 41.

³ Jacoby C. G. J., Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique...

т. е. решение, содержащее, кроме постоянной, получаемой простым сложением с V , еще $3n - 1$ постоянных a . Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \beta, \dots, \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau, \quad (102)$$

где β и τ новые произвольные постоянные.

Эта теорема уже упоминалась Якоби в работе¹ и, строго говоря, представляет собой нетрудное обобщение формул Гамильтона.

Однако Якоби не ограничивается этим, а приводит далее совершенно новый результат своих исследований. Пусть уравнения возмущенного движения будут $m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$, тогда уравнения для вариаций приведенной выше системы произвольных постоянных будут

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \dots, \frac{dh_i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau}, \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}, \dots, \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial h},$$

так что эти постоянные образуют каноническую систему. Термин каноническая система был им здесь впервые введен в научную литературу.

Якоби отмечает, что так как одно полное решение дифференциального уравнения в частных производных дает все другие, то эта теорема приводит к задаче: дана система канонических элементов, найти все другие системы. Это может быть выполнено с помощью второй теоремы.

Даны системы дифференциальных уравнений, связывающие переменные a_m и b_m :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial b}, \dots, \frac{db}{dt} = \frac{\partial H}{\partial a}, \quad (103)$$

где H — любая функция переменных a_m, b_m ; пусть a_m, β_m две новые системы переменных, связанных с предыдущими уравнениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = \beta, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial a} = -b, \dots,$$

где ψ есть функция a_m, b_m (но не t), тогда, если выразить H как функцию t и новых переменных a_m, β_m , то эти последние переменные связаны друг с другом уравнениями, форма которых подобна форме исходных уравнений, а именно:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta}, \dots, \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial a}. \quad (104)$$

В заключение Якоби замечает, что может быть выведена и другая более общая теорема, если положить $\psi + \lambda \psi_1 + \mu \psi_2 + \dots$ вместо ψ и исключить множители $\lambda, \mu, \dots$ посредством уравнений $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0, \dots$

¹ Jacobi C. G. J., Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique...

В 1844 г. Якоби ввел понятие о последнем множителе¹. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx}{X}. \quad (105)$$

Предположим, что известны $n - 1$ интегралов этой системы и пусть эти интегралы будут $f_r(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = a$, ($r = 1, 2, \dots, n - 1$). При помощи этих интегралов выразим $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ как функции от x_n и x . Тогда останется еще проинтегрировать лишь одно уравнение первого порядка $\frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx}{X}$, где величины $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ выражены через x_n и x . Интеграл этого уравнения будет $\int \frac{M}{\Delta} (X'dx_n - X'dx) = \text{const}$, где M одно из решений уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(MX_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(MX_2) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}(MX_n) + \frac{\partial}{\partial x}(MX) = 0, \quad (106)$$

а Δ — якобиан $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}$. Функцию M Якоби назвал последним множителем по аналогии с интегрирующим множителем Эйлера.

В «Лекциях по динамике» Якоби несколько иначе определил и исследовал свойства «множителя» системы обыкновенных дифференциальных уравнений или линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Он применил разработанную им теорию к различным системам дифференциальных уравнений и, в частности, к дифференциальным уравнениям динамики. Множителем системы дифференциальных уравнений $dx : dy : dz : dw : \dots = X : Y : Z : W \dots$ или линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка $X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + W \frac{\partial f}{\partial w} + \dots = 0$ он называет функцию M такую, что удовлетворяется (106).

Одно из основных свойств этого множителя выражено следующей теоремой: когда все (кроме одного) интегралы системы уравнений в частных производных известны и тем самым система сведена к единственному дифференциальному уравнению между двумя переменными, тогда множитель (в обычном смысле слова) этого последнего уравнения будет $M\psi$, где M — множитель системы, а ψ — производная найденных $n - 1$ интегралов, так что если множитель системы известен, то интегрирование последнего дифференциального уравнения сводится к простой квадратуре.

¹ Jacobi C. G. J., Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi, Crelle Journ., 1844, т. 27, стр. 199—268, т. 29, 1846, стр. 213—279 и стр. 333—376.

Якоби приложил теорему последнего множителя к дифференциальным уравнениям динамики как в лагранжевой, так и в гамильтоновой форме. Для уравнения динамики в форме Лагранжа получаются простые и изящные выражения, особенно же простое и интересное выражение имеет последний множитель для уравнений Гамильтона. В этом случае

$$M = 1,$$

и множитель последнего уравнения равен просто ψ .

Необходимо различать два случая: когда время t входит и когда оно не входит в уравнения движения. В первом случае имеет место определение последнего интеграла посредством квадратуры согласно изложенному. В случае же, когда t не входит в уравнения движения, т. е. когда для системы выполняется закон живых сил, возможно дальнейшее развитие метода. Время t может быть отделено от других переменных, и тем самым исходная система дифференциальных уравнений сведена к системе, не заключающей времени и содержащей на одно уравнение меньше, чем исходная. Последний множитель применяется к этой новой, уменьшенной на одно уравнение, системе. Когда же ее интегралы найдены, система может быть дополнена добавлением одного дифференциального уравнения, включающего время и интегрируемого в квадратурах. Следовательно, в этом случае теорема Якоби дает возможность определить с помощью квадратур два последних интеграла, если даны остальные независимые от времени интегралы.

5. Исследования М. В. Остроградского

С середины XIX в. начинается интенсивная разработка всего сложного круга механических, математических и физических идей, связанных с вариационными принципами механики, с теорией Гамильтона—Якоби, с учением о преобразованиях.

Подробное рассмотрение всех относящихся сюда работ представляет, собственно говоря, уже задачу истории вариационного исчисления или истории аналитической динамики в целом. Мы рассмотрим лишь те из них, которые в той или иной степени существенно обогатили, развили и углубили понимание вариационных принципов механики, прежде всего с математической точки зрения. Первое место по праву принадлежит здесь замечательному русскому математику М. В. Остроградскому (1801—1862)¹.

¹ Для подробного ознакомления с жизнью и творчеством М. В. Остроградского особенно рекомендуем книгу: Гнеденко Б. В., М. В. Остроградский, Очерк жизни, научного творчества, педагогической деятельности, ГТТИ, 1952. Ценный анализ и богатый материал о работах русских механиков см. Герониму с Я. Л., Очерки о работах корифеев русской механики, Гостехиздат, 1952 г.

Михаил Васильевич Остроградский родился 24-го сентября 1801 г. в деревне Пашенной Колебякского уезда Полтавской губернии. В 1809 г. его отдали в Полтавскую гимназию, в которой он довольно посредственно учился до 1816 г. В том же году отец повез его в Петербург для определения в гвардейский полк, что было страстным желанием М. В. Остроградского, но не довез его туда и, изменив свое решение, оставил в Харькове для подготовки к поступлению в Харьковский университет.

Посещая университет с 1816 г., Остроградский только с 1818 г. по существу начал заниматься науками под влиянием преподавателя математики университета А. Ф. Павловского, в квартире которого он в это время поселился. На формирование научных интересов и мировоззрения Остроградского решающее влияние оказал ректор и профессор математики Харьковского университета Т. Ф. Осиповский.

Видя успехи и способности Остроградского, Осиповский решил присудить ему ученую степень кандидата. Возник вопрос о сдаче необходимых экзаменов, что и было благополучно выполнено Остроградским. Однако профессор философии Дудрович, возглавлявший в университете партию политических реакционеров и мистиков, придравшись к формальным мотивам, отказался принять у Остроградского экзамен, справедливо видя в нем ученика и сторонника прогрессивно и либерально настроенного Осиповского. Началось длительное разбирательство этого вопроса, в ходе которого Дудрович писал прямые доносы на Остроградского, обвиняя его в том, что «он не слушал богопознания и христианского учения, несмотря на предписания начальства»¹. В результате интриг и закулисной переписки университетских реакционеров и чиновников Министерства духовных дел и народного просвещения Остроградский после четырех лет, проведенных в университете, остался без документов об его окончании, несмотря на трехкратную удачную сдачу всех требующихся для этого экзаменов. Эти преследования и глумления не сломили воли Остроградского. Вернувшись в деревню, он добился от отца разрешения поехать учиться во Францию, где в то время работали знаменитые ученые — Лаплас, Пуассон, Коши, Фурье и многие другие.

В 1822 г. после некоторых приключений молодой Остроградский прибыл в Париж. Здесь способности Остроградского получили высокую оценку Лапласа, Коши и других математиков. Коши писал о нем: «один русский молодой человек, Остроградский, одаренный большой проникательностью и весьма сведущий в исчислении бесконечно малых»...².

¹ Цит. по книге: Гнеденко Б. В., Остроградский М. В., ГТТИ, М., 1952, стр. 47.

² Цит. по книге: Сабинин Е. Ф., Остроградский М. В., Записки Новороссийского университета, 33, 1882, стр. 44.

В ноябре 1826 г. Остроградский представил Парижской Академии свою первую самостоятельную работу «*Mémoire sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique*», опубликованную в трудах Академии в 1832 г.¹ Вот как акад. А. Н. Крылов описывает



М. В. ОСТРОГРАДСКИЙ (1801—1862)

обстановку возникновения этого мемуара : «По какой-то причине в 1826 г. Остроградский денег своевременно от отца не получил, задолжал в гостинице за «харч и простой» и по жалобе хозяина был посажен в «Клиши», т. е. в долговую тюрьму Парижа. Здесь он видимо особенно усердно занимался математикой, написал свою знаменитую работу «Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне» и послал эту работу Коши. Коши в ноябре 1826 г. представил эту работу с самым лестным отзывом Парижской Ака-

¹ Ostrogradsky M., Mémoires présentés par divers sávvants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, sc. math. et phys., т. 3, 1826 (1832), стр. 23—44.

демии, которая удостоила эту работу высшего отличия — напечатания в «*Mémoires des savants étrangers de l'Académie*», т. е. в «Записках ученых посторонних Академии». Более того Коши сам, не будучи богатым человеком, выкупил Остроградского из «долговой»¹.

В начале 1828 г. Остроградский возвратился в Россию, где немедленно был взят под надзор полиции, который был, впрочем, вскоре снят.

17-го декабря 1828 г. Остроградский был избран адъюнктом Академии наук. К этому времени в изданиях Академии он напечатал три статьи, относящиеся к задачам математической физики и математического анализа. В следующем году он опубликовал в изданиях Академии три работы — по механике, теории теплоты и об интегрировании уравнений теории упругости.

В том же году он начал чтение в Академии курса небесной механики. Лекции, которые продолжались пять месяцев, собрали невиданное по тому времени число слушателей — до 30 человек. По получении отзыва Араго и Пуассона на записи этих лекций они были изданы в Петербурге на французском языке.

В 1830 г. Остроградский был избран экстраординарным, а в 1831 г. ординарным академиком по прикладной математике. В жизни Академии Остроградский принял самое деятельное и разностороннее участие. Начиная с 1828 г. и до конца жизни он преподавал, по существу, во всех технических учебных заведениях Петербурга: в офицерских классах Морского кадетского корпуса — математику и начертательную геометрию, в Институте корпуса путей сообщения — аналитическую механику, в Главном педагогическом институте он читал различные курсы как по механике, так и по математике; в 1840 г. к этому прибавилось преподавание в Главном инженерном училище, а через год — в Главном артиллерийском училище. В то же время он был утвержден Главным наблюдателем за преподаванием математических наук как в военно-учебных заведениях, так и в учебных заведениях корпуса путей сообщения. Кроме того, Остроградский сам писал учебники, которые издавались как типографским, так и литографским способами. Известны его лекции по небесной механике, аналитической механике, алгебраическому анализу, аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислениям и т. д.

В 1831 г. Остроградский женился на М. В. Купфер (Люцау); у него были сын и две дочери.

Умер Остроградский 1-го января 1862 г. (по новому стилю).

Работы Остроградского в области механики можно разбить на три группы: работы, связанные с началом возможных перемещений, с дифференциальными уравнениями механики и с решением частных задач механики.

¹ Крылов А. Н., Воспоминания и очерки, изд. АН СССР, 1956, стр. 405.

Характеристику и оценку работ Остроградского в области математической физики см. в посвященных ему упомянутых выше (стр. 193) исследованиях.

Лекции по аналитической механике¹ Остроградского имеют важное значение в развитии физико-математических наук в начале XIX в. в России. Остроградский едва ли не первый в России начал читать этот курс в 1836 г. в Петербургском институте инженеров путей сообщения. Остроградский знал Аналитическую механику Лагранжа, работу² Фурье, вышедшую в 1798 г., в которой дано новое доказательство принципа возможных перемещений и этот принцип распространен на неудерживающие связи, аналитическое выражение которых приводит к неравенствам; знал Остроградский также и работы Гамильтона и ряд работ Пуассона. Он исходил из того обобщения, которое дал Фурье лагранжевой механике, и развивал его. Однако Остроградский в своем изложении далеко не во всем следовал Лагранжу. Он не применяет и не упоминает ни обобщенных координат (координатных параметров Лагранжа), ни уравнений Лагранжа второго рода, т. е. наиболее, может быть, важных с современной точки зрения достижений Лагранжа. Остроградский искал в механике наиболее простых и общих принципов, он исследовал общие проблемы механики и методы вывода основных уравнений равновесия и движения.

В 1848 г. Остроградский публикует статью³, содержащую важные результаты в развитии математической теории уравнений движения. Он показал, что в случае, когда силовая функция содержит время, уравнения движения могут быть преобразованы из лагранжевой в гамильтонову форму.

Пусть имеем функцию n переменных x_i

$$F = F(x_i).$$

Введем новую группу переменных y_i посредством преобразования

$$y_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (107)$$

причем гессиан, образованный вторыми производными от F , предполагается отличным от нуля, так как только при этом условии уравнения (107) имеют решение для x_i как функции y_i .

Введем новую функцию G

$$G = \sum_{i=1}^n x_i y_i - F. \quad (108)$$

¹ Остроградский М. В., Лекции по аналитической механике. Собрание сочинений, т. I, ч. 2, изд. АН СССР, М.—Л., 1946.

² Fourier, Mémoire sur la statique, démonstration nouvelle de principe des vitesses virtuelles, Oeuvres de Fourier, т. II, стр. 477 (см. особенно стр. 488). Заметим, что это — единственная работа Фурье по аналитической механике.

³ Ostrogradsky M., Sur les intégrales des équations générales de la dynamique, Mélanges de l'Académie de St. Pétersbourg, 6/18 oct. 1848; Избр. произв., изд. АН СССР, 1958.

Подставим сюда x_i , выраженные из уравнений (107); тогда

$$G = G(y_i).$$

Рассмотрим вариацию G , обусловленную произвольной бесконечно малой вариацией y_i . Имеем:

$$\begin{aligned} \delta G &= \sum \frac{\partial G}{\partial y_i} \delta y_i = \sum (x_i \delta y_i + y_i \delta x_i) - \delta F = \\ &= \sum \left[x_i \delta y_i + \left(y_i - \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \delta x_i \right]. \end{aligned} \quad (109)$$

Так как коэффициент при δx_i равен нулю согласно определению (107), то

$$x_i = \frac{\partial G}{\partial y_i}; \quad (110)$$

это уравнение, симметричное с уравнением (107), выражает преобразования Лежандра:

$$\left. \begin{aligned} y_i &= \frac{\partial F}{\partial x_i} & x_i &= \frac{\partial G}{\partial y_i} \\ G &= \sum x_i y_i - F & F &= \sum x_i y_i - G \\ G &= G(y_i) & F &= F(x_i) \\ y_i & & x_i & \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

Таким образом, точно так же, как новые переменные суть частные производные от исходной функции по исходным переменным, так и исходные переменные суть частные производные новой функции по новым переменным. Поэтому с полным правом как те, так и другие группы переменных могут рассматриваться и как исходные, и как вновь полученные. Обе группы совершенно эквивалентны при рассмотренном преобразовании.

Рассмотрим несколько детальнее преобразование Лежандра. Пусть теперь

$$F = F(z_i, x_i), \quad (112)$$

где z_i не являются функциями x_i и входят в F как некоторые параметры, не участвующие в преобразовании Лежандра. Новая функция G также будет содержать эти параметры. Если теперь найти, как в (109), δG , считая, что z_i и y_i изменяются независимо, то кроме выражения (109), которое не изменится, получим дополнительное соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = - \frac{\partial G}{\partial z_i}. \quad (113)$$

Применим преобразование Лежандра к лагранжиану

$$L = L(q_n, \dot{q}_n, t).$$

В дальнейшем для нашего рассмотрения несущественно, являются ли $\dot{q}_n$ действительными скоростями движения; существенно лишь то, что $\dot{q}_n$ представляют собой переменные, независимые от переменных q_n . Пусть при лежандровом преобразовании преобразуются только переменные $\dot{q}_n$, а остальные $n + 1$ переменных остаются без изменения.

Прежде всего введем новые переменные

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (114)$$

и новую функцию H , называемую полной энергией,

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (115)$$

Выразим H через новые переменные p_i , т. е.

$$H = H(q_n, p_n, t).$$

Функцию H мы будем называть, как обычно, гамильтонианом.

Тогда преобразование Лежандра даст:

в старой системе
Функция: лагранжиан L
переменные: скорости $\dot{q}_i$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$$

$$H = H(q_n, p_n, t)$$

в новой системе
Функция: гамильтониан H
переменные: импульсы p_i

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$L = \sum p_i \dot{q}_i - H$$

$$L = L(q_n, \dot{q}_n, t).$$

Таким образом, применение лежандрова преобразования к лагранжиану L преобразует его в гамильтониан H , причем скорости преобразуются в импульсы.

Что касается уравнений Лагранжа, которые являются уравнениями второго порядка относительно координат q_i , то, введя новые переменные (114), их можно преобразовать в уравнения первого порядка в этих новых переменных, а именно

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Собственно говоря, наименование переменных p_i импульсами имеет частный характер. Они имеют гораздо более широкий смысл, позволяя заменить исходные n уравнений второго порядка $2n$ уравнениями первого порядка. Тем самым в уравнения движения входят производные не выше первого порядка. Этот переход аналогичен тому, как в векториальной механике, определив момент как произведение массы на скорость, переходят от выражения силы как

произведения массы на ускорение к выражению ее как меры изменения импульса.

Согласно преобразованию Лежандра из определяющего уравнения (114) получим

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Применив преобразование Лежандра к уравнению (115), получим

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Таким образом, лагранжевы уравнения заменяются так называемыми каноническими уравнениями Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

которые в механике полностью эквивалентны уравнениям Лагранжа. Однако они имеют большое преимущество перед этими уравнениями в том отношении, что производные по t находятся только в левой части уравнений, так как гамильтониан не содержит никаких производных от p_i или q_i по времени t .

Исследуем теперь, как вариация p_i влияет на интеграл действия. Имеем :

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i. \quad (116)$$

Так как множитель в скобках равен нулю, то отсюда следует, что произвольная вариация p_i не влияет на вариацию L . Следовательно, эта вариация p_i не будет влиять и на интеграл от L по времени, поэтому p_i вовсе не должно обязательно быть функцией от q_i и $\dot{q}_i$, и вариация обобщенных импульсов отнюдь не должна определяться вариацией q_i . Следовательно, вариация интеграла должна быть стационарной даже в том случае, когда p_i варьируются любым произвольным способом, или, иначе говоря, даже в том случае, когда p_i рассматриваются как вторая группа независимых переменных. Таким образом, можно написать

$$I = \int_{t_1}^{t_2} [\sum p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t)] dt \quad (117)$$

и потребовать, чтобы этот интеграл имел стационарное значение для произвольных вариаций q_i и p_i .

Для этой вариационной проблемы имеем $2n$ дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} &\equiv \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L}{\partial p_i} &\equiv 0 - \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

это и есть канонические уравнения, полученные теперь как система $2n$ дифференциальных уравнений, выведенных из интеграла действия (117).

Таким образом, новый вариационный принцип (117) эквивалентен прежнему, но имеет перед ним то преимущество, что приводит к дифференциальным уравнениям, имеющим более простую структуру: они — первого порядка, производные разделены, и уравнения не содержат алгебраических операций.

В интеграле (117) по-прежнему подынтегральная функция имеет смысл разности кинетической и потенциальной энергий, так как первый член зависит от скорости, а второй — только от координат положения, которыми теперь являются q_i и p_i . Однако кинетическая часть подынтегрального выражения является теперь линейной функцией скорости $\dot{q}_i$ вида

$$\sum p_i \dot{q}_i.$$

Следовательно, то обстоятельство, что в классической механике в большинстве случаев кинетическая энергия является квадратичной функцией скорости, не является необходимым в общем случае, так как любая произвольная лагранжева функция может быть преобразована к канонической форме.

Хотя проблемы классической механики обычно приводят к лагранжевой функции, которая не содержит производных выше первого порядка, однако и в том случае, когда в ней содержатся производные до n -го порядка, задача может быть приведена к интегралу (117) и каноническим уравнениям Гамильтона, которые можно рассматривать как нормальную форму, в которую может быть преобразована любая группа уравнений, возникающая из вариационной задачи, причем это преобразование не требует никаких других операций, кроме дифференцирования и исключений.

Это и было впервые отмечено и исследовано М. В. Остроградским.

В итоге мы видим, что каждая гамильтонова задача может быть связана с соответствующей лагранжевой задачей.

Применяя сформулированный им в 1834—1835 г. принцип, Гамильтон исходил из допущения, что система может быть и не свободна, но кинетическая энергия является однородной функцией второго порядка от обобщенных скоростей. Таким образом, он неявно предполагал стационарность связей¹. М. В. Остроградский

¹ Кинетическая энергия и силовая функция могут содержать t в явном виде. Это имеет место как в том случае, когда заданные кинематические условия зависят от времени, так и когда силовая функция, кроме координат положения, содержит явно время. Если и кинетическая энергия и силовая функция не зависят от времени, т. е. склерономны, то уравнения движения содержат в себе фундаментальную теорему, называемую законом сохранения энергии. Если же кинетическая энергия, или силовая функция или обе вместе зависят от времени, т. е. реономны, то такой закон сохранения не имеет места.

получил тот же принцип в 1848 г., не налагая этих ограничений, а рассмотрев связанную с ним вариационную задачу в самом общем виде. Поэтому рассматриваемый принцип получил название принципа Гамильтона—Остроградского.

Остроградский читал свой мемуар 29 ноября 1848 г. на заседании Российской Академии наук и опубликовал его в 1850 г.¹ Вот кратко основная идея Остроградского. Пусть V — функция независимой переменной t и переменных x_m , которые предполагаются также функциями t , и производных этих функций по t до n -го порядка включительно. Если $\delta \int V dt = 0$, то по известным правилам вариационного исчисления получим m дифференциальных уравнений, каждое из которых будет порядка $2n$. Остроградский показал, что эти дифференциальные уравнения эквивалентны некоторой группе $2mn$ дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Это и есть содержание первой части работы Остроградского.

Вот как формулирует задачу своей работы Остроградский:

«Мы рассматриваем в этом мемуаре важные, до сих пор не замеченные следствия, вытекающие из выражения вариации некоторой функции, предполагая, что эта функция содержит вместе с основной или независимой переменной также функции этой переменной и их производные различных порядков. Для упрощения рассуждения обозначим изучаемую нами функцию через A и назовем независимую переменную временем. Это наименование оправдывается тем, что независимая переменная играет у нас ту же роль, что и время в динамике.

Известно, что вариация A , которая зависит от времени, от каких-либо функций времени и их производных, распадается на две части. Первая часть является полным дифференциалом, каковы бы ни были функции времени, входящие в A , и вариации этих функций. Другая часть, напротив, неинтегрируема, если только что названные функции и их вариации остаются произвольными. Однако, подчиняя эти функции и их вариации определенным условиям, мы можем не только сделать эту часть интегрируемой, но даже, если бы это было признано необходимым, привести ее к нулю. Среди бесконечного множества способов этого приведения один представляется наиболее замечательным. Этот способ состоит в исключении неинтегрируемой части единственно за счет функций, содержащихся в A , не затрагивая их вариаций. Таким способом исключения пользуются в задаче изопериметров. Применяя его, можно получить те дифференциальные уравнения, которые имеют место в этой задаче.

¹ Ostrogradsky M., Mémoire sur les équations différentielles, relatives au problème isopérimétriques, Mémoires de l'Académie des Sciences, т. 6, St. Pétersb., 1850, стр. 385—517; «Сборник», стр. 315—387.

Эти уравнения содержат, как очень частный случай, уравнения динамики ; они заслуживают внимания не только уже в силу этого обстоятельства, но и сами по себе.

Как следствие этих уравнений, как бы одновременно с ними, мы получим весьма замечательную формулу, а именно, равенство между вариацией A и ее первой частью, которая всегда интегрируема, если вторая часть этой вариации приведена к нулю. Эта формула превращает полную вариацию в полный дифференциал ; она является основой настоящего исследования и приводит к важным следствиям. Она представляет собой не что иное, как те дифференциальные уравнения, которые установлены для обращения в нуль интегрируемой части, т. е. дифференциальные уравнения задачи изопериметров. Однако она представляет эти уравнения в форме, которая позволяет легко вывести из нее многие важные свойства, которые не так легко раскрыть, изучая эти же уравнения в их обычной форме.

Для сокращения мы будем называть эту формулу фундаментальной формулой или фундаментальным уравнением.

Неизвестные, входящие в эту формулу — те же самые, которые входят в задачу изопериметров, а именно функции времени, содержащиеся в A , и их производные до некоторого определенного порядка, который мы не считаем нужным уточнять. Однако не все эти переменные удобны для наших исследований. Мы оставим только половину из них, заменив остальные более удобными.

Оказывается, что переменные, применением которых достигается наибольшая простота и которые наилучшим образом соответствуют задаче — это те переменные, которые находятся под знаком d в дифференциальной части фундаментальной формулы, где они являются коэффициентами при вариациях и их производных.

Эти величины, повторяем, составляют только половину общего числа неизвестных, поэтому за другую половину мы примем функции, входящие в A , вместе с теми их производными, которые также заключены в A , за исключением одной производной высшего порядка каждой из этих функций.

При помощи весьма простого преобразования фундаментальная формула распадается на систему дифференциальных уравнений первого порядка, число которых равно числу неизвестных, о которых мы говорили выше. Эти уравнения совершенно подобны общим формулам динамики, хотя эта наука является только очень частным случаем задачи изопериметров. В наших формулах, как и в формулах динамики, дифференциалы неизвестных выражаются через вариации некоторой функции, которую мы здесь определим и которая зависит только от времени и неизвестных переменных задачи¹.

¹Ostrogradsky M., Mémoire sur les équations différentielles..., стр. 385; «Сборник», стр. 315.

Остроградский приходит к дифференциальным уравнениям задачи изопериметров, имеющим гамильтонову форму. Отметив, что «геометры ранее уже придали такую форму общим уравнениям движения», он получает общее выражение для задачи изопериметров, которое как частный случай содержит динамический принцип наименьшего действия, о котором Остроградский говорит: «с нашей точки зрения его нельзя рассматривать не только как принцип, но даже как простую теорему. Он кажется нам только простым следствием, очевидным результатом применения метода вариаций к теории maxima и minima¹. С математической точки зрения вряд ли можно возразить что-либо против этого утверждения, однако очевидно, что оно ограничено тем, что исключает из рассмотрения собственно механическую (или физическую) сторону проблемы. Остроградский показал далее, что как изопериметрическая задача так и принцип наименьшего действия требуют интегрируемости выражения

$$\delta(Vdt)$$

с той лишь разницей, что первая требует интегрируемости при произвольных δx , тогда как второй предполагает условие

$$\delta(T + h) = 0.$$

Лагранж и другие математики рассматривали обе задачи как один вопрос, внося то ограничение, что функция V не зависела у них от времени. Это ограничение, естественно, отпадает в рассмотрении Остроградского².

В итоге Остроградский показал, что все дифференциальные уравнения вариационных задач с одной независимой переменной могут быть приведены к форме канонических уравнений Гамильтона. В исследовании Остроградского рассматривается функция L такого вида

$$L = L(t, y, y^{(m)}, z, z^{(n)}), \quad (119)$$

где t — независимая переменная, y и z — зависимые переменные, а $y^{(m)}$ и $z^{(n)}$ — их производные до порядков m и n . Мы видим, что Остроградский исследовал задачу в самом общем виде.

Ту же задачу позднее исследовал Клебш³. Далее Остроградский подробно рассматривает вопрос об интегрировании уравнений, которые получаются таким образом, и анализирует их свойства. Работа

¹ Ostrogradsky M., Mémoire sur les equations différentielles, стр. 385.

² После М. В. Остроградского в 1854 г. Донкин также рассмотрел те случаи, когда функция Лагранжа содержит явно время. (Donkin W., Phil. Trans., 1854, стр. 71.

³ Clebsch, On those problems in the calculus of variations which involve only one independent variable. Crelle's Mathematical Journal, т. 55, 1858, стр. 335—355.

эта очень трудно написана и приходится сожалеть также о том, что напечатана она с большим числом опечаток.

В этой работе¹ Остроградский указывает, что анализ Лагранжа в той части его «Аналитической механики», где он выводит уравнение движения из принципа наименьшего действия вместе с законом живых сил, неточен. Остроградский считает, что в случае применения закона живых сил между некоторыми переменными, которые Лагранж полагает независимыми, существует зависимость.

В письме к Н. Д. Брашману² от 2. II. 1853 Остроградский сообщает о своем намерении послать ему статью о принципе наименьшего действия.

В этом письме Остроградский рассматривает тот случай, когда

$$\sum X_i \delta x_i = \delta U,$$

т. е. система консервативна, и показывает, что если принять условие $\delta x_i = 0$ в конечных точках траектории, то преобразование уравнений движения приводит к выражению

$$\int (T + U) dt = \min$$

и обратно.

Подводя итоги содержанию письма, в котором изложены эти два математических вывода, Остроградский отмечает, что некоторые ограничения, принятые им здесь, ненужны. Он имеет ввиду консервативность системы. Остроградский намеревается изложить вопрос в предполагаемой статье иначе, чем в этом письме, в котором, как он пишет, сознательно стремился возможно меньше уклоняться от изложения Лагранжа. Вот что пишет Остроградский: «Я его (принцип наименьшего действия. — Л. П.) изложу иначе, а именно так: 1. Я буду пользоваться любыми координатами, 2. (что существенно) условия минимума и максимума я заменяю условиями интегрируемости. Вам, конечно, известно, что условия интегрируемости играют очень большую роль в механике, например, в гидростатике и гидродинамике. Я утверждаю, что вся механика есть вопрос интегрируемости. Это условие содержит в себе первое как частный случай; оно требует только, чтобы вариация была интегрируемой, тогда как условие максимума требует не только, чтобы эта вариация была интегрируемой, но и того, чтобы ее интеграл обращался в нуль»³.

Как отмечает Ф. А. Слудский, «Остроградский не обращает надлежащего внимания на условия, уничтожающие члены вариации

¹ Ostrogradsky M., Mémoire sur les équations différentielles..., стр. 424.

² Остроградский М. В., Письмо к проф. Брашману, Математический сборник, т. 1, 1866; «Сборник», стр. 770—772.

³ Там же.

вне знака интеграла : у него не упоминается о одновременности сравниваемых движений»¹.

Основная точка зрения Остроградского на проблемы аналитической механики сформулирована им в отрывке из письма от 2. II. 1853 г. к проф. Брашману. Приводим этот отрывок целиком. При этом для его понимания необходимо иметь в виду, что у Остроградского полный момент движущих сил означает виртуальную работу.

«Я сообщил некоторым из моих друзей нижеследующий результат, который заключает в себе всю механику, и я спешу поставить Вас в известность об этом результате, чтобы в случае надобности я мог опираться на Ваше свидетельство.

Сумма момента движущих сил, момента сил, которые заменяют связи системы, и вариаций живой силы, выраженных в любых координатах, является полной производной по времени.

Это — наиболее простой и наиболее общий результат, который может быть получен из динамических соображений. Условие полной производной свойственно не только гидростатике и гидродинамике ; оно принадлежит всей науке о движении»².

Излагая в несколько измененном виде вывод принципа наименьшего действия Лагранжем, Остроградский отмечает то чрезвычайно существенное обстоятельство, что вариации δx изменяются по двум причинам : вследствие варьирования времени t и вследствие изменения формы функции x . Первая причина может ввести в δx только член $\dot{x}\delta t$, вторая же гораздо более сложна и может ввести в каждую δx несколько членов. Вводя их, мы учитываем независящую от времени вариацию параметров, входящих в функцию x . Такими параметрами являются, в частности, постоянные интегрирования, и поэтому их вариация не должна упускаться из вида.

В работе 1848 года «Sur les intégrales des équations générales de la dynamique»³ Остроградский развил теорию канонических уравнений Гамильтона и вывел ряд теорем о характеристической функции в предположении существования связей, могущих зависеть от времени.

Многие из этих теорем были открыты уже Якоби, который, однако, кроме известных Остроградскому мемуаров 1836 г., ничего более не опубликовал, и результаты его стали известны только в 1866 г., когда Клебш издал лекции по динамике Якоби. Поэтому результаты Остроградского в названной выше работе получены независимо от Якоби во всем, что относится не к системам свободных точек, рассмотренным Якоби в исследовании 1836 г.

¹ Слудский Ф. А., О начале наименьшего действия, «Математический сборник», т. 2, 1866.

² Остроградский М. В., Письмо к проф. Н. Д. Брашману, Математический сборник, т. 1, 1866, стр. 772.

³ Ostrogradsky M., Bull. phys.-math., т. 8, № 3, стр. 33—43, 6. X. 1848 (1850).

Остроградский высказал существенную для приложений мысль, что вариацию координат можно рассматривать как бесконечно малое их изменение, получившееся в силу изменения произвольных постоянных в общем решении дифференциальных уравнений движения¹.

Глубокие исследования М. В. Остроградского относятся собственно уже к чисто математическим проблемам общей теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления и потому выходят за границы нашей работы.

Можно сделать попытку подытожить основные этапы развития аналитической динамики до середины XIX в. Первым шагом явилось установление лагранжевой формы уравнений движения, затем разработка лагранжевой теории вариации произвольных постоянных, а также появление теории Пуассона. Следующим этапом явилось представление Гамильтоном интегралов дифференциальных уравнений движения посредством единственной характеристической функции, определяемой *a posteriori* посредством интегралов, предполагаемых известными, или посредством условия, что она одновременно удовлетворяет двум дифференциальным уравнениям в частных производных; установление им же канонических уравнений движения. Вслед за тем Якоби свел интегрирование дифференциальных уравнений к задаче нахождения полного интеграла единственного дифференциального уравнения в частных производных и дал общую теорию связи интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных первого порядка. Наконец, была разработана теория систем канонических интегралов. Важнейшие обобщения как в формулировке вариационного принципа Гамильтона—Остроградского, так и в теории канонических уравнений были получены Остроградским.

Надо отметить, что дифференциальные уравнения динамики являются только одним из классов дифференциальных уравнений, которые являются предметом изучения математиков. Якоби особенно много сделал в этой области и, в частности, изучил также так называемую изопериметрическую систему дифференциальных уравнений, т. е. систему, возникающую при изучении любой задачи вариационного исчисления. Если рассмотреть общую теорию систем дифференциальных уравнений и затем исследовать обобщенную гамильтонову систему как частный случай этой теории, то можно было бы показать, что обобщенная лагранжева форма дифференциальных уравнений динамики может быть преобразована в гамильтонову форму, хотя именно лагранжевы уравнения должны рассматриваться, собственно говоря, как частный случай изопериметрической системы дифференциальных уравнений.

¹ Ostrogradsky M., Note sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique, Mém. de l'Ac. Sci. St. Petersburg., t. 1, 1831, стр. 109—115; Sur les variations des constantes arbitraires dans les problèmes de dynamique, Bull. de l'Ac. Sci. St. Petersburg., t. 7, 1849, стр. 113—125.

6. Касательные преобразования Софуса Ли

Как ясно из предшествовавшего изложения, существует внутренняя связь между аналитической динамикой Гамильтона—Якоби и общей теорией преобразований. Однако только Софус Ли раскрыл эту связь и придал ей поразительно красивую и богатую многообразными следствиями форму.



Софус ЛИ (1842—1899)

Основное в динамике Гамильтона—Якоби это вариационный принцип, связанный с оптико-механической аналогией, теория интегрирования канонических уравнений Гамильтона и уравнение в частных производных Гамильтона—Якоби в связи с касательным преобразованием. Внутренний смысл всей этой математической схемы заключен в ее связи с принципом Гюйгенса, в возможности представлять механическое движение не только в виде перемещения тела (системы точек), но и в виде развертывания касательного преобразования поверхностей равного действия, в глубокой связи траектории луча с некоторой поверхностью (волновой или «дей-

ствия»), выражающей взаимосвязанность корпускулярного и волнового аспектов движения в механике и физической оптике, глубокий корпускулярно-волновой синтез.

Интересующий нас вид преобразований был развит Софусом Ли.

Марий Софус Ли родился в 1842 г. в Норвегии. С 1872 г. он преподавал в университете в Осло, а с 1886 г. в Лейпцигском университете, в котором он заменил Клейна. В 1898 г. он был приглашен в Осло на кафедру теории групп преобразований, созданную им в университете.

Смелая новизна взглядов, сила геометрической интуиции, независимость мысли характеризуют его творчество. Созданная им новая концепция задачи интегрирования дифференциальных уравнений привела его к открытию касательных преобразований и к теории конечных непрерывных групп преобразований. Умер Софус Ли в 1899 г.

Занимаясь в Париже у Жордана, Софус Ли поставил перед собой задачу распространить методы теории групп Эвариста Галуа на проблему интегрирования дифференциальных уравнений. Отсюда он пришел к новому типу групп, названных им непрерывными группами преобразований.

В приложениях теории групп Ли к уравнениям в частных производных большую роль играют так называемые касательные преобразования, т. е. преобразования, переводящие каждый элемент пространства, т. е. точку и проходящую через нее касательную гиперплоскость, в другой элемент того же пространства¹.

Для работы Софуса Ли характерно глубокое развитие понятия непрерывной группы². Первоначальное понятие непрерывной (топологической) группы возникло в связи с рассмотрением групп непрерывных преобразований.

¹ Подробное и глубокое изложение теории групп Ли см. в книге: Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, Гостехиздат, М.—Л., 1940.

² Говорят, что класс некоторых операций является группой, если выполняются следующие условия: 1) он содержит тождественный оператор; 2) наряду с любым данным оператором в него входит и оператор, обратный данному; 3) произведение двух любых операторов из этого класса также входит в этот класс.

Строгое определение группы канонических преобразований следующее. Так как 1) каждому частному виду канонического преобразования, производимому функцией S , которое переводит q_i, p_i в $\bar{q}_i, \bar{p}_i$, соответствует обратное каноническое преобразование, производимое функцией S , которое преобразует $\bar{q}_i, \bar{p}_i$ в q_i, p_i ; 2) существует тождественное каноническое преобразование, производимое $S = 0$, которое оставляет q_i, p_i неизменными; 3) последовательные канонические преобразования, производимые S_1 и S_2 , эквивалентны каноническому преобразованию, производимому функцией $S_1 + S_2$; 4) преобразование, производимое сначала $S_1 + S_2$, а затем S_3 , эквивалентно преобразованию, производимому сначала S_1 , а затем $S_2 + S_3$, то канонические преобразования образуют группу. Так как, далее, порядок последовательных преобразований несуществен, то группа канонических преобразований — абелева.

Такая группа представляет с логической точки зрения соединение двух основных математических понятий — группы и топологического пространства. Если при рассмотрении группы мы изучаем в наиболее чистом виде алгебраическую операцию умножения, то при изучении топологического пространства изучаем операцию предельного перехода. В непрерывной группе объединены обе эти операции. Группа Ли является конкретным понятием теории топологических групп, в котором уже в определении заключено условие дифференцируемости функций, дающих операцию перемножения элементов группы.

Ли подробно изучил такие непрерывные группы преобразований. Элементом непрерывной группы является преобразование, переводящее каждую точку n -мерного пространства в другую такую же точку. Таким образом, каждое преобразование задается системой n функций от n переменных

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (120)$$

Различные элементы группы отличаются значениями параметров, входящих в функции, выражающие преобразование

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (121)$$

Существенным свойством группы является то, что два преобразования группы, последовательно сделанные над пространством, равносильны одному преобразованию той же группы.

Оказалось, что вопрос об интегрируемости дифференциальных уравнений в квадратурах связан с вопросом о структуре группы преобразований, которые не изменяют данного уравнения. Для того чтобы уравнение интегрировалось в квадратурах, необходимо и достаточно, чтобы эта группа обладала особыми структурными свойствами, принадлежала к числу так называемых интегрируемых (или разрешимых) групп.

Якоби первым показал, что интегрирование канонических систем допускает особые, свойственные этим системам преобразования. После него простые методы интегрирования таких систем развили Вейлер, А. Майер и С. Ли.

С. Ли вывел теорию Гамильтона—Якоби новым способом, исходя из развитой им теории касательного преобразования¹. Рассмотрим простой случай конечного числа свободных точек, движущихся под действием взаимного притяжения и под действием неподвижных точек. Так как введение независимых переменных x_i и $\dot{x}_i$

¹ См., например, Цитович Н., Теория Гамильтона—Якоби—Ли, СПб, 1899; Study, Über Hamiltons geometrische Optik und deren Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen, Jahrb. d. Deutsch. Mat. Ver., Bd. 14, 1950, стр. 424.

приводит систему уравнений движения к каноническому виду, то согласно С. Ли выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum \dot{x}_i dx_i \quad (122)$$

должно иметь вид

$$d\Omega + \varrho dt. \quad (123)$$

Действительно, из выражения

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum \dot{x}_i dx_i = \sum \frac{\delta \dot{x}_i}{\delta t} dx_i + \sum \dot{x}_i d \frac{\delta x_i}{\delta t}$$

найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum \dot{x}_i dx_i = \sum \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum \dot{x}_i d\dot{x}_i = d \left(U + \frac{1}{2} \sum \dot{x}_i^2 \right) - \frac{\partial U}{\partial t} dt, \quad (124)$$

где U — потенциальная функция.

Рассмотрим теперь общий случай, когда координаты связаны несколькими соотношениями, могущими включать также и время t :

$$f_k(x_i, t) = 0. \quad (125)$$

Согласно Лагранжу движение определяется уравнениями

$$\frac{\delta \dot{x}_i}{\delta t} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

совместно с уравнениями (125). В этом случае также возможно придать выражению (122) вид (123). В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum \dot{x}_i dx_i = d \left(U + \frac{1}{2} \sum \dot{x}_i^2 \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \sum \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial t} \right) dt, \quad (126)$$

так как все df_k обращаются в нуль.

Если поставить себе задачу определить величины x_i в функции времени так, чтобы интеграл

$$\int \varphi(x_i, \dot{x}_i, t) dt$$

имел экстремальное значение, то для этого, как доказывается в вариационном исчислении, нужно, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta t - \delta \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_i} = 0. \quad (127)$$

Эти уравнения совместно с уравнениями $\frac{\delta x_i}{\delta t} = \dot{x}_i$ образуют $2n$ -членную совместную систему, которая согласно Якоби принимает канонический вид, если ввести в качестве переменных величины

$$x_i, p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_i}, t.$$

Для доказательства этого фундаментального предложения образуем производную по t от $\sum p_i dx_i$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum p_i dx_i &= \sum \frac{\partial p_i}{\partial t} dx_i + \sum p_i d \frac{\partial x_i}{\partial t} = \\ &= \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_i} d\dot{x}_i = d\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (128)$$

согласно определению величин p_i и уравнению (127), что и доказывает предложение.

В замечательной работе, опубликованной в 1877 г.¹, Софус Ли рассмотрел связь касательного преобразования² с задачей возмущенного движения. Глубокая мысль Ли состоит в том, что проблема теории возмущений по самому существу есть проблема преобразования. Он указывает, что в теории возмущений рассматривается следующая задача: определить наиболее общее преобразование

$$\left. \begin{aligned} x'_k &= X_k(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \\ p'_k &= P_k(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n), \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

которое одновременно преобразует систему, имеющую форму

$$\dot{x}_k = \frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial F}{\partial x_k}, \quad (130)$$

в систему той же формы между новыми переменными. Эти преобразования Ли назвал «касательными». Дело в том, что если две кривые на исходной плоскости касаются одна другой, то это означает не что иное, как то, что они имеют общий линейный элемент. Тогда и соответствующие им кривые в новой плоскости преобразования также должны иметь общий линейный элемент, т. е. общую точку с общим направлением в ней. Касание двух кривых является, следовательно, инвариантным свойством в этом преобразовании. На это и указывает его название.

Касательное преобразование Софуса Ли, имеющее исключительное значение в общей теории преобразований, находит применение в механике, как в силу своей связи с теорией возмущений, так и из-за того, что так называемое каноническое преобразование, столь важное в динамике, является частным случаем касательного преобразования³.

¹ Lie S., Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen, Arch. for Math. of Nat. — Wid., т. XI, Kristiania, 1877, стр. 128—156; «Сборник», стр. 404—424.

² Применяется также термин «контактное преобразование», которое в общем, несмотря на различное понимание его у разных авторов (многие авторы называют контактным такое преобразование, при котором t преобразуется наряду с q_i и p_i , как в ковариантной релятивистской теории), можно считать совпадающим с каноническим.

³ Одновременно с С. Ли преобразования этого типа изучал Матье.

В уравнениях Гамильтона переменными, которые определяют движение механической системы, являются обобщенные координаты q и обобщенные импульсы p . Гамильтонова функция $H(p, q)$, которая входит в гамильтоновы уравнения, обычно является функцией обеих этих переменных. Если мы преобразуем переменные q и p в новые переменные $\bar{q}$ и $\bar{p}$ посредством какого-либо произвольного преобразования, то общая форма гамильтоновых уравнений изменится. Однако Якоби показал, что существует некоторое преобразование, отличающееся тем свойством, что оно оставляет форму этих уравнений неизменной. Так как уравнения Гамильтона часто называют каноническими уравнениями динамики, то указанным преобразованиям было дано наименование канонических преобразований. Канонические преобразования представляют собой специальный случай касательного преобразования. Касательное преобразование в трехмерном пространстве определяется так:

$$\left. \begin{aligned} x' &= f(x, y, z, p_x, p_y), \\ y' &= \varphi(x, y, z, p_x, p_y), \\ z' &= \psi(x, y, z, p_x, p_y). \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

В том случае, когда ни x' , ни y' не зависят от z , и только z' зависит от этой переменной, причем z' имеет вид $z + \chi(x, y, p_x, p_y)$, мы имеем каноническое преобразование.

Предположим, что мы произвели некоторое каноническое преобразование гамильтоновых уравнений некоторой данной задачи. Уравнения сохранили свою форму, но гамильтонова функция $H(q, p)$ превратилась в функцию $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$ новых переменных $\bar{q}$ и $\bar{p}$. Если мы умеем интегрировать новые гамильтоновы уравнения, то решение исходных уравнений будет немедленно найдено, и задача тем самым решена. В общем случае новые уравнения могут не иметь никаких преимуществ перед исходными в отношении интегрируемости. Но Якоби показал, что если можно построить такое каноническое преобразование, которое преобразует гамильтонову функцию $H(p, q)$ в $\bar{H}(\bar{p})$, содержащую только переменные $\bar{p}$, то полученные уравнения Гамильтона могут быть немедленно проинтегрированы и, следовательно, динамическая задача решена. Таким образом, метод Якоби состоит в замене прямого интегрирования уравнений Гамильтона отысканием соответствующего канонического преобразования. Этот метод Якоби для интегрирования уравнений Гамильтона является примером преобразования одной математической задачи в другую. Вместо попыток прямо интегрировать уравнения Гамильтона мы ищем решение совершенно другого рода уравнения. Подобная же картина имеет место для случая связи между конформными преобразованиями и задач Дирихле.

Необходимо прежде всего указать, что совокупность канонических преобразований является той группой преобразований, по

отношению к которой действие остается инвариантным. Именно поэтому величина, называемая действием, занимает центральное место в классической механике. Вследствие этого введение кванта действия или, что то же самое, переход к квантовой механике означает коренное изменение всей системы классической механики. Естественно поэтому при таком переходе исследовать самые общие свойства механических систем, т. е. в первую очередь групповые свойства движения.

Для механики основной группой преобразований являются канонические преобразования. Группу преобразований можно определить либо посредством бесконечно малых преобразований, либо посредством инвариантов этой группы. Первый способ, в котором задаются бесконечно малые изменения канонических переменных q_i, p_i при бесконечно малом каноническом преобразовании, выражен уравнениями Гамильтона, второй—инвариантностью действия.

Так как новые переменные Q_i и P_i — канонические, то они должны удовлетворять принципу Гамильтона, т. е.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [\sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q, P, t)] dt = 0, \quad (131a)$$

в то время, как для старых переменных

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [\sum p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt = 0. \quad (131b)$$

Оба соотношения должны выполняться одновременно. Отсюда следует, что подынтегральные функции могут отличаться не больше чем на полную производную по времени некоторой функции F^1 .

Если под интегралом принципа Гамильтона прибавить еще полную производную любой функции $F = F(q, Q, t)$, то ничего не изменится, так как очевидно, что

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dF(q, Q, t) = \delta F \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

потому что на границах интегрирования все δq и δQ равны нулю.

Поэтому общее каноническое преобразование удовлетворяет соотношению

$$\sum p_k dq_k - H dt = \sum_k P_k dQ_k - \tilde{H} dt - dF. \quad (132)$$

¹ Такая функция F называется производящей функцией данного преобразования. Задание этой функции однозначно определяет уравнения преобразования

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(p, q, t), \\ P_i &= P_i(p, q, t). \end{aligned}$$

Для установления связи между старыми и новыми координатами составим полный дифференциал функции F :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial F}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial F}{\partial Q_k} dQ_k.$$

Тогда

$$\sum P_k dQ_k - \sum p_k dq_k + (H - \tilde{H}) dt = \sum \frac{\partial F}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial F}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах в правой и левой части, получим соотношения для вычисления новых координат, импульсов и гамильтоновой функции через старые

$$P_k = \frac{\partial F}{\partial Q_k}, \quad p_k = -\frac{\partial F}{\partial q_k}, \quad \tilde{H} = H - \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (133)$$

Приведем таблицу, в которой для четырех главных форм производящей функции F выписаны уравнения преобразования (в предположении, что между переменными, от которых зависит функция F , нет соотношений вида $\varphi_i(a_i, \beta_i) = 0$):

$F = F(q_i, Q_i, t)$	$F = F(q_i, P_i, t)$	$F = F(p_i, Q_i, t)$	$F = F(p_i, P_i, t)$
$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$	$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$	$q_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i}$	$q_i = -\frac{\partial F}{\partial p_i}$
$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}$	$P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}$	$Q_i = \frac{\partial F}{\partial P_i}$
$H = \tilde{H} - \frac{\partial F}{\partial t}$	$H = \tilde{H} - \frac{\partial F}{\partial t}$	$H = \tilde{H} - \frac{\partial F}{\partial t}$	$H = \tilde{H} - \frac{\partial F}{\partial t}$

В зависимости от выбора функции преобразования

$$F = F(Q_i, q_i, t), \quad F = F(Q_i, p_i, t), \quad F = F(P_i, q_i, t), \quad F = F(P_i, p_i, t)$$

получаем одну из четырех форм канонического преобразования. Из них особенно часто пользуются второй и реже — первой. Третья форма совершенно эквивалентна второй, так как понятия «старые» и «новые» координаты и «импульсы» относительны, а функции $F(Q_i, p_i, t)$ и $F(P_i, q_i, t)$ отличаются друг от друга лишь наименованием «старых» и «новых» координат и импульсов.

Легко видеть, что в этом случае новые координаты зависят не только от старых координат, но и от старых импульсов. Как известно, в механике, так называемые, точечные преобразования связывают старые и новые координаты системы, рассмотренные же здесь более общие преобразования связывают новые координаты со старыми координатами и импульсами. Однако эти преобразования являются преобразованиями не в обычном трехмерном, а в шестимерном фазовом пространстве.

Производящая функция канонического преобразования может быть чисто математической величиной, гамильтонова же главная функция, которая является производящей, тесно связана с вариационным интегралом. Эта функция имеет поразительную геометрическую интерпретацию: она определяет расстояние между двумя точками в соответственно определенной метрической геометрии, выраженное как функция координат этих точек. Главная функция есть производящая функция того частного вида канонического преобразования, которое непосредственно, без участия каких-либо промежуточных внешних точек, связывает два состояния фазового флюида, соответствующие двум различным моментам времени.

Основное соотношение (132), найденное Ли, может быть несколько обобщено. В 1947 г. Хуа Чунг-Ли¹ показал, что в общем случае надо записать канонические преобразования в виде

$$\sum P_i Q_i - \bar{H} dt = c(\sum p_i dq_i - H dt) + dF,$$

где c — постоянный множитель. Обычно c полагается равным единице, т. е. рассматривается унивалентное каноническое преобразование.

В несколько иной, но очень важной форме можно охарактеризовать рассматриваемые преобразования с помощью введенной Ли инвариантной величины

$$\sum \delta p_i dq_i - dp_i \delta q_i,$$

которую Пфафф назвал билинейным ковариантом дифференциальной формы $\sum p_i dq_i$. Надо отметить, что это выражение играет в каноническом преобразовании роль, аналогичную величине ds^2 , являющейся инвариантом точечного преобразования и определяющей риманову метрику пространства конфигураций. Билинейный ковариант тоже квадратичен в дифференциалах, но связан с двумя перемещениями и поэтому не может представлять расстояния. Вследствие этого геометрия фазового пространства не есть обычная метрическая геометрия; она ближе всего к своеобразной геометрии, в которой могут быть измерены площади, но не расстояния.

Это обстоятельство еще не раз встретится нам в дальнейшем изложении.

Вернемся к рассмотрению канонического преобразования.

Действие канонического преобразования таково же, как вычитание полной производной по времени от производящей функции из лагранжевой функции, так как уравнение (132) может быть

¹ Hwa-Chung-Lee, The universal Integral Invariants of Hamiltonian Systems and Application of the Theory of Canonical Transformations, Proceedings of the R. Soc. of Edinburgh, sect. A, v. LXII, part 3, 1946—1948, стр. 237—246.

записано так:

$$\bar{L} = L - \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где $\bar{L} = P_i \dot{Q}_i - \bar{H}$. Это преобразование оставляет инвариантной форму уравнений Лагранжа; иначе говоря, для преобразованных обобщенных импульсов имеем

$$P_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i}, \quad \dot{P}_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i}; \quad (134)$$

последнее уравнение есть уравнение движения.

Необходимо отличать два вида канонических преобразований. В первом мы переходим от одних переменных к другим для одного и того же состояния системы, во втором же изучаем законы изменения канонических переменных, которые выражают законы изменения состояний механической системы.

Рассмотрим произвольное каноническое преобразование, определенное условием

$$\sum (p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i) = \delta S, \quad (135)$$

и преобразуем переменные P_i и Q_i в другие переменные $\bar{p}_i$, $\bar{q}_i$ с помощью второго канонического преобразования

$$\sum (P_i \delta Q_i - \bar{p}_i \delta \bar{q}_i) = \delta S'. \quad (136)$$

Сложив эти два уравнения, найдем

$$\sum (p_i \delta q_i - \bar{p}_i \delta \bar{q}_i) = \delta (S + S'). \quad (137)$$

Это уравнение показывает, что прямой переход от q_i , p_i к $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$ есть опять каноническое преобразование. Это означает, что произведение двух канонических преобразований есть также каноническое преобразование. Другими словами, канонические преобразования образуют группу; эта группа играет основную роль в теории интегрирования дифференциальных уравнений С. Ли, в которой полное решение системы дифференциальных уравнений сводится к изучению непрерывной группы преобразований. Канонические уравнения находятся в самой тесной связи с этими непрерывными преобразованиями.

Рассмотрим производящую функцию S , которая содержит параметр t :

$$S = S(q_i, Q_i, t). \quad (138)$$

Уравнение (138) для производящей функции определяет бесконечное число канонических преобразований, так как каждому значению t соответствует определенное каноническое преобразование. Исследуем преобразования для некоторого определенного t и для соседнего $t + \Delta t$, рассматривая преобразование как отражение

пространства самого на себя. Первое преобразование отображает точку P фазового пространства в некоторую точку Q , а второе преобразование отображает точку P в некоторую другую точку Q' . Так как S есть непрерывная функция t , то две точки Q и Q' близки одна к другой. В силу группового свойства канонических преобразований переход от Q к Q' есть также каноническое преобразование. В данном случае мы имеем специальный тип преобразования, в котором каждая точка фазового пространства преобразуется в соседнюю точку. Следовательно, можно положить

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= q_k + \Delta q_k, \\ P_k &= p_k + \Delta p_k, \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

где Δq_k и Δp_k малые величины, произведениями и квадратами которых можно пренебречь. Такое преобразование называется бесконечно малым каноническим преобразованием. Оно обладает тем свойством, что может быть выражено в явной форме, в то время как произвольное каноническое преобразование не допускает явного представления.

Обозначим исходные переменные через Q_i и P_i . Новые переменные обозначим q_i , p_i при параметре t и $q_i + \Delta q_i$ и $p_i + \Delta p_i$, если параметр принимает значение $t + \Delta t$. Имеем:

$$\sum (p_i \delta q_i - P_i \delta Q_i) = \delta S, \quad (140)$$

$$\sum [(p_i + \Delta p_i) \delta(q_i + \Delta q_i) - P_i \delta Q_i] = \delta S', \quad (141)$$

где

$$\begin{aligned} S' &= S'(q_i + \Delta q_i, Q_i, t + \Delta t) = \\ &= S + \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t = \\ &= S + \sum p_i \Delta q_i + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t. \end{aligned}$$

Найдем разность выражений (140) и (141)

$$\sum (\Delta p_i \delta q_i - \Delta q_i \delta q_i) = \delta \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t. \quad (142)$$

Введя

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i},$$

найдем Q_i как функции q_i и p_i . Подставим найденные Q_i в $\frac{\partial S}{\partial t}$ и обозначим полученную таким образом функцию через $-B$, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -B(q_i, p_i, t). \quad (143)$$

С помощью уравнения (143) получим из формулы (142)

$$\sum (\Delta p_i \delta q_i - \Delta q_i \delta p_i) = - \sum \left(\frac{\partial B}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial B}{\partial p_i} \delta p_i \right) \Delta t,$$

откуда

$$\Delta q_i = \frac{\partial B}{\partial p_i} \Delta t, \quad \Delta p_i = - \frac{\partial B}{\partial q_i} \Delta t. \quad (144)$$

Это и есть уравнение бесконечно малого канонического преобразования в явном виде. Вместо «абсолютных координат» $q_i + \Delta q_i$, $p_i + \Delta p_i$ новой системы отсчета здесь использованы «относительные координаты» Δq_i и Δp_i . Эти координаты явно выражены с помощью единственной функции B , которая характеризует преобразование и может быть выбрана как произвольная функция переменных q_i и p_i .

Пусть теперь $\Delta t \rightarrow 0$; тогда, разделив обе части уравнений (144) на Δt , получим в пределе дифференциальные уравнения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial B}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial B}{\partial q_i}. \quad (145)$$

Это — канонические уравнения движения, если параметр t отождествить с временем, а функцию B — с гамильтоновой функцией H . Для полного понимания этого результата представим себе, что мы наблюдаем движение некоторой «фазовой жидкости» в течение некоторого интервала времени Δt . Отметим каждую частицу этой жидкости. Сделаем моментальные снимки этой жидкости в моменты времени t и $t + \Delta t$. Все частицы жидкости бесконечно мало сместятся из своего начального положения. Это бесконечно малое смещение представляет каноническое преобразование фазовой жидкости, причем этот процесс может быть повторен сколько угодно раз. В целом движение фазовой жидкости есть непрерывная последовательность канонических преобразований.

Движение механической системы может рассматриваться как проблема преобразования. Последовательные состояния фазового флюида представляют непрерывно изменяющиеся отображения пространства самого на себя. Эти отображения являются всегда каноническими.

Выше мы, начав с произвольной производящей функции S , построили гамильтонову функцию H , содержащую параметр t . Можно поступить и наоборот. Пусть движение представляется некоторой гамильтоновой функцией $H(q_i, \dot{q}_i, t)$, вид которой надо найти. Заменим p_i через $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ и попытаемся найти такую функцию S , для которой имело бы место уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = - H. \quad (146)$$

Это есть задача интегрирования. Первая задача была, конечно, проще, так как требовала только дифференцирований и исключений. Задача интегрирования решается на основе того, что, как можно показать, для каждой данной функции H может быть найдена соответствующая функция S (строго говоря, бесконечное число возможных функций S). Построив эту функцию, мы придем к функции

$$S = S(q_i, Q_i, t),$$

которая является производящей для бесконечного семейства канонических преобразований. Точка Q_i, P_i преобразуется в точку q_i, p_i , положение которой непрерывно изменяется с течением времени t , и это движение в точности представляет движение механической системы, если мы позволим изменяться величине t , в то время как Q_i, P_i остаются постоянными.

Взяв производную по q_k от уравнений

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (147)$$

получим :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_k}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial p_i}{\partial q_k}, \\ \frac{\partial p_k}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (148)$$

В канонических уравнениях p и q считаются независимыми, здесь же, как видно из уравнения (147), $p = f(q)$; кроме того в канонических уравнениях $\frac{\partial H}{\partial q_k}$ берется при постоянных p и t , а в уравнении (148) только при постоянном t . Поэтому уравнения (148) не совпадают с каноническими. Однако последние могут быть получены из них, если перейти к производным при постоянных p и t . В самом деле,

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_t = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_{t,p} - \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)_q \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)_t = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_{t,p} - \sum_i \frac{dq_i}{dt} \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)_t$$

или

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)_t \dot{q}_i = \dot{p}_k = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)_{t,p},$$

что и требовалось доказать.

Как мы уже отметили, геометрическая и аналитическая картины движения некоторой системы в фазовом пространстве аналогичны движению некоторой жидкости (флюида). В гидродинамике движение жидкости в трехмерном пространстве может быть описано как корпускулярным, так и полевым способом. В первом случае следят

за частицей жидкости и, отметив ее начальные координаты x_0, y_0, z_0 , определяют положение ее в любой последующий момент времени уравнениями

$$x = f_1(x_0, y_0, z_0, t),$$

$$y = f_2(x_0, y_0, z_0, t),$$

$$z = f_3(x_0, y_0, z_0, t).$$

С полевой точки зрения рассмотрим поле скоростей

$$\dot{x} = \frac{\partial f_1}{\partial t} \text{ и т. д.}$$

и решим эти уравнения для x_0, y_0, z_0 , выразив их в функции x, y, z, t . Подставив полученные выражения в уравнения для $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, найдем $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ как функции x, y, z, t :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= F_1(x, y, z, t), \\ \dot{y} &= F_2(x, y, z, t), \\ \dot{z} &= F_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Эти выражения определяют вектор скорости для любой точки пространства и времени.

Если дано корпускулярное описание, то полевое может быть получено с помощью исключений и дифференцирований, если дано полевое описание, то корпускулярное может быть получено интегрированием уравнений (149). Оба описания эквивалентны и внутренне связаны, представляя собой два аспекта единого процесса движения. Эта гидродинамическая картина сохраняется и в фазовом пространстве с заменой трех координат x, y, z на $2n$ координат q_n и p_n . Поведение «фазового флюида» подобно поведению обычной жидкости.

В гидродинамике идеальная жидкость несжимаема. Эта несжимаемость может быть также выражена как в корпускулярном, так и в полевом представлении.

В полевом аспекте условие несжимаемости имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (150)$$

«Фазовый флюид (или жидкость)», связанный с каноническими уравнениями, имитирует поведение несжимаемой жидкости. В самом деле, фазовая жидкость — $2n$ -мерная и для нее получим

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (151)$$

Если рассматривать канонические уравнения не как уравнения механики, а как инвариант канонического преобразования, то,

очевидно, что они непосредственно доказывают это соотношение и притом не только для консервативной, но и для любой системы. Используя теорему Грина о преобразовании объемного интеграла от дивергенции в поверхностный интеграл потока, получим из уравнения (151), что полный поток фазовой жидкости через любую замкнутую поверхность фазового пространства всегда равен нулю, т. е. этот флюид движется как несжимаемая жидкость. Это — теорема Лиувилля, открытая им в 1838 г. Она позволяет добавить еще один закон сохранения к законам сохранения механики. Возьмем произвольный $2n$ -мерный объем фазового пространства

$$\sigma = \int dq_i dp_i$$

и рассмотрим движение точки этой области вместе с фазовым флюидом. Хотя область может деформироваться, ее объем остается постоянным в течение движения

$$\sigma = \text{const.}$$

Весьма важная для статистической физики теорема Лиувилля гласит: плотность континуума изображающих точек в фазовом пространстве остается с течением времени постоянной, т. е. является интегралом движения.

Континуум таких точек движется как несжимаемая жидкость. Если движение происходит в постоянном поле и функция распределения стационарна, то плотность ϱ , являющаяся интегралом движения, должна зависеть от других независимых интегралов полной энергии H . Полагая $\varrho = f(H)$, получим в статистике распределение Максвелла—Больцмана. Остальные интегралы движения, например интегралы количества движения и моментов количества движения, в этом случае обычно в среднем равны нулю.

Канонические уравнения Гамильтона остаются инвариантными при преобразовании вида

$$Q_r = Q_r(q_i, t), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Однако они инвариантны и для более общего вида преобразований, например:

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= Q_r(q_i, p_i, t), \\ P_r &= P_r(q_i, p_i, t). \end{aligned} \right\} \quad (152)$$

Найдем условия, при которых уравнения Гамильтона остаются при преобразовании инвариантными. Определим функцию

$$\sum p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i)$$

где p_i и q_i независимы друг от друга. Из условия, что интеграл по времени между двумя точками от этой функции должен быть ста-

ционарным, находим

$$\dot{p}_r + \frac{\partial H}{\partial q_r} = 0, \quad \dot{q}_r - \frac{\partial H}{\partial p_r} = 0,$$

т. е. уравнения Гамильтона. Хотя $\sum p_r \dot{q}_r - H = L$, указанное вариационное условие тем не менее более общее, чем принцип Гамильтона, так как p и q изменяются независимо.

Предположим далее, что мы имеем функцию—такую, что

$$\sum_r P_r \dot{Q}_r - \bar{H}(Q_r, P_r) = \sum_r p_r \dot{q}_r - H(q_r, p_r) - \frac{dF}{dt}, \quad (153)$$

где F — есть какая-либо функция Q_r, q_r, t и, следовательно, также q_r, p_r, t . Преобразованные уравнения будут

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_r} = \dot{Q}_r, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_r} = -\dot{P}_r, \quad (154)$$

так как стационарность интеграла $\int (\sum p \dot{q} - H) dt$ никак не зависит от координатной системы, а интеграл $\int \frac{dF}{dt} dt$, представляющий просто разность между значениями F для крайних точек границ интегрирования, независим от координат.

Можно доказать инвариантность уравнений Гамильтона и независимо от вариационного исчисления. Воспользуемся уравнением Лагранжа, имея в виду, что в этом случае p не связаны с q , и для p можно при желании ввести обозначения

$$q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{2n}.$$

Введение $\frac{dF}{dt}$ в правую часть уравнения (153) оправдано тем, что уравнение Лагранжа удовлетворяется тождественно, если функция, для которой оно написано, является полным дифференциалом.

Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\frac{dF}{dt} \right)}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial \left(\frac{dF}{dt} \right)}{\partial q_r} = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \left(\sum_s \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s + \frac{\partial F}{\partial t} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial q_r} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial}{\partial q_r} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right) = \\ &= \sum_s \frac{\partial^2 F}{\partial q_s \partial q_r} \dot{q}_s + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_r} - \sum_s \frac{\partial^2 F}{\partial q_r \partial q_s} \dot{q}_s - \frac{\partial^2 F}{\partial q_r \partial t} = 0. \end{aligned} \quad (155)$$

Уравнение (153) имеет место в том и только в том случае, когда

$$\sum_r P_r dQ_r = \sum_r p_r dq_r - dF, \quad (156)$$

$$\bar{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (157)$$

где dF в выражении (156) относится только к координатам, а не ко времени. Уравнения (156) и (157) достаточны для того, чтобы преобразовать уравнения Гамильтона в уравнения (154) в новой координатной системе.

Найдем условия для канонического преобразования несколькими иным способом. Может существовать одно или более уравнений, связывающих только Q и q .

Пусть имеем m уравнений

$$f_a(q_r, Q_r) = 0 \quad (a = 1, 2, \dots, m); \quad (158)$$

по дифференцировании получим

$$\sum_r \left(\frac{\partial f_a}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial f_a}{\partial Q_r} dQ_r \right) = 0.$$

Так как уравнение (153) имеет место при q и Q , изменяющихся любым образом, согласным с этим уравнением, то

$$\left. \begin{aligned} p_r &= \sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial q_r} + \frac{\partial F}{\partial q_r}, \\ P_r &= - \sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial Q_r} - \frac{\partial F}{\partial Q_r}, \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

где λ_a — неопределенный множитель.

Уравнения (158) и (159) дают $(2n + m)$ уравнений для вычисления Q , P и λ и, следовательно, искомого условия для канонического преобразования. Они были введены Якоби, который применял их в теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Установим условия для канонического преобразования, в котором F есть функция других переменных, например q и P , а не q и Q . Обозначим через F^* величину $F + \sum_r P_r Q_r$ и напомним уравнение (153) в виде

$$- \sum \dot{P}_r Q_r - \bar{H}(Q_r, P_r) = \sum p_r \dot{q}_r - H(q_r, p_r) - \frac{dF^*}{dt},$$

или, умножив на dt ,

$$\begin{aligned} & - \sum Q_r dP_r - \bar{H}(Q_r, P_r) dt = \\ & = \sum p_r dq_r - H(q_r, p_r) dt - \sum \frac{\partial F^*}{\partial P_r} dP_r - \sum \frac{\partial F^*}{\partial q_r} dq_r - \frac{\partial F^*}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (160)$$

Приравнявая коэффициенты при дифференциалах в этом уравнении, мы получим достаточное условие для канонического преобразования:

$$p_r = \frac{\partial F^*}{\partial q_r}, \quad Q_r = \frac{\partial F^*}{\partial P_r}, \quad \bar{H} = H + \frac{\partial F^*}{\partial t}. \quad (161)$$

Интересной задачей является найти группу обобщенных координат и импульсов, определенных так, чтобы канонические уравнения движения Гамильтона были

$$\dot{\alpha}_r = 0, \quad \dot{\beta}_r = 0, \quad (162)$$

где α_r и β_r соответственно импульсы и координаты. Очевидно, что это требование будет удовлетворено, если $\bar{H} = 0$. Если через W обозначим функцию преобразования F^* для этого случая, то

$$H(q_r, p_r) + \frac{\partial W(\alpha_r, q_r)}{\partial t} = 0. \quad (163)$$

Подставив β_r и α_r вместо Q_r и P_r , напомним

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r}, \quad \beta_r = \frac{\partial W}{\partial \alpha_r}. \quad (164)$$

Из последних двух уравнений получим:

$$H\left(q_r, \frac{\partial W}{\partial q_r}\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0. \quad (165)$$

Далее, если β_r и α_r — обобщенные координаты и импульсы и, следовательно, функции только p и q , то W может быть определено так, что уравнения (164) дают одно и только одно значение для α_r . В этом случае уравнение (165) есть уравнение Гамильтона—Якоби.

Перейдем теперь к таким каноническим преобразованиям, для которых новые обобщенные координаты и импульсы отличаются от прежних только на бесконечно малые величины, т. е.

$$Q_r = q_r + \lambda g_r, \quad P_r = p_r + \lambda h_r, \quad (166)$$

где λ — бесконечно малая постоянная. Уравнение (156) запишется в этом случае так:

$$\sum (p_r + \lambda h_r) d(q_r + \lambda g_r) - p_r dq_r = -dF,$$

откуда

$$\sum \lambda (h_r dq_r + p_r dg_r) = -dF. \quad (167)$$

Из этого уравнения очевидно, что $F = \lambda G$, где G — некоторая функция от q и p , и поэтому можно написать:

$$\sum (h_r dq_r - p_r dg_r) = -dG$$

или

$$\sum (h_r dq_r - g_r dp_r) = -d(G + \sum p_r g_r),$$

так что

$$\sum (h_r dq_r - g_r dp_r) = -dk, \quad (168)$$

если

$$K = G + \sum p_r g_r, \quad (169)$$

откуда

$$g_r = \frac{\partial K}{\partial p_r}, \quad h_r = -\frac{\partial K}{\partial q_r}. \quad (170)$$

Таким образом, «весь процесс движения можно рассматривать как постепенное развертывание контактного преобразования»¹.

Итак, синтез корпускулярного и полевого (поле, в каждой точке которого задана функция действия как $S = S(q_i, t)$) аспектов физических процессов имеет место уже в классической механике — как в еще элементарной форме оптико-механической аналогии, так и в развитой форме представления движения как канонического преобразования с самой общей теоретико-групповой точки зрения.

Изложенное есть непосредственное следствие уравнений Гамильтона, так как координаты и импульсы по истечении времени δt связаны с начальными координатами и импульсами уравнениями

$$Q_r = q_r + \dot{q}_r \delta t, \quad P_r = p_r + \dot{p}_r \delta t$$

и

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r}. \quad (171)$$

Функция преобразования будет такова:

$$H = G + \sum p_r \dot{q}_r,$$

т. е.

$$G = -(\sum p_r \dot{q}_r - H) = -L;$$

следовательно,

$$F = G \delta t = -L \delta t. \quad (172)$$

Для конечного времени функция преобразования примет вид

$$-\int L dt = -W, \quad (173)$$

¹ Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, ГТТИ, М.—Л., 1937, стр. 335—336. См. также Nordheim L., Die Prinzipie der Dynamik, Handbuch dr. Phys., т. V, 1927, стр. 439; Boltzmann L., Populäre Schriften. Die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik, Leipzig, 1925.

где W есть гамильтонова главная функция начальных координат q_{ra} , конечных координат q_{rf} и времени t . То, что q_{rf} и p_{rf} связаны с q_{ra} и p_{ra} посредством канонического преобразования, а W есть функция преобразования, может быть, следовательно, выведено прямо из определения W , так как

$$\frac{\partial W}{\partial q_{rf}} = p_{rf}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_{ra}} = -p_{ra},$$

что представляет собой специальный случай уравнений (159). Это другое доказательство упомянутой теоремы.

Итак, за 40 лет, протекших с момента опубликования первой работы Гамильтона по динамике, были разработаны, хотя может быть еще в недостаточно общей форме, основные понятия, идеи и математические методы так называемой аналитической механики Гамильтона—Якоби¹. В этот период (с 30-х по 70-е годы XIX в.) возникла, по существу, новая по форме ветвь аналитической механики. Она была вызвана к жизни глубокими математическими, механическими и физическими идеями, вытекавшими на этой стадии формирования механики в основном из внутренней (очень сложной) логики развития этих наук.

В итоге был создан тот аспект механики, который, сочетая в себе методы вариационного исчисления и теории групп преобразования, получил широкое развитие и многогранное применение в теоретической и прикладной механике и теоретической физике, поставив в то же время существенно новые проблемы перед математикой.

¹ Любопытно отметить, что профессор Казанского университета Д. Н. Зейлигер произнес в 1898 г. речь на тему «Очерк развития механики в текущем столетии» (О. Н. Зейлигер, Казань, 1898), где ни словом не упомянул о работах Гамильтона, Якоби и Остроградского.

ГЛАВА III

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФОРМЫ И ОБОБЩЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1. Вторая вариация интеграла действия

Ограничиваясь первой вариацией, мы не можем быть уверены, что условие $\delta I = 0$ определяет такую функцию $q(t)$, при которой интеграл принимает максимальное или минимальное значение. Можно только ручаться, что при произвольном бесконечно малом изменении вида функции $q(t)$ интеграл I в первом приближении (с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости) остается постоянным.

Для того чтобы определить, имеет ли место максимум или минимум, надо исследовать вторую вариацию интеграла; однако в большинстве задач и из самого физического содержания ясно, с каким экстремальным значением мы имеем дело, а кроме того для физики важно лишь составить лагранжеву функцию и уравнения для нее. Тем не менее вопрос о второй вариации интеграла действия был подробно изучен с математической точки зрения.

На основе результатов, рассмотренных в изложенных выше трудах Лагранжа, Гамильтона, Якоби, Остроградского, Ли, возник целый ряд новых математических и механических проблем.

Еще Якоби¹ показал, что при условии равенства нулю вариации простого определенного интеграла, вторая вариация интеграла может быть приведена к виду, удобному для исследования.

Основываясь на этом результате Якоби, Серре (1819—1885)² в нескольких мемуарах, напечатанных в период 1871—1879 г., решил вопрос о минимуме интеграла действия в общем виде, доказав, что вторая вариация интеграла действия для действительного движения положительна, и минимум этого интеграла имеет место

¹ J a c o b i C. G. J., Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen, Journal von Crelle, т. 17, 1837.

² S e r r e t J. A., Mémoire sur le principe de la moindre action. C. R., Mém. Acad. de Sc., 1871, см. ниже.

при некоторых ограничениях, наложенных на пределы интегрирования. Выражение второй вариации действия для действительного движения

$$\Delta^2 A = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i a_i \left(\Delta \frac{\partial T}{\partial q_i} + \Delta \frac{\partial U}{\partial q_i} - \Delta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) dt, \quad (1)$$

где Δ — знак полной вариации, а

$$a_i = \Delta q_i - \omega \frac{dq_i}{dt},$$

$$\omega = \frac{1}{2T} \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \Delta q_k.$$

В основе преобразований Серре лежит подстановка вместо вариаций координат линейных выражений от новых переменных. Так как n величин a_i не являются независимыми, а удовлетворяют соотношению

$$\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} a_k = 0,$$

то Серре выражает a_i через $n-1$ новых независимых переменных $\tilde{\omega}_\lambda$:

$$a_i = \sum_\lambda x_{i\lambda} \tilde{\omega}_\lambda, \quad (i = 1, 2, \dots, n; \lambda = 1, 2, \dots, n-1).$$

Все дальнейшие вычисления сводятся к определению коэффициентов этого преобразования $x_{i\lambda}$, исходя из требования, чтобы вторая вариация действия для действительного движения была положительна. Серре получает систему дифференциальных уравнений для определения $x_{i\lambda}$ и необходимое условие для минимума интеграла действия, сводящееся к неравенству нулю определителя

$$x = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1,n-1} & x_{2,n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n,n-1} \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{q}_n \end{vmatrix}.$$

Способ Серре довольно сложен.

Этой же проблеме посвятили свои исследования Е. Ф. Сабинин и В. В. Преображенский.¹

¹ Сабинин Е. Ф., Sur le principe de la moindre action, Annali di matematica pur. et appl., сер. II, т. XII, 1884. Преображенский В. В. О начале наименьшего действия, СПб, 1882.

Вопрос о минимуме интеграла действия в связи с так называемыми кинетическими фокусами исследовали У. Томсон и П. Тэт¹.

Как установил еще Якоби, для малых областей действие на действительной траектории есть минимум. Выберем теперь на траектории некоторую точку A и рассмотрим вторую траекторию, проходящую через эту точку и составляющую с первой малый угол. Пусть обе траектории встречаются еще в точке B . Будем неограниченно уменьшать угол между траекториями. Предельное положение точки B в таком случае называется кинетическим фокусом точки A исходной траектории. Можно доказать, что и для конечной области действие будет минимумом, если только на траектории конечная точка интервала лежит перед кинетическим фокусом начальной точки, если же, наоборот, фокус конечной точки лежит перед конечной точкой интервала, то действие не будет ни максимумом, ни минимумом. Иначе говоря, интеграл принципа наименьшего действия в форме Якоби по действительному пути имеет минимум, если начальное положение A_0 и конечное — A не удалены дальше известного предела, которым при фиксированном A_0 является такое предельное положение A , при котором эти два положения являются взаимными кинетическими фокусами.

В работе Д. К. Бобылева (1842—1917)² была установлена связь между результатами Серре, Сабинина и Преображенского, с одной стороны, и У. Томсона и П. Тэта — с другой.

Бобылев показал, что обращение в нуль детерминанта соответствующего интегралу действия $\int_{t_1}^{t_2} T dt$, отвечает совпадению данных положений системы со взаимными кинетическими фокусами движения. Кроме того, Бобылев объяснил значение кинетических фокусов движения и для интеграла $\int_{t_1}^{t_2} (T + U) dt$, показав, что действие Гамильтона перестает быть минимальным, если пределы интеграла являются взаимными кинетическими фокусами движения, что, как и для действия Лагранжа, приводит к обращению в нуль некоторого определителя.

Доказательство минимальности действия по Лагранжу для действительного движения можно провести и чисто алгебраически, не обращаясь к вариационному исчислению. Такое чисто алгебраическое доказательство начала наименьшего действия дано профессорами Ф. Г. Миндингом, О. И. Сомовым, В. П. Ермаковым и Г. К. Сусловым. Ввиду сложности исследования знака второй вариации

¹ Thomson W. and Tait P., Treatise on Natural Philosophy, v. I, Oxford, 1867.

² Бобылев Д. К., О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия, приложение к 61-му тому записок Академии наук, СПб., 1889.

ции алгебраические доказательства представляют значительное преимущество перед вариационными способами. В качестве примера таких алгебраических доказательств минимальности действия приведем доказательство, данное профессором Юрьевского университета Ф. Г. Миндингом (1806—1885)¹. Он представляет в виде суммы квадратов сумму

$$\sum m_i ds_i^2 = (dw)^2 + (c_{11} dq_1 + c_{12} dq_2 + \dots + c_{1n} dq_n)^2 + \dots \\ \dots + (c_{n-1,n-1} dq_{n-1} + \dots + c_{n-1,n} dq_n)^2. \quad (2)$$

Уравнение для определения коэффициентов c_{ik} и функции w Миндинг получает сравнением этого выражения с выражением

$$\sum m_i ds_i^2 = a_{11} dq_1^2 + 2 a_{12} dq_1 dq_2 + \dots + a_{nn} dq_n^2,$$

где a_{ij} — коэффициенты в выражении живой силы для консервативной системы с голономными стационарными связями. Затем он дает представление выражения

$$2(U + h) \sum m_i ds_i^2$$

в виде суммы квадратов и доказывает, что из условий, определяющих представление этой квадратичной формы в виде квадрата дифференциала функции w следуют уравнения движения. Тем самым доказано, что действие для действительного движения минимально так как для любого другого, совместимого со связями и происходящего с той же полной энергией h движения имеем

$$2(U + h) \sum m_i ds_i^2 > (dw)^2. \quad (3)$$

Заметим, что сравнение значений интеграла принципа наименьшего действия в форме Якоби для действительного и варьированных движений можно выполнить двумя путями. Первый состоит в прямом определении вариации при переходе от действительного пути к варьированному. Так поступали Томсон и Тэт², Д. К. Бобылев³ и др. Другой путь, может быть более короткий, состоит в преобразовании выражения принципа в форме Якоби к новым соответственно выбранным переменным. В этом случае интеграл принимает вид, позволяющий сразу сказать, что он действительно имеет минимум. Этим путем шли Липшиц⁴, Дарбу⁵ и Г. К. Суслов⁶.

¹ Миндинг Ф. Г., *Disquisitio de formae, in quam geometra britannici Hamilton integralia mechanicae analyticae redegit, origine genuina*, Dorpat, 1864

² Thomson W. and Tait P., *A Treatise on "Natural Philosophy"*, т. 1

³ Бобылев Д. К., О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия, Приложение к 61-му тому записок Академии наук СПб, 1889.

⁴ Lipschitz, Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, *Journal Crelle*, т. LXXIV

⁵ Darboux G., *Théorie des surfaces*, t. 2, Paris, 1899, гл. VIII.

⁶ Суслов Г. К., К вопросу о начале наименьшего действия, Отд. оттиски из Известий Киевского университета св. Владимира за 1891 г.

2. Изохронная и изоэнергетическая вариации в работах русских ученых

В развитии вариационных принципов механики в XIX в. наиболее спорным оказался вопрос о характере вариации в принципе наименьшего действия в форме Лагранжа.

Остроградский пишет по этому поводу: «Итак, если вместе с Лагранжем ограничить общность вариаций, относя их к кривым, которые все начинаются в точках с координатами x_{i0}, y_{i0}, z_{i0} и оканчиваются в точках x_{i1}, y_{i1}, z_{i1} , то мы будем иметь

$$\delta x_{i0} = 0, \quad \delta y_{i0} = 0, \quad \delta z_{i0} = 0, \quad \delta x_{i1} = 0, \quad \delta y_{i1} = 0, \quad \delta z_{i1} = 0,$$

следовательно,

$$\delta \int (U + T) dt = 0,$$

а это означает, что

$$\int (U + T) dt$$

имеет минимум. Согласно Лагранжу имеет минимум $\int T dt$, но его анализ неточен¹.

Начиная с 1866 г., когда было опубликовано письмо М. В. Остроградского к Н. Д. Брашману, в котором высказано сомнение в справедливости принципа наименьшего действия Эйлера—Лагранжа, в русской научной литературе появился ряд статей, в которых принцип наименьшего действия был рассмотрен с различных точек зрения. В этих работах представлены: Ф. А. Слудский (Московский университет), М. И. Талызин (Киевский университет), И. Д. Соколов (Харьковский университет), О. И. Сомов (Петербургский университет), Н. Д. Брашман (Московский университет), И. И. Рахманинов (Киевский университет).

Непосредственно следуя за Остроградским, Брашман (1796—1866) пишет: «Лагранж, заменив в уравнении $dU = dT$ дифференциал d вариацией δ , которая относится к возможным перемещениям, т. е., полагая $\delta U = \delta T$, приходит к заключению, что $\int 2T dt$ или $\int \sum m v ds$ должен быть максимум или минимум. Несмотря на то, что кажется очевидным, что нельзя заменить d через δ в уравнениях живых сил, однако, может быть полезным для тех, кто изучает рациональную механику, доказать еще раз простым примером, что правильным принципом наименьшего действия является принцип Остроградского и что заменять d через δ в уравнении живых сил непозволительно»².

¹ Письмо М. В. Остроградского Н. Д. Брашману, Математический сборник, т. 1, 1866, стр. XXVIII, «Сборник», стр. 771.

² Брашман Н. Д., Sur le principe de la moindre action, Melanges mathématiques et astronomiques, т. III, 1859, стр. 20.

Рахманинов (1826—1897)¹ считал, что он показал противоречие у Лагранжа: в движении системы имеет место закон сохранения механической энергии, а силы, действующие на систему, находятся в равновесии, что возможно только в частном случае движения по эквипотенциальной поверхности. Из этого противоречия Рахманинов делает вывод о «ложности» начала Лагранжа, хотя полученное противоречие, как и в примере Н. Д. Брашмана, доказывало только, что у Лагранжа значок δ означает не изохронную вариацию, как это предполагали Брашман и Рахманинов.

Ошибка Брашмана состоит в том, что он при доказательстве своего основного утверждения, что нельзя полагать $\delta U = \delta T$, рассуждает так: допустим такое равенство, умножим его на dt возьмем интеграл в некоторых пределах и примем вариации координат между пределами интеграла совершенно произвольными, тогда приходим к ложным заключениям. Однако $\delta U = \delta T$ есть условие, а в условии нельзя считать вариации совершенно произвольными, т. к. оно выражает связь между вариациями.

Рахманинов же, исходя из внешнего сходства принципа наименьшего действия Эйлера—Лагранжа и принципа Гамильтона—Остроградского, считает, что первый есть следствие второго, если подставить $\delta U = \delta T$. Это значит ошибочно заключать, что существование интеграла $T = U + h$ для данного движения обуславливает необходимое существование такого же интеграла для всех сравниваемых бесконечно близких движений.

М. И. Талызин² (1819—?) показал, что в принципе наименьшего действия в форме Лагранжа варьируется время, а не варьируется одна из координат. Только в этом случае будет иметь место равенство

$$\delta U = \delta T,$$

из которого исходил Лагранж при выводе своего начала. В самом деле, закон сохранения полной механической энергии дает

$$T = U + h, \quad (4)$$

где h — произвольная постоянная. Если за независимую переменную принимается одна из координат, то предполагается, что все координаты, скорости и время могут быть выражены как функции этой координаты. Тогда из уравнения (4) получим

$$\delta T = \sum m_i v_i \delta v_i = \delta U. \quad (5)$$

¹ Рахманинов И. И., Начало наименьшего действия, Киевские университетские известия, декабрь 1866, стр. 1—2.

² Талызин М. И., О начале наименьшего действия, Математический сборник, т. II, 1867.

Если же считать время неварьируемой переменной, то

$$\begin{aligned}\delta T &= \sum m_i v_i \delta v_i = \sum m_i \left[\frac{dx_i}{dt} \delta \left(\frac{dx_i}{dt} \right) + \frac{dy_i}{dt} \delta \left(\frac{dy_i}{dt} \right) + \frac{dz_i}{dt} \delta \left(\frac{dz_i}{dt} \right) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \sum m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) - \sum m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i). \quad (6)\end{aligned}$$

А если силы консервативны, то

$$\delta T = \frac{d}{dt} \sum m_i (\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i) - \delta U, \quad (7)$$

т. е.

$$\delta T \neq \delta U.$$

Это неравенство вариаций происходит от различия в сравниваемых движениях в обоих случаях. В первом случае для сравниваемых движений между заданными положениями имеет место уравнение

$$T = U + h,$$

во втором случае сравниваемые движения между заданными положениями одновременны (синхронны), т. е.

$$\delta dt = 0. \quad (8)$$

Якоби тоже принимал за независимую переменную одну из координат, но считал обязательным исключение времени из интеграла действия

$$\int_{t_0}^{t_1} T dt$$

при помощи теоремы сохранения полной механической энергии. Он говорит: «При помощи теоремы живых сил необходимо исключить из предыдущего интеграла время и все свести к пространственным элементам»¹ и далее, в седьмой лекции: «Исключение времени из интеграла, рассмотренного при получении принципа наименьшего действия, должно производиться обязательно при помощи принципа живой силы, а не при помощи принципа площадей или какого-либо другого интегрального уравнения задачи; только таким путем можно прийти к принципу наименьшего действия»². Якоби, как мы видели (гл. II), рассматривал интеграл

$$\int \sqrt{2(U + h) \sum m_i ds_i^2}$$

¹ Я к о б и, Лекции по динамике, 1936, стр. 39, шестая лекция.

² Там же, стр. 46.

и считал правильной формой принципа наименьшего действия равенство нулю вариации этого интеграла

$$\delta \int \sqrt{2(U + h) \sum m_i ds_i^2} = 0. \quad (9)$$

Талызин же показал, что исключение времени из интеграла $\int_{t_1}^{t_2} T dt$ при помощи уравнения сохранения механической энергии необязательно. При доказательстве принципа наименьшего действия он исходит из интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} T dt,$$

но беря вариацию этого интеграла, варьирует и dt

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \int_{t_1}^{t_2} T \delta dt, \quad (10)$$

и уже в равенстве (10) исключает δdt с помощью соотношения

$$v_i = \frac{ds_i}{dt},$$

заменяя δdt выражением

$$\delta dt = \frac{v_i \delta ds_i - ds_i \delta v_i}{v_i^2}. \quad (11)$$

Тогда

$$T \delta dt = \frac{1}{2} \sum m_i v_i \delta ds_i - \frac{1}{2} dt \cdot \delta T, \quad (12)$$

так как $\delta T = \sum m_i v_i \delta v_i$.

Подставляя выражение (12) в равенство (10), получаем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i v_i \delta ds_i, \quad (13)$$

а так как

$$v_i \delta ds_i = v_{ix} \delta dx_i + v_{iy} \delta dy_i + v_{iz} \delta dz_i$$

и вариации δx_i , δy_i , δz_i для крайних положений равны нулю, то, беря второй интеграл, стоящий справа, по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sum m_i v_i \delta ds_i &= \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{dx_i} dx_i \sum m_i \left(\frac{\partial v_{ix}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \delta x_i + \frac{\partial v_{iy}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \delta y_i + \frac{\partial v_{iz}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \delta z_i \right) \end{aligned}$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum m_i v_i \delta ds_i = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{dx_1} dx_1 \sum m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i). \quad (14)$$

Подставляя выражение (14) в равенство (13), получаем

$$\delta \int T dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{dx_1} dx_1 [\delta T - \sum m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i)] \quad (15)$$

Если имеет место закон сохранения механической энергии, то

$$\delta T = \delta U,$$

и в силу общего уравнения механики — уравнения Д'Аламбера — находим

$$\delta \int T dt = 0. \quad (16)$$

Сопоставление работ Талызина и Якоби показывает, что исключение времени из интеграла $\int_{t_1}^{t_2} T dt$ при помощи уравнения живых сил вносит излишнее усложнение при составлении вариации интеграла действия и в последующий вывод из принципа наименьшего действия общего уравнения механики. В самом деле, из уравнения

$$T = U + h$$

Якоби находит¹

$$\frac{1}{dt} = \sqrt{\frac{2(U+h)}{\sum m_i ds_i^2}} \quad (17)$$

и, заменяя dt в интеграле $\int \sum m_i v_i ds_i$, получает интеграл

$$\int \sqrt{2(U+h) \sum m_i ds_i^2}. \quad (18)$$

Составляя вариацию этого интеграла при условии, что независимой переменной является одна из координат, например x_1 , он вынужден оперировать с более сложными выражениями и, чтобы получить общее уравнение механики из равенства нулю этой вариации, снова вернуться к дифференциалу времени посредством равенства (17)².

¹К Якоби примыкает Лиувилль (Liouville, Expression remarquable de la quantité qui dans le mouvement..., C. R., 16 VI, 1856).

²Слудский Ф. А., Курс теоретической механики, Динамика системы, § 22, М., 1881.

Лагранж переставляет символы δ и d , а так как символ d означает дифференциал при независимом переменном t , то δ должно означать вариацию при неизменном времени t , потому что только в таком случае операции дифференцирования и варьирования будут независимы, и символы d и δ можно переставить местами.

В мемуаре об изопериметрах¹ Остроградский получил уравнения динамики из условия интегрируемости вариации функции

$$Ldt$$

(иначе говоря, из условия, что вариация этой функции является полным дифференциалом). На лагранжев вывод уравнений движения Остроградский смотрит тоже как на нахождение условий, при которых вариация функции

$$2Tdt$$

является полным дифференциалом и обвиняет Лагранжа в нестрогости анализа.

Остроградский (см. гл. II) сводит задачу к отысканию условий, при которых $\delta(Tdt)$ является полным дифференциалом, а это последнее приводит его к уравнениям движения. Но из этого условия можно получить уравнения движения («изопериметрические уравнения») только в том случае, когда вариации координат независимы, а в принципе наименьшего действия в форме Лагранжа вариации координат связаны дополнительным условием, происходящим от варьирования уравнения сохранения механической энергии. В этом и видит Остроградский нестрогость анализа Лагранжа (измененного в соответствии со взглядами самого Остроградского) и считает, что только в силу этой неточности Лагранж и получил уравнения движения, вернее, общее уравнение динамики, из которого затем можно получить уравнения движения. А если учесть условия, наложенные на вариации координат, и искать условия интегрируемости суммы

$$\delta(2T dt) + \lambda dt \delta(U - T + h), \quad (19)$$

где λ — неопределенный множитель, то уравнений движения получить нельзя².

¹ Ostrogradsky M., Mémoires sur les équations différentielles relatives au problème isopérimètres, Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersb. т. 6, 1850 (см. гл. II),

² Несогласие результатов Остроградского и О. Родригеса зависит от того, что Остроградский искал условия интегрируемости, а Родригес — условия, при которых вариация интеграла действия равна нулю. Исходя из более широкого требования интегрируемости, Остроградский не мог воспользоваться предельными уравнениями для определения λ , а Родригес определил λ при помощи предельных уравнений. М. В. Остроградский, очевидно, не знал статьи Родригеса.

Эти возражения рассмотрел и разъяснил блестящий русский математик и механик Ф. А. Слудский (1841—1897).

Для научных взглядов Ф. А. Слудского характерно его резкое выступление против формального описательного направления «Механики» Кирхгофа, которую он критикует с ньютонианских материалистических позиций¹. Своими работами Ф. А. Слудский способствовал уяснению смысла принципа Эйлера—Лагранжа; он, по словам Н. Е. Жуковского, «разъяснил все сомнения, высказываемые Брашманом»². В двух статьях Слудский устранил возражения Остроградского по поводу принципа наименьшего действия Эйлера—Лагранжа, показав на примере свободного движения точки, что оба выражения принципа наименьшего действия, данные Лагранжем и Остроградским, одинаково справедливы; «выражения начала наименьшего действия, данные этими учеными, суть выражения двух различных общих свойств движения»³. В третьей статье «Note sur le principe de la moindre action»⁴ Ф. А. Слудский опровергает мнение Якоби, требовавшего исключения времени из интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} T dt$$

при помощи уравнения сохранения механической энергии и заключает, так же как и Талызин, что такое исключение, будучи возможным, не является необходимым и что измененный таким образом принцип наименьшего действия не есть какое-либо новое начало, а лишь новая форма принципа наименьшего действия Лагранжа. В статье «О начале наименьшего действия» Ф. А. Слудский, руководствуясь статьей Родригеса⁵, дал вывод из начала Лагранжа уравнений движения применительно к простейшему случаю движения — свободному движению точки, а в своем «Курсе теоретической механики»⁶ получил уравнение движения для системы материальных точек,

¹ Слудский Ф. А., Несколько слов о Kirchhof's Vorlesungen über Mathematische Physik, Mechanik, изд. Моск. матем. общества, 1872, стр. 1—12.

² Жуковский Н. Е., Полное собрание сочинений, т. IX, 1937.

³ Слудский, О начале наименьшего действия, Математический сборник, т. II, 1867.

⁴ Слудский Ф. А., Nouvelles annales de mathematiques, Paris, 1879.

⁵ Слудский первый обратил внимание на забытую статью Родригеса. О работе Родригеса см. гл. II.

⁶ Слудский Ф. А., «Курс теоретической механики», Динамика системы, § 22, М., 1881. В этом курсе теоретической механики Ф. А. Слудский отметил, что, приводя интегрирование канонических уравнений движения к нахождению главной функции, мы, вообще говоря, усложняем задачу. Однако во многих частных случаях такой путь легче приводит к решению. В качестве примера он рассматривает движение точки, притягиваемой по закону Ньютона двумя другими закрепленными точками.

рассматривая полную вариацию интеграла действия. Вычисление условного экстремума интеграла действия Слудский сводит к вычислению безусловного экстремума по способу неопределенных множителей Лагранжа, причем неопределенный множитель λ он



Ф. А. СЛУДСКИЙ (1841—1897).

определяет по способу Родригеса с помощью уравнений, относящихся к пределам интеграла.

Вывод Слудского представляет развитие способа Родригеса распространение его на случай, когда координаты точек системы не являются независимыми, а удовлетворяют уравнениям связей. Кроме того, Ф. А. Слудский внес в способ Родригеса ясность и определенность, четко разделив изохронные и полные вариации координат.

Без ссылки на Родригеса и, по-видимому, независимо от него Е. И. Раус, начиная с 1877 г., опубликовал аналогичные исследования¹ о принципе наименьшего действия. Раус исходит и

¹ Routh E. J., A treatise of stability of a given state of motion, London, 187'

основного уравнения, в котором он варьирует также и t :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \Phi dt = \left| \Phi \delta t + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} (\delta q_i - \dot{q}_i \delta t) \right|_{t_0}^{t_1} + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \right) (\delta q_i - \dot{q}_i \delta t) dt, \quad (20)$$

где Φ есть функция от q_i , $\dot{q}_i$ и t . Отсюда, во-первых, следует (если $\Phi = T + U$, а $\delta t = 0$ и на пределах интегрирования $\delta q_i = 0$), что когда

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0,$$

тогда имеют силу уравнения движения, открытые Лагранжем, и обратно, во-вторых, когда U и уравнения связей определенно независимы от времени, а $\Phi = 2T$ и $\delta q_i = 0$ на пределах интегрирования, но δt не равно нулю, то можно построить еще условное уравнение для варьирования. Тогда мы избираем условие, что энергия $T - U$ к моменту t в действительном движении равна энергии в варьированном движении в соответствующий момент времени $t + \delta t$, иными словами, определив δt из уравнения $\delta(T - U) = 0$, найдем, что принцип наименьшего действия равнозначен системе, уравнений Лагранжа.

Здесь полезно еще раз заметить, что когда мы говорим, что энергия при действительном движении постоянна, надо иметь в виду, что $\frac{dh}{dt} = 0$, но не обязательно, чтобы было также $\delta h = 0$. У Гамильтона в «принципе переменного действия» (см. гл. II) рассматривается «действие» $V = \int 2T dt$ при условии, что δh не равно нулю и

$$\delta V = \sum m_i \dot{x}_i \delta x_i + t \delta h. \quad (21)$$

В принципе же наименьшего действия, наоборот, рассматривается множество движений системы между данными начальными и конечными положениями, причем каждое движение, кроме естественного, является вынужденным.

Процесс варьирования δ здесь совершенно другой, и поскольку энергия как в ходе каждого отдельного движения, так и в любом движении постоянна, то имеем как

$$\text{так и} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= 0, \\ \delta h &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Замечание Рауса, что $\delta x - \dot{x} \delta t$ есть виртуальное перемещение, было использовано А. Фоссом¹ и М. Рети² для того случая, когда уравнения связей не являются определенно независимыми от времени.

В самом деле, $x = \varphi(q_i, t)$, где q_i — обобщенные координаты, и, поскольку t должно варьироваться:

$$\delta x = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t. \quad (23)$$

Следовательно, $\delta x - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t$ есть виртуальное перемещение³. Но и в том случае, когда мы вместо δq_i в уравнении (23) пользуемся другими вариациями q_i , например $\delta q_i - \dot{q}_i \delta t$,

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} (\delta q_i - \dot{q}_i \delta t) = \delta x - \dot{x} \delta t \quad (24)$$

также есть виртуальное перемещение⁴ x . Вообще говоря, значение какой-либо функции $y = \varphi(x)$ может изменяться при изменении dx (ради краткости мы пользуемся здесь обозначением дифференциального исчисления) независимой переменной x , так что дифференциал dy будет выражаться так:

$$dy = \varphi(x + dx) - \varphi(x). \quad (25)$$

Значение y может также изменяться без изменения x благодаря изменению формы функции φ на $\varphi_1(x) = \varphi(x) + \varepsilon \omega(x)$, где $\omega(x)$ — любая функция, ε — бесконечно малая положительная величина.

Если оставить обозначение вариации δ лишь для изменения формы φ , то полное изменение функции y будет $dy + \delta y$. Тогда $\delta x = 0$, т. е. независимая переменная не варьируется.

Тем не менее Лагранж варьировал также и независимые переменные. Изложение Лагранжем основ вариационного исчисления кажется недостаточно понятным, однако несомненно, что в принципе наименьшего действия он считает t переменным.

Другие механики в основном приняли то понятие вариации, которое было дано Эйлером в его более поздней статье⁵ о методе

¹ Voss A., Über die Principien von Hamilton und Maupertuis, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Naturwissenschaften zu Göttingen, Math. Phys. Klasse Göttingen, 1900, стр. 322—327; «Сборник», стр. 564—567.

² R é t h y M., Über das Princip der kleinsten Aktion und das Hamilton'sche Princip, Mathematische Annalen, т. 48, Leipzig, 1897, стр. 514—547.

³ Виртуальным (бесконечно малым) перемещением системы называется произвольное бесконечно малое изменение ее конфигурации, согласующееся со связями, наложенными на нее в данный момент времени.

⁴ О различии между возможными и виртуальными перемещениями см. Су слов Г. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944.

⁵ Euler L., Elementa calculi Variationum, Opera Omnia, т. 25, ser. 1, 1932.

Лагранжа. Это понятие заключается в следующем: вариация функции имеет место, когда заключенные в ней параметры претерпевают изменение. Якоби в «Vorlesungen über Dynamik»¹ утверждает, например, что вариации δq_i заключают в себе лишь изменения q_i , которые проистекают от изменений содержащихся в q_i произвольных постоянных. В соответствии с этим он делает вывод, что независимые переменные не варьируются, так что $\delta t = 0$.

Позднее, в 1877 г., к точке зрения Якоби присоединился А. Майер². Однако наиболее полное рассмотрение вопроса дал только Ф. А. Слудский.

Согласно Слудскому сравниваемые движения должны удовлетворять не уравнению живых сил, а некоторому уравнению вида

$$T + U = h,$$

где U — некоторая функция координат, т. е. U может и не являться для всех сравниваемых движений потенциальной функцией.

Именно Слудскому принадлежит разработка вопроса о динамической характеристике сравниваемых движений в принципе наименьшего действия. Этот вопрос Лагранж оставляет открытым. Бертран (1822—1900) в своих примечаниях к третьему изданию «Аналитической механики» Лагранжа по этому поводу писал: «Интеграл оказывается максимумом или минимумом, если его сравнить с аналогичными интегралами, относящимися ко всякому другому движению системы, которое было бы вызвано теми же силами и при котором, несмотря на введение новых связей, допускающих существование принципа живых сил, начальные и конечные положения оставались бы одними и теми же. Возможно, что это заключение, которое с очевидностью следует из доказательства, в тексте выражено недостаточно ясно»³. Якоби, как и Лагранж, не уточняет сравниваемые движения. Подчиняя их условию

$$T = U + h,$$

Якоби предполагает, как это видно из его изложения, что все сравниваемые движения осуществляются под действием одних и тех же движущих сил. Это видно из того, что уравнение $T = U + h$ он считает уравнением живых сил для всех сравниваемых движений. Это ограничение, как показал Ф. А. Слудский, совсем необязательно.

¹ Якоби, Лекции по динамике, ГТТИ, 1936, стр. 145 (шестая лекция). См. также To d h u n t e r I., A History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century, London, 1861.

² M a y e r A., Über die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung, Leipziger Berichte, 1899.

³ Лагранж Ж., Аналитическая механика, т. 2, 1950, М.—Л., ИЛ, стр. 382.

Он обстоятельно разбирает этот вопрос на примере свободного движения точки¹.

Принцип наименьшего действия Эйлера—Лагранжа, примененный к свободному движению точки, состоит в том, что интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} T dt, \quad (26)$$

где T — кинетическая энергия движения точки в поле консервативной силы

$$F \left(F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

имеет величину меньшую, чем тот же интеграл для всякого другого движения между теми же начальной и конечной точками, удовлетворяющего условию $T = U + h$. Из последнего условия следует, что начальные скорости всех сравниваемых движений должны быть равны по величине, направления же начальных скоростей могут быть разными. Если в число сравниваемых движений включить свободные, то ясно, что эти движения должны происходить под действием движущей силы, отличной от F , иначе для всех них интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} T dt$$

имел бы наименьшую величину. Следовательно, если в число сравниваемых движений включить свободные, то они должны происходить под действием других движущих сил.

И. Д. Соколов принял участие в полемике о начале наименьшего действия, поднятой на страницах «Математического сборника», поместив в 1870 г. в I томе этого журнала статью «О начале наименьшего действия».² В ней он показал, что применение способа неопределенного множителя для получения уравнения движения не является необходимым в силу особого характера условного уравнения $T = U + h$. Изложение начала наименьшего действия И. Д. Соколовым (1812—1873) ближе всего к изложению Лагранжа. Соколов исходил из выражения для действия в виде

$$\int \sum m_i v_i ds_i$$

или

$$\int \sum m_i (v_{ix} dx_i + v_{iy} dy_i + v_{iz} dz_i). \quad (27)$$

Взяв вариацию интеграла (27), принимая за неварьируемую пере-

¹ С л у д с к и й Ф. А., Заметка о начале наименьшего действия, Математический сборник, т. IV, 1870 и Note sur le principe de la moindre action; «Сборник», стр. 388—391.

² С о к о л о в И. Д., Математический сборник, т. I, 1870.

менную одну из координат и считая, что координаты и скорости представлены как функции этой координаты, Соколов получает интеграл

$$\int \sum m_i (\delta v_{ix} dx_i + \delta v_{iy} dy_i + \delta v_{iz} dz_i + v_{ix} \delta dx_i + v_{iy} \delta dy_i + v_{iz} \delta dz_i). \quad (28)$$

Беря по частям интеграл от последних трех слагаемых и отбросив члены, выходящие из под знака интеграла в силу условий на пределах интеграла, а также умножив и разделив на dt выражение, остающееся под знаком интеграла, он получает интеграл

$$\int \sum m_i \left((v_{ix} \delta v_{ix} + v_{iy} \delta v_{iy} + v_{iz} \delta v_{iz} - \frac{dv_{ix}}{dt} \delta x_i - \frac{dv_{iy}}{dt} \delta y_i - \frac{dv_{iz}}{dt} \delta z_i) \right) dt. \quad (29)$$

Варьируя уравнение сохранения полной механической энергии

$$\frac{1}{2} \sum m_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2) = U + h, \quad (30)$$

получим равенство

$$\sum m_i (v_{ix} \delta v_{ix} + v_{iy} \delta v_{iy} + v_{iz} \delta v_{iz}) = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right),$$

с помощью которого из интеграла (29) можно исключить скорости и их вариации и прийти к интегралу

$$\int \sum \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i \frac{dv_{ix}}{dt} \right) \delta x_i + \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} - m_i \frac{dv_{iy}}{dt} \right) \delta y_i + \left(\frac{\partial U}{\partial z_i} - m_i \frac{dv_{iz}}{dt} \right) \delta z_i \right\} dt,$$

содержащему только вариации координат.

Из равенства нулю вариации этого интеграла получаем в случае свободного движения, в силу независимости вариаций координат¹, уравнения

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (31)$$

Так как при варьировании интеграла

$$\int \sum m_i (v_{ix} dx_i + v_{iy} dy_i + v_{iz} dz_i)$$

одна из координат, принятая за независимую, например x_1 , не варьируется, то уравнений (31) оказывается на одно меньше, чем число координат; однако если к уравнениям (31) присоединить уравнение сохранения полной механической энергии

$$T = U + h,$$

то уравнений будет достаточно для определения движения.

¹ Уравнение (30) не налагает ограничений на вариации координат; вариации координат δx_i , δy_i , δz_i можно брать произвольно, но вариации скоростей определяются этим выбором; эту же мысль позднее высказывает и О. И. Сомов.

В своих двух работах о принципе наименьшего действия, опубликованных в «Математическом сборнике», О. И. Сомов (1815—1876) привлекает для исследования криволинейные координаты. Остановимся на его статье «Замечания, относящиеся к началу наименьшего действия», опубликованной в 1870 г.¹ Вопрос о смысле варьи-



О. И. СОМОВ (1815—1876)

рования движения получил в ней дальнейшее развитие и углубление. Прежде всего, Сомов четко определил понятие полного варьирования движения как такого способа варьирования, который представляет собой соединение варьирования по времени с виртуальным перемещением системы.

Если движение системы с голономными связями определяется n обобщенными координатами

$$q_1, q_2, \dots, q_n,$$

то произвольные функции времени t , взятые для обобщенных

¹Сомов О. И., «Математический сборник», т. 5, 1870; «Сборник», стр. 392—403.

координат

$$q_i(t),$$

определят одно из движений, допускаемых связями. Если эти функции $q_i(t)$ бесконечно мало изменить на δq_i , где δq_i — бесконечно малые непрерывные и дифференцируемые функции времени, то функции $q_i + \delta q_i$ определяют другое движение, также допускаемое связями. Движение системы Сомов представляет движением точки

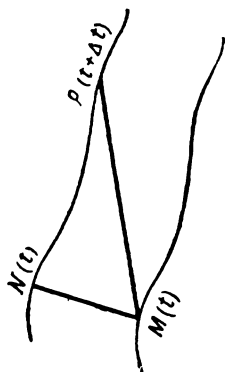


Рис. 7.

в многомерном пространстве. Если точка M представляет положение системы в момент t в первом движении (рис. 7), а N — положение системы в тот же момент t во втором движении, то δq_i — вариация переменной q_i , происходящая от перемещения из M в N (виртуальная вариация).

Пусть P — положение точки N во втором движении в момент $t + \Delta t$. Полной вариацией переменной называется вариация от перемещения MP . Она складывается из двух вариаций: из вариации от перемещения MN (виртуальной вариации) и вариации от перемещения NP (вариации по времени). В результате первого перемещения q_i перейдет в $q_i + \delta q_i$, а это последнее от второго перемещения NP перейдет в

$$q_i + \delta q_i + \frac{dq_i}{dt} \Delta t + \frac{d\delta q_i}{dt} \Delta t.$$

Пренебрегая последним слагаемым, получим, что полная вариация q_i равна

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t. \quad (32)$$

Изложение понятия варьированного движения Сомовым с методической стороны представляет интерес и в наше время. Обычно в курсах механики изложение вариационных принципов начинают отдельным параграфом о вариации функции. Изложение же Сомова позволяет сразу связать варьирование с движением и тем самым внести большую ясность в изложение вариационных принципов механики¹. Условия варьирования, рассмотренные Сомовым, шире условий варьирования в принципе Лагранжа. Сомов получает самое общее выражение для вариации действия и из него при соблюдении частных условий получает принцип наименьшего действия Эйлера—Лагранжа. Не прибегая к приему Родригеса и Слудского, О. И. Сомов получил из принципа наименьшего действия уравнения движения

¹ См. Цыганова Н. Я., Работы русских ученых XIX в. по исследованию начала наименьшего действия. Диссертация, 1955.

в каноническом виде. Решая вопрос в обобщенных координатах, он показал, что в принципе наименьшего действия Эйлера—Лагранжа можно считать за независимую переменную некоторую функцию обобщенных координат $\varphi(q_1, q_2, \dots, q_n)$.

Оригинальной чертой изложения О. И. Сомова является произвольное задание траекторий точек системы в первоначальном движении между двумя данными положениями. Задав произвольную зависимость обобщенных координат от параметра φ

$$q_1 = f_1(\varphi), q_2 = f_2(\varphi), \dots, q_n = f_n(\varphi),$$

мы тем самым зададим траекторию точки системы, а если движение системы интерпретировать движением точки в многомерном пространстве, то получим траекторию этой точки или, как говорят, траекторию системы. Возьмем две точки A и B , принадлежащие траектории системы; им отвечают определенные значения параметра φ .

Если функции $f_1(\varphi), f_2(\varphi), \dots, f_n(\varphi)$, т. е. $q_1, q_2, \dots, q_n$ бесконечно мало изменить, причем вариации Δq_i подчинить условию, чтобы вариация функции φ была равна нулю:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_n} \Delta q_n = 0,$$

то получим другую, варьированную траекторию, бесконечно близкую к первой, которая, вообще говоря, может не пройти через точки A и B .

Далее, Сомов задает зависимость между координатами и временем в первоначальном и варьированном движении так, чтобы варьированное движение возникало из первоначального в силу полной вариации.

Сомов дал следующую строгую формулировку принципа наименьшего действия:

«Если истинное движение изменяется бесконечно мало на другое, так что крайние положения системы не изменяются, и в новом движении имеет место закон сохранения полной энергии, причем первая вариация полной энергии равна нулю, то и первая вариация действия равна нулю»¹.

Аналогичное замечание было раньше сделано О. Родригесом: «Принцип наименьшего действия, как известно, со стоит в том, что для системы масс, находящейся под действием притягивающих или отталкивающих сил — при соблюдении принципа живых сил — сумма существующих мгновенно живых сил всех масс при переходе из одного заданного в другое, также заданное положение, имеет максимум или минимум»².

¹ Сомов О. И., Замечания, относящиеся к принципу наименьшего действия, Математический сборник, т. 5, 1870, стр. 317.

² Rodrigues O., De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement, rapportées aux variables indé-

Сравнивая эту формулировку с лагранжевой, заключаем, что она едва ли не хуже последней. Если в лагранжевой формулировке есть намек на характер сравниваемого движения (говорится, что вариации координат, соответствующие данным начальному и конечному положению, равны нулю, откуда следует, что все сравниваемые движения проходят через заданные точки), то в формулировке О. Родригеса нет и этого намека. Изохронные и полные вариации координат именуются просто вариациями и обозначаются одной и той же буквой; это затемняет то весьма важное обстоятельство, что в принципе наименьшего действия Лагранжа речь идет о вариациях координат, отличных от изохронных вариаций.

Формулировка принципа наименьшего действия, данная Серре в его мемуарах¹, интересна именно подробной характеристикой сравниваемых движений. Он говорит :

«Если к системе свободных или связанных между собой материальных точек, подверженных данным силам, применим принцип живых сил, то движение системы всегда таково, что интеграл от суммы количеств движения различных точек, помноженных на элементы соответствующих траекторий, имеет между двумя данными положениями системы минимум ; это значит, что интеграл, о котором идет речь, меньше в действительном движении, чем в движении новом, которое будет иметь место, если сделать первое движение невозможным путем введения новых связей и заставить точки системы двигаться под действием тех же сил, что и в действительном движении, между теми же начальным и конечным положениями, причем все время должно действовать уравнение живых сил и сохраняться значение постоянной, которая выражает разность между полусуммой живых сил и силовой функцией». В отношении же символики и терминологии у Серре та же недоговоренность, что и у Родригеса ; в применяемых им обозначениях он не различает изохронных и полных вариаций координат. Что касается работ русских ученых, то, как мы видели, уже Слудский в своих работах четко разделяет изохронные и полные вариации координат, употребляя название «полные вариации координат», но не вводит для них определенного значка, что, впрочем, не мешает пониманию ; в его символике плохо лишь то, что полная вариация интеграла действия обозначена у Слудского той же буквой δ , которая употребляется для обозначения изохронных вариаций.

Только работа О. И. Сомова, появившаяся на год раньше первых мемуаров Серре, полностью выдержана в отношении символики и терминологии. В этом отношении, как и в отношении строгости и стройности изложения она является завершающим звеном

pendantes, Correspondance sur l'École Polytechnique, т. III, № 2, Mai, 1815, стр. 159 ; «Сборник», стр. 167.

¹Serret C. R., Mémoire sur le principe de la moindre action, Mém. de l'Acad. de Sc., 1871.

в цепи работ, посвященных исследованию первой вариации интеграла действия русскими и западными учеными.

Продолжая исследования Остроградского, Ф. А. Слудский¹ и затем Талызин² показали, что принцип наименьшего действия в форме Эйлера—Лагранжа и принцип Гамильтона—Остроградского существенно различны. Дело в том, что в принципе Гамильтона вариации координат δq_i изохронны, и время не варьируется, так как каждой точке действительной траектории ставится в соответствие точка на другой бесконечно близкой кривой, причем обе точки проходятся в один и тот же момент времени. В случае же принципа Эйлера—Лагранжа связи стационарны, и имеет место закон живых сил: $T = U + h$. При этом допущении время должно варьироваться.

О. И. Сомов³ также подчеркнул разницу между вариациями в рассматриваемых принципах. И. Д. Соколов⁴, В. П. Ермаков (1845—1892)⁵, Г. К. Сулов (1857—1935)⁶ и Д. К. Бобылев⁷ исследовали, при каких условиях действие фактически является минимальным. Г. К. Сулов обобщил принцип Гамильтона—Остроградского на случай неголономных связей. Д. К. Бобылев использовал при исследовании вариации действия метод вариации произвольных постоянных. Н. Е. Жуковский (1847—1921)⁸ также посвятил принципу наименьшего действия две статьи⁹.

¹ Слудский Ф. А., О начале наименьшего действия, Математический сборник, т. II, 1867, стр. 45—50.

² Талызин М., О начале наименьшего действия, Математический сборник, т. II, 1867, стр. 143—154.

³ Сомов О. И., Замечания, относящиеся к принципу наименьшего действия, «Математический сборник», т. V, 1870.

⁴ Соколов И. Д., О начале наименьшего действия, «Математический сборник», т. V, 1870, стр. 179—188.

⁵ Ермаков В. П., Принцип наименьшего действия в связи с преобразованием дифференциальных выражений второго порядка, «Киевские университетские Известия», 1891 г.

⁶ Сулов Г. К., К вопросу о начале наименьшего действия, «Киевские университетские Известия», 1891 г.

⁷ Бобылев Д. К., О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия, приложение к 61 тому записок Академии наук, СПб, 1889.

⁸ Жуковский Н. Е., О начале наименьшего действия, Собр. соч., т. I, 1948, стр. 51—57. О среднем значении кинетического потенциала, Собр. соч., т. I, 1948, стр. 207—209; «Сборник», стр. 425 и 460.

⁹ См. также Космодемьянский А. А., Очерки по истории теоретической механики в России, Уч. зап. МГУ, вып. 122, Механика, т. 2. Геронимус Я. Л., Очерки о работах корифеев русской механики, Гостехиздат, 1952. Григорьян А. Т., Полак Л. С., Очерки истории механики в России во второй половине XIX и начале XX века (1861—1917), Труды Института истории естествознания и техники, т. 10, М., изд. АН СССР, 1956. Цыганова Н. Я., Работы русских ученых XIX в. по исследованию начала наименьшего действия и начала Гамильтона—Остроградского, Труды Института истории естествознания и техники, т. 19, изд. АН СССР, 1957; в этой работе дана большая библиография.

3. Смысл вариаций и обобщение вариационных принципов у Гёльдера и Фосса

Вопрос о смысле вариаций в принципах Гамильтона и наименьшего действия рассмотрел в 1896 г. О. Гёльдер (1859—1937)¹.

Для того, чтобы составить отчетливое представление о смысле вариации, необходимо каждое положение точки при варьированном движении отнести к какому-либо положению точки в первоначальном движении. Без установления такого соответствия нельзя написать

$$\delta \int T dt = \int \delta(T dt). \quad (33)$$

Установить такое соответствие можно произвольно, так как оно лишено физического смысла — вариация движения есть только математическое вспомогательное построение. Вариация времени будет разностью между моментами прохождения через соответствующие положения.

Для того, чтобы выполнить вариацию движения, сообщим сначала каждой точке первоначальной траектории некоторое смещение, так что возникнет новая траектория с точками, соответственными исходной, затем определим скорость для каждой точки новой траектории, причем она может быть произвольной, но возможно мало отличающейся от скорости в соответствующей точке исходной траектории.

Эту скорость можно определить двумя способами: 1. соответствующие точки обеих траекторий проходятся одновременно, 2. полная энергия для соответствующих точек траекторий одна и та же.

Так как полная энергия есть $T - U$, а первоначальное движение задано, то для каждого положения варьированного движения сначала известна лишь потенциальная энергия, а из условия варьирования получается в силу $E = T - U$ значение кинетической энергии, а следовательно, и скорости. Легко видеть, что при втором способе варьирования время варьируется, а при первом — нет.

Вывод интегрального принципа для общего случая варьирования приводит Гёльдера при допущении, что вариация движения выполнена так, что δx_i , δy_i , δz_i суть виртуальные перемещения системы, к выражению

$$\int \{2 T \delta dt + (\delta T + \delta U)\} dt = 0, \quad (34)$$

где

$$\delta U = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

— работа, которую совершили бы действующие силы на одном из этих воображаемых перемещений.

¹ H ö l d e r O., Über die Principien von Hamilton und Maupertuis, Nachricht. von d. Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Math. Phys. Klasse, 1896, вып. 2, стр. 122—157 ; «Сборник», стр. 538—563.

Воспользуемся теперь двумя введенными способами варьирования. При изохронной вариации $\delta t = 0$ и из (34) получаем

$$\int (\delta T + \delta' U) dt = 0, \quad (35)$$

т. е. принцип Гамильтона. При изоэнергетической вариации $\delta T = \delta' U$ и из уравнения (34) получаем

$$\int \delta(T dt) = \delta \int T dt = 0, \quad (36)$$

т. е. принцип наименьшего действия.

Если существует силовая функция U , то

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial x_{iv}} \delta x_{iv}, \quad v = 1, 2, 3, \quad (37)$$

причем, если даже δU содержит время, то все-таки в том случае, когда время не варьируется

$$\delta' U = \delta U, \quad (38)$$

и для принципа Гамильтона получим

$$\delta \int (T + U) dt = 0. \quad (39)$$

В случае же вариации, требуемой принципом наименьшего действия, должна существовать независящая от времени функция U , чтобы удовлетворялось уравнение (36).

Отсюда получается сразу более узкая форма принципа наименьшего действия для того случая, когда существует независящая от времени силовая функция и время не входит в уравнения связей; при этом вариации положений должны быть виртуальными перемещениями, а начальное и конечное положения должны оставаться неварьированными.

Лагранж в «Аналитической механике» рассматривает именно эту узкую форму принципа наименьшего действия. Однако указание на более широкую форму принципа содержится в его ранней работе¹, где в § 13 прямо указывается на то, что полученное Лагранжем в § 8 этой статьи соотношение, тождественное с уравнением (29), применимо в случае произвольных сил. Большинство ученых, разрабатывавших этот вопрос после Лагранжа, взяли у него как раз узкую форму принципа (в том числе Гамильтон и Якоби). Лишь Гельмгольц рассмотрел расширенную форму принципа². Однако Гельмгольц не счел нужным проводить отчетливое различие между

¹ Lagrange J., Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique, Miscellanea Taurinensia, т. II, 1760—61; Oeuvres, т. I, 1867, стр. 365; «Сборник», стр. 117.

² Helmholtz H., Zur Geschichte des Princips der kleinsten Wirkung, Wissensch. Abhand., т. III, Leipzig, 1895, стр. 249 и след.

принципом наименьшего действия в расширенной форме и принципом Гамильтона. Он основывался при этом на том безусловно верном положении, что оба эти принципа эквивалентны уравнению Д'Аламбера и в силу этого являются следствиями один другого. Тем не менее это не дает права отождествлять их, так как варьирование, применяемое в каждом из этих принципов, производится совершенно различным способом. Оба эти принципа получаются из выражения (34) при различных частных видах общего способа варьирования.

Рассмотрим важный вопрос о варьировании несколько подробнее. Вариации положения должны быть виртуальными перемещениями. Если бы мы потребовали, чтобы варьированное движение удовлетворяло тем же уравнениям связей, что и действительное, то в случае уравнений связей вида

$$\omega_k(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \quad (40)$$

для варьированного движения получили бы

$$\omega_k(x_i + \delta x_i, \quad t + \delta t) = 0 \quad (41)$$

и, следовательно,

$$\delta \omega_k = 0; \quad (42)$$

но согласно принципу Д'Аламбера уравнения, определяющие виртуальные перемещения, имеют вид

$$\delta \omega_k - \frac{\partial \omega_k}{\partial t} \delta t = 0. \quad (43)$$

Эти уравнения согласуются с $\delta \omega_k = 0$ только в том случае, когда или $\frac{\partial \omega_k}{\partial t} = 0$, т. е. в уравнения связей не входит время, или $\delta t = 0$, т. е. когда должен применяться принцип Гамильтона. При применении же принципа наименьшего действия существенно, входит или нет время в уравнения связей. Действительное и варьированное движения в этом случае существенно различны.

Пусть материальная точка, на которую не действуют никакие силы, связана в своем движении уравнением

$$\varphi(x, y, z)dx + \psi(x, y, z)dy + \chi(x, y, z)dz = 0, \quad (44)$$

т. е. в любом положении точка должна двигаться вдоль заданного элемента поверхности.

В некоторых случаях уравнение (44) может быть проинтегрировано: $\omega(x, y, z) = \text{const}$; тогда существует такая функция $\Omega(x, y, z)$, при умножении на которую левая часть (44) делается полным дифференциалом. Функция Ω должна для этого удовлетворять условиям

$$\frac{\partial(\Omega\varphi)}{\partial y} = \frac{\partial(\Omega\psi)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\Omega\psi)}{\partial z} = \frac{\partial(\Omega\chi)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\Omega\chi)}{\partial x} = \frac{\partial(\Omega\varphi)}{\partial z}, \quad (45)$$

или, обозначив частные производные функции φ по x, y, z соответственными индексами,

$$\left. \begin{aligned} \Omega(\varphi_y - \psi_x) &= \Omega_x \psi - \Omega_y \varphi, \\ \Omega(\psi_z - \chi_y) &= \Omega_y \chi - \Omega_z \psi, \\ \Omega(\chi_x - \varphi_z) &= \Omega_z \varphi - \Omega_x \chi. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Умножив эти уравнения соответственно на χ, φ, ψ и сложив, получим

$$\chi(\varphi_y - \psi_x) + \varphi(\psi_z - \chi_y) + \psi(\chi_x - \varphi_z) = 0 \quad (47)$$

— выражение, которое и является условием интегрируемости, а следовательно, и голономности системы, состоящей из точки, на которую наложена связь (44).

Для нахождения дифференциальных уравнений движения свободной точки воспользуемся принципом наименьшего действия в узкой форме. В этом случае, очевидно, получим $\delta \int ds = 0$, или

$$\delta \int ds = \int \delta ds = \int \frac{dx \delta dx + dy \delta dy + dz \delta dz}{ds}. \quad (48)$$

Проинтегрировав по частям и используя равенство нулю вариаций на концах траекторий, найдем

$$- \int \left(\frac{d^2 x}{ds^2} \delta x + \frac{d^2 y}{ds^2} \delta y + \frac{d^2 z}{ds^2} \delta z \right) ds = 0. \quad (49)$$

Так как вариации представляют собой виртуальные перемещения, то они определяются уравнением

$$\varphi \delta x + \psi \delta y + \chi \delta z = 0.$$

Умножив левую часть этого уравнения на λds и прибавив ее к выражению под знаком интеграла (49), получим

$$\int \left\{ \left(\lambda \varphi - \frac{d^2 x}{ds^2} \right) \delta x + \left(\lambda \psi - \frac{d^2 y}{ds^2} \right) \delta y + \left(\lambda \chi - \frac{d^2 z}{ds^2} \right) \delta z \right\} ds = 0,$$

откуда

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \lambda \varphi, \quad \frac{d^2 y}{ds^2} = \lambda \psi, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = \lambda \chi \quad (50)$$

или

$$\frac{d^2 x}{ds^2} : \frac{d^2 y}{ds^2} : \frac{d^2 z}{ds^2} = \varphi : \psi : \chi. \quad (51)$$

Как известно, эти вторые производные относятся друг к другу как направляющие косинусы лежащей в соприкасающейся плоскости нормали к траектории, тождественной с нормалью к элементу поверхности, соответствующему точке (x, y, z) . Таким образом,

в каждой точке траектории соприкасающаяся плоскость перпендикулярна к элементу поверхности, соответствующему этой точке. Таково геометрическое свойство действительной траектории.

То же уравнение можно получить и при другом определении варьирования. Требование, чтобы вариации положений были виртуальными перемещениями, теперь устраняется. Вместо него выдвигается требование, чтобы варьированная траектория подчинялась тому же уравнению (44)

$$\varphi(x, y, z) dx + \psi(x, y, z) dy + \chi(x, y, z) dz = 0,$$

которому подчинена подлежащая варьированию траектория. Здесь имеет место совсем другая задача вариационного исчисления, из которой, вообще говоря, не возникают действительные траектории материальной точки. Вариации в этом случае должны удовлетворять уравнению

$$\delta\varphi dx + \delta\psi dy + \delta\chi dz + \varphi d\delta x + \psi d\delta y + \chi d\delta z = 0. \quad (52)$$

Раскрывая $\delta \int ds = 0$ согласно (48) и прибавляя левую часть (52), умноженную на λ , интегрируя по частям после небольших преобразований, получим

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \varphi \frac{dx}{ds} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) \lambda \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\chi}{\partial z} \right) \lambda \frac{dz}{ds} = 0 \quad (53)$$

и аналогично для y и для z .

Эти уравнения вместе с (44) определяют так называемые «геодезические траектории».

Герц показал, что для голономных систем геодезические траектории совпадают с наиболее прямыми, т. е. с действительными траекториями¹.

4. Распространение вариационных принципов на неголономные системы

Кинематические условия, которые могут быть заданы только как отношения между дифференциалами координат и не могут быть представлены в форме алгебраических соотношений между самими координатами, Герц назвал неголономными связями. Сопоставим их со связями голономными.

Кинематическое условие, имеющее вид

$$f(q_i) = 0,$$

¹ Hertz H., Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt, Gesammelte Werke, т. 3, 1910, № 190; Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, изд. АН СССР, М., 1959.

выражает голономные связи. Из него простым дифференцированием получим

$$\sum \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i = 0. \quad (54)$$

Для неголономных связей имеем

$$\sum A_i dq_i = 0, \quad (55)$$

где коэффициенты A_i — заданные функции от q_i . Эти соотношения (55) могут быть преобразованы к виду $f(q_i) = 0$ только, если выполняются некоторые добавочные условия интегрируемости. Единственным исключением является случай $i=2$, так как дифференциальное соотношение между двумя переменными всегда интегрируемо.

Голономные кинематические условия можно рассматривать двумя способами. Если имеется m уравнений между n переменными, то можно исключить m из них и свести задачу к проблеме $n - m$ независимых переменных. Другой путь состоит в том, чтобы рассматривать избыточное число переменных и принимать уравнения для m из них в качестве вспомогательных условий. Неголономные же связи допускают только второй путь рассмотрения. Уменьшение числа переменных здесь неосуществимо и мы должны рассматривать большее число переменных, чем этого требует число степеней свободы системы.

Выражения (55) отличаются от соотношений (54) тем, что в них слева стоят не полные дифференциалы, как это имеет место для уравнений (54).

Примером движения, ограниченного неголономными связями, является качение твердого тела по поверхности.

Гельдер распространил принцип Гамильтона на неголономные системы¹. Пусть n координат неголономной консервативной системы связаны m неинтегрируемыми уравнениями

$$A_{1k} dq_1 + \dots + A_{nk} dq_n + T_k dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (A)$$

где A_{rk} , T_k суть заданные функции от q_k . Движение будет определяться n уравнениями:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = \lambda_1 A_{r1} + \lambda_2 A_{r2} + \dots + \lambda_m A_{rm} \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (B)$$

вместе с кинематическими уравнениями (A). Неизвестными величинами в этом случае являются q_n и λ_m .

¹ Hölder O., Über die Principien von Hamilton und Maupertuis, Nachricht. von d. Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen, Math. Phys. Klasse, 1896. Хотя принцип Гамильтона можно распространить и на неконсервативные системы и на неголономные связи, однако наибольшее применение он имеет, когда можно составить лагранжеву функцию из независимых координат.

Обозначим через δ изменение, отвечающее переходу от некоторой точки на дуге траектории системы к соответствующей точке на кривой сравнения. Кривая сравнения получается из первоначальной путем такого перемещения последней, которое совместимо с мгновенными кинематическими уравнениями (без членов $T_k dt$).

Можно было бы, конечно, за траекторию сравнения выбрать кинематически возможную траекторию, но тогда переходы от первоначальной кривой к кривой сравнения не могли бы быть согласованы с кинематическими условиями, так как в неголономных системах переход между двумя смежными заданными конфигурациями, вообще говоря, кинематически невозможен. Существует значительно больше смежных положений, чем возможных перемещений из заданного положения.

Составим теперь выражение

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{- \int L dt}_{\text{первоначальная кривая } AB} + \underbrace{\int L dt}_{\text{кривая сравнения } CD} = \\
 & = L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_r \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r \right) dt = \\
 & = L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) \delta q_r - \right. \\
 & \quad \left. - (\lambda_1 A_{21} + \dots + \lambda_m A_{rm}) dq_r \right\} dt ;
 \end{aligned}$$

так как перемещения удовлетворяют условию

$$A_{1k} \delta q_1 + A_{2k} \delta q_2 + \dots + A_{nk} \delta q_n = 0,$$

то из этого следует, что члены вида $\lambda_s A_{rs} \delta q_r$ в интеграле взаимно уничтожаются. Поэтому

$$\begin{aligned}
 & \int_{CD} L dt - \int_{AB} L dt = \\
 & = L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sum_r \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) \delta q_r \right\} dt. \quad (56)
 \end{aligned}$$

Следовательно, при таком обобщении принцип Гамильтона имеет место для всех динамических систем как голономных, так и неголономных.

Отправляясь от исследования Гёльдера, Фосс рассмотрел проблему точного формулирования принципа Гамильтона и принципа наименьшего действия и проанализировал характер вариаций, применяющихся в этих принципах.

Фосс (1845—1931) сначала рассматривает формулировку принципов Гамильтона и Лагранжа, данную Гёльдером¹.

Пусть x, y, z — координаты, которые могут быть связаны независимыми от времени условиями, могущими частью иметь форму линейных дифференциальных уравнений. Виртуальная работа действующих сил будет иметь следующий вид :

$$\delta' U = \sum X_n \delta x_n + Y_n \delta y_n + Z_n \delta z_n. \quad (57)$$

Если на q_i наложены только конечные уравнения связей и T есть однородная функция второй степени от $\dot{q}_i$, то

$$\delta' U = \sum_i Q_i \delta q_i, \quad (58)$$

причем между q_i имеют место дифференциальные уравнения

$$\sum_{i=1}^n P_{ki} dq_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Пусть t и q_i испытывают такое изменение, которое соответствует значениям смещения $t + \delta t$ и $q_i + \delta q_i$ точки системы и, следовательно, δt и δq_i будут вариации для времени t , для которого первоначальные координаты x_h, y_h, z_h получили произвольные виртуальные смещения $\delta x_h, \delta y_h, \delta z_h$; тогда

$$\delta T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\delta d q_i}{dt} - \dot{q}_i \frac{\delta dt}{dt} \right), \quad (59)$$

следовательно,

$$dt \delta T + 2 T \delta dt = dt \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta d q_i + \left(2 T - \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta dt, \quad (60)$$

а так как последний член справа обращается в нуль вследствие однородности функции T , второй же преобразуется при интегрировании по частям по времени $t_1 - t_0$, то

$$\int_{t_0}^{t_1} (dt \delta T + 2 T \delta dt) = \left| \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (61)$$

Прибавив к обеим частям $\int_{t_0}^{t_1} \delta' U dt$ и отбросив справа член, не стоящий под знаком интеграла, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} (dt \delta T + 2 T \delta dt + \delta' U dt) = \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (62)$$

¹ Voss A., Über die Principien von Hamilton und Maupertuis; Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Naturwissenschaften zu Göttingen, Math. Phys. Klasse, Göttingen, 1900, стр. 223—328. «Сборник», стр. 564.

Положим теперь, что время не варьируется, тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' U) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (63)$$

и требование, чтобы гамильтонов интеграл исчезал, приводит к уравнениям механики

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_s \lambda_s P_{si} \quad (64)$$

и обратно.

Если время варьируется, то налагая, по Гёльдеру, на энергию условие $\delta T - \delta' U = 0$, получим:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2 T dt = \int \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt. \quad (65)$$

Это выражение показывает, что расширенный принцип наименьшего действия эквивалентен дифференциальным уравнениям механики.

Рассмотрим теперь случай обобщенных координат. Пусть при этом конечные уравнения связей явно зависят от времени, т. е.

$$\sum_i P_{ki} dq_i + P_k dt = 0 \quad (k = 1, \dots, \nu), \quad (66)$$

где P_{ki}, P_k — функции от q_i и t . Этот случай был уже в 1884 г. рассмотрен Фоссом¹.

T будет по-прежнему функция второй степени от $\dot{q}_i$, что, впрочем, для дальнейшего безразлично.

Пусть x_h, y_h, z_h испытывают такие изменения, что q_i, t изменяются на δq_i и δt . Тогда

$$\delta x_h = \sum_i \frac{\partial x_h}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial x_h}{\partial t} \delta t, \quad (67)$$

в то время как

$$\frac{dx_h}{dt} = \sum_i \frac{\partial x_h}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_h}{\partial t}. \quad (68)$$

Введем виртуальные перемещения

$$\delta' x_h, \quad \delta' y_h, \quad \delta' z_h.$$

Так как

$$\delta x_h - \dot{x}_h \delta t = \sum \frac{\partial x_h}{\partial q_i} (\delta q_i - \dot{q}_i \delta t), \quad (69)$$

¹ Voss A., Über die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Ann. 25, 1884, стр. 258.

то виртуальные перемещения

$$\delta' q_i = \delta q_i - \dot{q}_i \delta t \quad (70)$$

и

$$\delta' x_h = \sum \frac{\partial x_h}{\partial q_i} \delta' q_i.$$

Увеличив в (70) t на dt и q_i на dq_i , получим

$$\delta' dq_i = \delta dq_i - \dot{q}_i \delta dt - \ddot{q}_i \delta t dt. \quad (71)$$

После некоторых преобразований найдем выражение вариационного принципа в этом случае:

$$\begin{aligned} \int dt \delta T + 2 T \delta dt + dT \delta t + \delta' U dt = \\ = \int \sum \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + Q_i \right) \delta' q_i dt. \end{aligned} \quad (72)$$

В 1900—1901 гг. П. В. Воронец¹ и Г. К. Суслев² одновременно и независимо обобщили принцип Гамильтона—Остроградского на неголономные системы, придав ему форму

$$\int_0^t \left[\delta (T + U) + \sum_{v=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_v} \left(\frac{d \delta q_v}{dt} - \delta \dot{q}_v \right) \right] dt = 0 \quad (73)$$

Тогда же П. В. Воронец выразил этот принцип в квазикоординатах³.

При переходе к неголономным системам выражение вариационного принципа крайне усложняется⁴. Математически этот переход эквивалентен переходу от задачи Эйлера к задачам Лагранжа и Майера⁵.

¹ Воронец П. В., Матем. сб. т. 22, 1902, стр. 659.

² Суслев Г. К., Матем. сб. т. 21, 1901, стр. 686.

³ Неголономные координаты (или квазикоординаты) определяются так: пусть некоторые функции ψ_i связаны с обобщенными координатами q_k линейными однородными соотношениями $\psi_i = \sum_k a_{ik} \dot{q}_k$, где a_{ik} не зависят от времени, или $\psi_i dt = \sum_k a_{ik} dq_k = d'\varphi$, где $d'\varphi$ в общем случае не является полным дифференциалом. Тогда $\bar{\psi}_i = \frac{d'\varphi_i}{dt} = \sum_k a_{ik} \dot{q}_k$. Величины φ_i называются квазикоординатами, они делаются истинными координатами, если $d'\varphi \rightarrow d\varphi$.

⁴ См., например Ценов И., ДАН, нов. сер., т. LXXXIX, № 4, 1953, стр. 623.

⁵ Отметим в заключение любопытную дискуссию о правильности работы Гельдера (разд. 2, 3), в которой Джеффрис и Парс защищали Гельдера от нападок Капона (Jeffreys H., Quart. J. Mech. and Appl. Math., v. 7, part 3, IX, 1954, стр. 335, Pars L. A., там же, стр. 338; Capon R. S., там же, v. 5, part 3, IX, 1952, стр. 472).

5. Уравнения движения для неголономных систем

Еще в 1838 г. М. В. Остроградский вывел уравнения, которые имеют место для любой несвободной материальной системы. Однако эти уравнения неудобны для практических применений, так как они содержат множители связи и записаны в декартовых координатах.

Развитие техники поставило задачу о движении неголономных систем¹.

В 1872 г. Феррерс (1829—1903)² получил уравнения для таких систем. Исследования Феррерса не привели к практически приемлемому виду уравнений, так как он пользуется декартовыми координатами и в неявной форме вводит предположения о коэффициентах в уравнениях неинтегрируемых связей.

В 1877 г. Раус³ дал уравнения неголономных систем, в которые входят некоторые множители; так как их надо затем исключать, то его метод тоже неудобен.

Вопрос о выводе дифференциальных уравнений движения для неголономных систем был в конце XIX в. предметом большого числа работ. Сюда относятся работы К. Неймана, Адамара, Гёльдера, А. Майера, Чаплыгина, Аппеля, Воронца, Уиттекера и др.⁴

Для неголономных условий

$$\delta f_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} \delta q_k, \quad (74)$$

применив метод неопределенного множителя Лагранжа, получим

¹ Очерк истории динамики неголономных систем дан в вводных главах интересных работ: Муштары Х. М., О катании тяжелого твердого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости (Матем. сб., т. 39, 1932, стр. 105—126), Добронравов В. В., Аналитическая механика в неголономных координатах (Уч. записки МГУ. вып. 122, 1948, стр. 77—183).

² Ferrers, Extensions of Lagrange's equations, Quart. J. Math., № 45, 1873.

³ Routh E. J., A Treatise of Stability of a given state of motion, London, 1877.

⁴ Neumann C., Grundzüge der analytischen Mechanik, Leipziger Berichte, 1888; Hadamard J., Sur les mouvements de roulement, Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux, т. V, 1895; Hölder O., Über die Principien von Hamilton und Maupertuis, Nachricht. von d. Gesellsch. d. Wissenschaft zu Göttingen, 1896; Mayer A., Über die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung, Leipziger Berichte, 1899; Appel P., Liouville et Crelle Journ, 1900—1901; Чаплыгин С., О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости, Труды отд. физ. наук о-ва люб. ест., т. IX, 1897, стр. 10—16; Полное собрание сочинений, т. 1, 1933, стр. 159—171; Воронец П., Об уравнениях движения неголономных систем, «Математический сборник», т. XXII, вып. IV, М., 1902; Чаплыгин С. А., Исследования по динамике неголономных систем. ГТТИ, М.-Л., 1949.

уравнение Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \sum_{i=1}^m \lambda_i A_{ik}, \quad (75)$$

где A_{ik} заданные функции от q_i , которые заменяют выражения $\frac{\partial f_i}{\partial x}$ голономных условий.

Хотя в данном случае силовой функции нет, силы могут быть выражены так:

$$K_i = - \sum_{k=1}^m \lambda_k A_{ki}, \quad (76)$$

т. е. K_i суть компоненты силы, которая действует на механическую систему, обеспечивая существование неголономных условий. Так как здесь не существует никакой скалярной функции, производные которой могли бы быть компонентами силы K , то наличие сил типа K необходимо связано с неголономными связями.

При выводе уравнений движения из принципа Гамильтона или принципа Д'Аламбера для голономных систем не только q_i являются геометрически независимыми величинами, но и на δq_i не накладывается никаких зависимостей.

Тогда в силу их независимости получаются уравнения Лагранжа в числе, равном числу параметров q_i . Для неголономной же системы указанные принципы не дают системы уравнений Лагранжа в силу взаимной зависимости вариаций δq_i .

Для случая движения неголономной системы, каким является качение без скольжения тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости, выводил уравнение движения К. Нейман (1832—1925). За координаты катящегося тела он взял гауссовы координаты u , v общей точки поверхности твердого тела и горизонтальной плоскости, декартовы координаты x , y той же точки на плоскости качения и угол φ касательной к линии u в общей точке с одной из координатных осей. Затем К. Нейман задается целью получить три дифференциальных уравнения для определения величин u , v , φ с тем, чтобы получить затем x и y по найденным u , v , φ из уравнений связей с помощью квадратур. Для вывода искоемых уравнений К. Нейман ошибочно (так как связи неинтегрируемые) пользуется принципом Гамильтона, и поэтому получает неверные уравнения движения. В более поздней работе К. Нейман¹, указав на сделанную им ошибку, получает правильные уравнения, но зато в большом числе и с множителями связей.

Впервые уравнения для неголономной системы в обобщенных координатах, не содержащие неопределенных множителей Лаг-

¹ Neumann C., Grundzüge der analytischen Mechanik, Leipziger Berichte 1899.

ранжа получил в 1897 г. С. А. Чаплыгин (1869—1942)¹. В его уравнения, аналогично уравнениям Лагранжа 2-го рода, входит некоторая квадратичная функция от обобщенных скоростей, имеющая вид дифференциального выражения первого порядка.

Развитие идей Чаплыгина находим в близких по своему содержанию работах Г. Гамеля и П. В. Воронца.

П. В. Воронец (1871—1923) получил в 1901 г. уравнения для неголономных систем без множителей связи, в голономных координатах из вариационного принципа в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^k \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial q_{N+\nu}} + \sum_{\nu=1}^k p_{\nu} \sum_j^N A_{ij}^{(\nu)} \dot{q}_j, \quad (77)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

где $q_1, q_2, \dots, q_{N+k}$ — координаты системы с уравнениями связей, для которых коэффициенты $\alpha_{\nu i}$ — функции только координат q и не содержат явно времени t ,

$$A_{ij}^{(\nu)} = \left(\frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^k \frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial q_{N+\mu}} \alpha_{\mu i} \right) - \left(\frac{\partial \alpha_{\nu j}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^k \frac{\partial \alpha_{\nu j}}{\partial q_{N+\mu}} \alpha_{\mu j} \right) \quad (78)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N; \nu = 1, 2, \dots, k),$$

причем в случае, если связи неинтегрируемы, то $A_{ij}^{(\nu)}$ не могут все одновременно быть нулями; Θ есть результат подстановки в выражение живой силы T вместо обобщенных скоростей

$$\dot{q}_{N+1}, \dot{q}_{N+2}, \dots, \dot{q}_{N+k}$$

их выражений из уравнений связей; U — силовая функция; $p_{\nu} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{N+\nu}}$ — импульсы, выраженные аналогично величине Θ .

В том же 1901 г. Воронец получил уравнения движения в квазикоординатах² справедливые как для голономной, так и для неголономной системы:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) = \frac{\partial(\Theta + U)}{\partial \varphi_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_j} \sum_{r=1}^n A_{ir}^{(j)} \dot{\varphi}_r, \quad (79)$$

где

$$A_{ir}^{(j)} = \sum_{s,k=1}^n b_{si} b_{kr} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_s} - \frac{\partial a_{js}}{\partial q_k} \right). \quad (80)$$

¹ Чаплыгин С. А., см. сноску на стр. 260.

² Эти уравнения иногда неправильно называют уравнениями Гамеля или Больцмана. Однако Л. Больцман нашел их в 1902 г., а Гамель — в 1905 г.

В частном случае, разобранном Чаплыгиным в упомянутой статье, когда координаты $q_{N+1}, \dots, q_{N+k}$, соответствующие исключенным скоростям, не входят явно в коэффициенты живой силы, в силовую функцию и в уравнения связей, из (77) получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial (\Theta + U)}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^k p_{\nu} \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(\nu)} \dot{q}_j, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (81)$$

Эти уравнения можно интегрировать независимо от уравнений связей. Остальные же k координат найдутся затем с помощью квадратур из этих уравнений.

Если, наконец, все связи интегрируемые, т. е. если при всяких i, j, ν , выполняется равенство $A_{ij}^{(\nu)} = 0$, то уравнения (81) переходят в уравнения Лагранжа второго рода.

Другое направление механики неголономных систем развито П. Аппелем (1855—1930), который в 1899 г. получил уравнения, действительные как для голономных, так и неголономных связей и для любых координат. Однако в отличие от уравнений С. А. Чаплыгина, П. В. Воронца и др., для составления уравнений Аппеля требуется предварительное нахождение некоторой квадратичной функции обобщенных ускорений (а не обобщенных скоростей) — дифференциального выражения второго порядка.

В заметке¹ Аппель рассматривает уравнения Лагранжа и принцип Гамильтона. Он устанавливает, что эти уравнения неприменимы в случае неголономных систем.

Ход его рассуждений таков: полагая $T = T(q_i, \dot{q}_i)$ и пользуясь соотношением

$$d \delta s = \delta ds = \delta v dt, \quad (82)$$

легко получить из принципа Гамильтона уравнения Лагранжа. Если же система подчинена неголономным стационарным связям, то

$$\delta x = \sum_i A_i \delta q_i, \quad (83)$$

$$dx = \sum_i A_i dq_i \quad (84)$$

и

$$d \delta x = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_j}{\partial q_i} dq_i \delta q_j + \sum_{i=1}^n A_i d \delta q_i,$$

$$\delta dx = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \delta q_j dq_i + \sum_{j=1}^n A_j \delta dq_j,$$

что несовместимо с условием (82) и, следовательно, в случае такого рода систем уравнения Лагранжа неприменимы.

¹ A p p e l P., Sur les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton, Bull. de la Société Mathématique de France, т. 26, 1898, стр. 265—267.

Аппель выводит свои уравнения в частном и общем виде¹. Пусть имеется система с произвольными связями; тогда возможные перемещения ее будут $\delta x_v = \sum_i a_{vi} \delta q_i$ ($v = 1, 2, 3$), где δq_i — произвольны, а действительные перемещения за промежуток времени dt будут

$$dx_v = \sum_i a_{vi} dq_i + a_v dt, \quad (85)$$

где a_{vi} могут зависеть от времени t , от q_i и от других параметров $q_{k+1}, \dots, q_{k+n}$, которые связаны с изменениями $q_1, \dots, q_k$ соотношениями вида

$$\delta q_\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_{\mu i} \delta q_i, \quad (86)$$

$$dq_\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_{\mu i} dq_i + \alpha_\mu dt \quad (\mu = k+1, \dots, k+n)$$

где коэффициенты $\alpha_\mu, \alpha_{\mu i}$ зависят и от t и от совокупности параметров $q_1, \dots, q_{k+n}$. Коэффициенты a_v и α_μ (множители при dt) будут равны нулю, если связи не зависят от времени.

Воспользуемся теперь общим уравнением динамики

$$\sum m \ddot{x}_{vi} \delta x_{vi} = \sum X_v \delta x_v,$$

которое пригодно для всех перемещений, совместимых со связями. В силу этого оно распадается на k уравнений:

$$\sum m \ddot{x}_{v1} a_{v1} = \sum X_v a_{v1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum m \ddot{x}_{vk} a_{vk} = \sum X_v a_{vk} \quad (v = 1, 2, 3)$$

$$\text{где} \quad \sum X_v \delta x_{vi} = \sum Q_i \delta q_i, \quad Q_i = \sum X_v a_{vi}.$$

Так как из уравнения (86) следует, что $\dot{x}_v = \sum a_{vi} \dot{q}_i + a_v$, то

$\ddot{x}_v = \sum a_{vi} \ddot{q}_i$. Отсюда очевидно, что

$$a_{vi} = \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i}$$

и, следовательно,

$$\sum_v m \left(\ddot{x}_v \frac{\partial \dot{x}_v}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i \quad (87)$$

¹ Appel P., Sur les mouvements de roulement; équations du mouvement analogues à celles de Lagrange, Comptes Rendus, т. 129, 1899, стр. 317—330; Appel P., Sur une forme générale des équations de la Dynamique, Comptes Rendus, т. 129, 1899, стр. 423—27.

Положим

$$S = \frac{1}{2} \sum m x_{vi}^2 = \frac{1}{2} \sum m I^2,$$

где I — абсолютное ускорение точки m ; тогда уравнения движения (87) принимают простой и изящный вид

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = Q_i. \quad (88)$$

Эти уравнения носят название уравнений Аппеля.

Де Сен-Жермен¹ предложил называть функцию S энергией ускорения системы по аналогии с кинетической энергией, которую можно рассматривать как энергию скоростей системы. Название это вряд ли можно считать удачным.

Аппель показал², что его уравнения могут быть также получены из принципа наименьшего принуждения Гаусса (см. стр. 295). Введем функцию

$$R = S - \sum Q_i q_i, \quad (89)$$

тогда уравнение (88) можно записать так:

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_i} = 0,$$

т. е. ускорения точек системы обращают R в минимум. Заметим, что функцию R можно заменить любой другой функцией, отличающейся от нее только членами, не содержащими ускорений.

Таким образом, для составления уравнений движения в случае голономной системы надо знать U и T , а в случае неголономной — U и S . Аппель показал, что более общих уравнений, чем уравнения Лагранжа в первом и уравнения Аппеля во втором случае, не существует. Наконец, Аппель показал³, что дифференциальные уравнения движения могут быть записаны так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k + \psi_k, \quad (90)$$

¹De Saint-Germain A., Sur la fonction S introduite par M. Appel..., C. R., т. 130, 1900, стр. 1174.

²Appel P., Sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique, C. R., т. 129, 1899, стр. 459—460; Appel P., Sur une forme générale des équations de la Dynamique, Journ. f. die reine und angew. Mathem., т. 131, 1900, стр. 310—319.

³Appel P., Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique, Journ. de Mathém. pures et appliqués, т. 7, 1901, стр. 5—13.

где ψ_k — корректирующие силы, представляющие собой однородные квадратичные функции обобщенных скоростей: $\psi_k = 0$ для голономных систем и координат и $\psi_k \neq 0$ для неголономных. Можно рассматривать системы неголономные как голономные, введя обобщенные силы $\varphi_k = Q_k + \psi_k$ вместо Q_k . Аппель показал также¹, что уравнения (90) справедливы и в случае нестационарных связей².

Из более поздних работ отметим работы И. Ценова³ и ряда советских авторов, а также работы Н. Г. Четаева, Н. Е. Кочина, В. В. Добронравова и др., в которых рассмотрены нелинейные неголономные связи.

6. Геометризация проблем динамики

Проблема геометризации основных соотношений динамики, вытекавшая из глубокого внутреннего родства теории поверхностей и задачи отыскания динамических траекторий для различных механических систем, вызвала многочисленные исследования.

Теория относительности отнюдь не является первой теорией, геометризирующей динамику. Теория относительности в этом смысле была лишь первой теорией, проводившей геометризацию в пространстве—времени. Уже в классической механике, придавая принципу наименьшего действия подходящую форму, геометризовали общую задачу динамики.

Исходя из работ Якоби, Томсона и Тэта, Лиувилля и Липшица, Дарбу (1842—1912)⁴ геометризовал проблемы динамики, рассматривая среди всех возможных движений с потенциальной функцией U такие движения, которым отвечает одно и то же значение постоянной закона сохранения энергии h или, что то же самое, одна и та же полная энергия. Возьмем в качестве основной формы

$$2 T dt^2 = \sum a_{ik} dq_i dq_k; \quad (91)$$

введем импульсы

$$p_i = a_{ij} \dot{q}_j;$$

отсюда получим

$$2 T = \sum a^{ik} p_i p_k.$$

Тогда уравнение в частных производных Якоби запишется так:

$$a^{ik} \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial S}{\partial q_k} = 2(U + h). \quad (92)$$

¹ О связи уравнений Аппеля с принципом наименьшего действия см. Brill H., Wien, Sitzungsber, т. 122, 1913, стр. 933.

² См. также Аппель П., Теоретическая механика, т. II, Физматгиз, 1960.

³ Ценов И., ДАН, т. LXXXIX, № 1—4, 1953.

⁴ Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, т. II, гл. VI—VIII, Paris, 1899, стр. 480—511.

Пусть Θ — полный интеграл этого уравнения и $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n-1}$ пусть будут частные интегралы линейного относительно F уравнения

$$a^{ik} \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial q_k} = 0. \quad (93)$$

Согласно Липшицу¹ (1832—1903) имеем

$$2(U + h) a_{ik} dq_i dq_k = d\Theta^2 + f(d\Theta_1, \dots, d\Theta_{n-1}),$$

откуда для действительного движения, при котором

$$d\Theta_1 = d\Theta_2 = \dots = d\Theta_{n-1} = 0,$$

имеем

$$\oint \sqrt{2(U + h) a_{ik} dq_i dq_k} = 0. \quad (94)$$

Таким образом, с помощью этого выражения принципа наименьшего действия определение траектории тела сводится к отысканию геодезической линии

$$ds^2 = 2(U + h) a_{ik} dq_i dq_k. \quad (95)$$

Преимущество геометрической точки зрения особенно очевидно, если рассматривать механическую систему, не подверженную действию внешних сил. В этом случае траектория системы представляет собой геодезическую линию в конфигурационном пространстве.

Можно сделать дальнейшее обобщение для случая, когда потенциальная энергия не является функцией времени, введя мероопределение риманова пространства

$$d\sigma = \sqrt{E - V} ds, \quad (96)$$

где ds — элемент длины исходного пространства конфигураций. Тогда все траектории с одной и той же полной энергией E будут геодезическими линиями в пространстве с таким мероопределением.

Однако это не всегда имеет место, и поэтому необходим переход к неримановой геометрии. Риманова геометрия, как известно, имеет ту особенность, что в непосредственной близости от любой точки риманова пространства в бесконечно малой области имеет место евклидова геометрия. В неримановых геометриях, структурными элементами которых также являются линии и углы, это ограничение больше не имеет места. Поэтому оказывается возможной геометризация самых общих задач механики.

¹Lipschitz R. O. S., Journ. Crelle, т. 74, 1872, стр. 116—149.

Для этого прежде всего будем рассматривать время t как одну из координат положения и обозначим ее q_{n+1} ; следовательно, координатами положения будут q_i , где i изменяется от 1 до $n+1$, т. е. это конфигурационное пространство имеет $n+1$ измерений (вместо n).

Определим линейный элемент так:

$$ds = F(q_1, \dots, q_{n+1}, dq_1, \dots, dq_{n+1}),$$

где F — произвольная функция $2n+2$ переменных q_i и dq_i с одним лишь ограничением, что она есть однородная форма первого порядка относительно dq_i , т. е.

$$F(q_i, \alpha dq_i) = \alpha F(q_i, dq_i).$$

Рассмотрим произвольную, заданную в параметрической форме кривую

$$q_i = f_i(\tau),$$

линейный элемент которой будет

$$ds = F(q_i, \dot{q}_i) d\tau, \quad (i = 1, \dots, n+1).$$

Отсюда проблема геодезической линии между точками τ_1 и τ_2 приводится к отысканию минимума определенного интеграла

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} F(q_i, \dot{q}_i) d\tau \quad (i = 1, \dots, n+1).$$

Возьмем теперь в качестве параметра τ переменную $t = q_{n+1}$. Тогда уравнения геодезических линий будут

$$q_i = f_i(t),$$

а функции f_i определяются из минимума интеграла

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} F(q_i, \dot{q}_i, 1) dt \quad (i = 1, \dots, n).$$

Таким образом, функция F может с точки зрения механики рассматриваться как лагранжева функция L .

Если определить линейный элемент ds в $(n+1)$ -мерном пространстве как

$$ds = L\left(q_i, \frac{dq_{i-1}}{dq_{n+1}}\right) dq_{n+1} = F(q_i, dq_i) \quad (i = 1, \dots, n+1), \quad (97)$$

то проблема механического движения будет сведена к нахождению геодезической линии в $(n+1)$ -мерном многообразии.

Поэтому проблема решения уравнений динамики и проблема отыскания геодезических линий некоторого, в общем случае нериманова, многообразия эквивалентны.

Заметим, наконец, что Риччи (1853—1925) и Леви-Чивита (1873—1942), воспользовавшись тензорными методами, записали уравнения Лагранжа в следующем виде:

$$\ddot{q}_i = x^{(i)} - \left\{ \begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right\} \dot{q}_r \dot{q}_s. \quad (98)$$

Для голономной системы со связями, независимыми от времени, вводим пространство n измерений, в котором величины q представляют некоторые координаты. В этом пространстве условно определим линейный элемент

$$ds^2 = \sum a_{ik} dq_i dq_k,$$

где a_{ik} — суть такие функции от q , конечные и непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными, что квадратичная форма в правой части будет положительной.

Воспользовавшись соотношением $ds^2 = 2T dt^2$, введем его для изображающего пространства конфигураций. Тогда кривая в этом пространстве, соединяющая две конечные конфигурации системы, и в случае одной точки тождественная с соответствующей траекторией в физическом пространстве, называется динамической траекторией.

Динамическая траектория естественного движения между конечными конфигурациями при заданном значении энергии будет некоторой кривой метрического многообразия², для которой криволинейный интеграл $\int \sqrt{2(U + h)} ds$ имеет стационарное (или мини-

¹ Символы Кристоффеля, которые сами не являются тензорами, определяются через фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$ следующим образом:

$$\left[\begin{matrix} r & s \\ j \end{matrix} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^j} \right),$$

$$\left\{ \begin{matrix} r & s \\ j \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ji} \left[\begin{matrix} r & s \\ i \end{matrix} \right];$$

они используются для того, чтобы образовать тензоры при ковариантном дифференцировании

$$A_{j,p}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^p} + \left\{ \begin{matrix} p & j \\ i \end{matrix} \right\} A_j.$$

² По существу говоря, это многообразие конфигураций, в котором точка соответствует конфигурации динамической системы. Такое многообразие, будучи метризовано для склерономных систем, является римановым и определено той динамической системой, которую оно представляет, не только в малом, но и в целом.

мальное, если обе конфигурации достаточно близки) значение. Обратная теорема также имеет место.

Дальнейший шаг в геометризации динамики можно сделать, если по-прежнему считать t дополнительным измерением пространства и иметь дело с $n + 1$ -мерным конфигурационным пространством, в котором t рассматривается, наряду с обобщенными координатами, как независимое переменное. В этом пространстве последовательные этапы движения суть последовательные точки кривой. В такой картине вариация положения системы в любое время между t_1 и t_2 становится вариацией этой кривой, т. е. мировой линии механической системы. Так как два конечных положения системы в любые моменты времени t_1 и t_2 заданы, вариация выполняется между определенными границами, т. е. варьированная кривая имеет одни и те же конечные положения. Время t не играет какой-либо специальной роли в этой концепции и даже может не рассматриваться как независимая переменная. Можно было бы характеризовать кривую и в параметрической форме, рассматривая q_i и t как функции параметра τ .

Задача отыскания экстремума определенного интеграла совершенно не зависит от выбора координатной системы. Предположим, что исходная сетка координат преобразуется в новую сетку координат с помощью точечного преобразования

$$\bar{q}_i = f_i(q_i).$$

Это точечное преобразование может быть представлено как отображение n -мерного q -пространства на себя. В $(\bar{q}, t)$ -пространстве кривая преобразуется в некоторую новую кривую. Варьированная кривая преобразуется в соответственную варьированную кривую этой новой кривой. Вариация между определенными пределами в (q, t) -пространстве означает и вариацию между определенными пределами в пространстве $(\bar{q}, t)$. Обращение в нуль вариации интеграла I требует того же для вариации, выраженной в новых координатах. Поэтому уравнения Эйлера—Лагранжа сохраняют свое значение в новой системе отсчета. Лагранжева функция L и интеграл I являются инвариантами преобразования¹.

Так как t есть только добавочная переменная, то изложенное действительно и тогда, когда отношение между старыми и новыми q_i зависит от времени, что имеет место в случае, когда механическое явление рассматривается в системе отсчета, находящейся в движении. Лагранжевы уравнения остаются действительными и для произвольно движущейся системы отсчета.

Так как значение n обобщенных координат q_i определено только тем требованием, чтобы они полностью характеризовали систему,

¹ Painlevé P., Sur les mouvements et les trajectoires réelles des systèmes. Bull. Soc. Math. France, t. 22, 1894, стр. 136—184.

то мы можем выбрать другую группу величин $\bar{q}_i$ в качестве обобщенных координат. В таком случае должно существовать функциональное соотношение между этими двумя системами координат. Оно может быть записано в виде

$$\bar{q}_i = f_i(q_i), \quad (99)$$

где функции f_i должны быть конечными, однозначными, непрерывными и дифференцируемыми функциями q_i с якобианом, отличным от нуля.

Дифференцируя (99), получим

$$d\bar{q}_i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial q_i} dq_i. \quad (100)$$

Эти уравнения показывают, что, независимо от того, какие функциональные соотношения существуют между двумя группами координат, между их дифференциалами существует линейная зависимость.

С этим преобразованием координат можно связать определенную геометрическую картину. Если q_i представляют собой прямоугольные координаты n -мерного пространства, то такими же должны быть координаты $\bar{q}_i$. Рассмотрим точку P в q -пространстве и соответствующую ей точку $\bar{P}$ в $\bar{q}$ -пространстве. Определенной точке P в q -пространстве соответствует точка $\bar{P}$ в $\bar{q}$ -пространстве. В силу этого преобразование (99) называется «точечным преобразованием». Точки q -пространства находятся в взаимно-однозначном соответствии с точками $\bar{q}$ -пространства. Мы имеем отображение n -мерного пространства самого на себя. Это преобразование не только удовлетворяет требованиям однозначности, но при нем сохраняется и непрерывность. Бесконечно малая окрестность точки P преобразуется в такую же окрестность точки $\bar{P}$ и, наоборот. Хотя при таком преобразовании прямая линия в q -пространстве не будет прямой в $\bar{q}$ -пространстве, но в бесконечно малой области вокруг P прямая линия отображается в виде прямой линии, параллельные линии остаются параллельными, хотя длины и углы не сохраняются, а малый параллелепипед, содержащий точку P , преобразуется в такой же параллелепипед, содержащий точку $\bar{P}$. Функциональный детерминант преобразования есть детерминант линейных уравнений (100). Геометрически этот детерминант Δ представляет отношение объема $\bar{\tau}$ нового параллелепипеда к объему τ исходного. Если $\Delta \neq 0$, то это означает, что окрестность точки P в целом может быть отображена на окрестность точки $\bar{P}$ в целом, что является необходимым, если взаимно-однозначное соответствие между точками обоих пространств должно быть обратимым. Если $\Delta = 0$, то n -мерная окрестность P отображается на область меньшего числа

измерений вокруг $\bar{P}$, в результате чего некоторые точки вокруг $\bar{P}$ не имеют изображения в q -пространстве, в то время как другие имеют бесконечное количество отображений.

Физическое представление такого отображения пространства на самого себя может быть получено рассмотрением движения жидкости. Если частицы жидкости были бы помечены и моментальный снимок был бы сделан в некоторый момент времени и затем снова в более поздний момент, то соответственные положения частиц жидкости представляли бы отображение пространства самого на себя. Если мы мысленно вырежем в жидкости малый параллелепипед, то движение жидкости исказит углы и длины этой фигуры, но он еще остается параллелепипедом. В то же время, если жидкость несжимаема, объем параллелепипеда остается неизменным в течение движения. Аналитическая картина движения такой жидкости есть преобразование координат с функциональным детерминантом везде равным единице.

Наглядный язык n -мерной геометрии позволяет распространить механику отдельной материальной точки на произвольно сложные механические системы. Такая система может быть заменена для изучения ее движения одной-единственной точкой. Но движение этой точки происходит уже не в обычном физическом пространстве. Это есть абстрактное пространство конфигураций с таким количеством измерений, какого требует природа рассматриваемой задачи.

Ввиду произвольности координат одна группа их может быть заменена другой группой. Это преобразование координат может рассматриваться геометрически как отражение n -мерного пространства самого на себя. Это отображение не сохраняет углов и расстояний.

Первым отметил внутреннюю связь между динамикой и геометрией искривленных пространств Якоби в 1845 г. Много исследований в более позднее время было выполнено различными механиками, геометрами и аналитиками. Наиболее исчерпывающее исследование вопроса, основанное на систематическом использовании тензорного исчисления, принадлежит Синджу¹.

¹ Synge I. L., On the geometry of dynamics, *Philos. Trans. (A)*, 226, 1927, стр. 31. См. также Синдж Дж., Тензорные методы в динамике, ИЛ, 1947, там же приведена большая библиография. Отметим только некоторые работы: Beltrami E., Sulla teoria generale dei parametri differenziali, *Mem. Akad. Sci. Instituto Bologna* (2), 8 (1869) стр. 549—590; Lipschitz R., Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, *Journ. f. Math.*, Bd. 74, 1872, стр. 116—149; Hamel G., Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, Bd. 50, 1904, стр. 1—57; Darboux G., *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 2. Paris, 1889, стр. 480—511; Lipka J., On the Geometry of motion in curved n -space, *Journ. of Math. a. Phys.*, v. I, 1921, стр. 21—41; Eisenhart L. P., Contact transformations, *Annals of Math.*, v. 30, 1929, стр. 211—249 и др.

Метрический тензор g_{ik} ¹ дает возможность построить геометрию пространства любого числа n измерений, если для этого пространства будет

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^n g_{ik} dx_i dx_k,$$

причем

$$g_{ik} = g_{ki},$$

т. е. метрический тензор — симметричен. В частности, это мероопределение позволяет построить риманову геометрию.

Вводя для механической задачи параметры q_i , функциями которых являются координаты систем, и рассматривая эти параметры как криволинейные координаты n -мерного пространства, получим из

$$x_n = f_n(q_n) \quad \text{и} \quad ds^2 = \sum_{i=1}^n m_i dx_{f_i}^2 \quad (j = 1, 2, 3).$$

выражение для линейного элемента в форме

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} dq_i dq_k,$$

где a_{ik} — известные функции от q_i .

Этот линейный элемент является римановым, так как q_i — криволинейные координаты, а геометрия конфигурационного пространства только в бесконечно малых областях сохраняет евклидову структуру первоначального $3n$ -мерного пространства. Движение произвольной механической системы можно рассматривать как движение свободной частицы в некотором n -мерном римановом пространстве. Задача механики превращается в задачу дифференциальной геометрии.

Как известно, конфигурационное пространство в общем случае является не евклидовым, а римановым. Если механическая система состоит из n свободных точек, то конфигурационное пространство является n -мерным евклидовым пространством. В том же случае,

¹ Фундаментальным метрическим тензором называется симметричный ковариантный тензор второго ранга

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial \xi^\mu},$$

где x_μ , x_ν — декартовы координаты, ξ^μ , ξ^ν — векторные недекартовы координаты, а элемент расстояния ds в римановом пространстве определяется соотношением

$$ds^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu.$$

когда на некоторые из этих точек наложены связи, конфигурационное пространство есть искривленное подпространство, имеющее меньше чем $3n$ измерений, и риманов линейный элемент, который определяется кинетической энергией системы, выраженной в криволинейных координатах q_i , будет иметь вид

$$ds^2 = 2 T dt^2 = \sum a_{ik} dq_i dq_k.$$

Чтобы перейти к принципу наименьшего действия в форме Якоби, введем другой риманов элемент

$$d\sigma^2 = (E - V) ds^2;$$

стационарность определенного интеграла

$$\delta I = \delta \int_{q_1}^{q_2} d\sigma = 0$$

и составляет содержание принципа наименьшего действия в форме Якоби.

Эта задача точно та же, что и отыскание кратчайшего пути между двумя определенными конечными точками в некотором римановом пространстве. Это значит, что движение механической системы (при наличии потенциальной энергии) может быть сопоставлено движению точки по геодезической кривой некоторого риманова пространства.

Таким образом, нахождение решения динамической задачи математически эквивалентно задаче отыскания геодезической линии. В частности, в теории относительности отыскание геодезических линий в римановом пространстве есть основной метод решения задачи движения. Отличие от классической механики состоит только в том, что в теории относительности риманова структура пространства—времени есть внутреннее свойство вселенной, а не следствие кинематических связей.

По сравнению с принципом Д'Аламбера принцип Гамильтона имеет то преимущество, что в нем рассматривается один-единственный скаляр L ; таким образом, отпадает необходимость отыскивать ускорение каждой частицы и определять виртуальную работу сил инерции. Скаляр $L = T - V$ определяет движение системы. Величины T и V соответствуют двум частям уравнения Ньютона, которое можно рассматривать как соотношение равновесия силы инерции и движущей силы. Написав уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

можно рассматривать левую часть как n -компонент силы инерции в конфигурационном пространстве, а правую часть как n -компонент движущей силы. Хотя обычно первый член правой части отбрасы-

вается, так как $U = -V$ есть функция только q_i , но это ограничение отнюдь не является обязательным, и потенциальная функция может зависеть также от скоростей $\dot{q}_i$. Это действительно имеет место в электродинамике и в механике теории относительности.

7. Задача интегрирования уравнения Гамильтона—Якоби

Остановимся еще на вопросе о фактической интеграции уравнения Гамильтона—Якоби. Полное решение уравнения Гамильтона—Якоби осуществимо лишь при некоторых специальных условиях. Эти условия имеют место, в частности, в задачах теории Бора. В такой задаче одно дифференциальное уравнение в частных производных с n переменными может быть заменено n обыкновенными дифференциальными уравнениями с одной переменной, причем эти уравнения полностью интегрируемы. Такого рода задача называется задачей с разделяющимися переменными.

Метод разделения следующий. Полагаем, что функция S может быть представлена как сумма функций, каждая из которых зависит только от одной-единственной переменной

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \dots + S_n(q_n). \quad (101)$$

Осуществимо или нет такое представление функции S , непосредственно не может быть установлено. Леви-Чивита показал¹, как исследовать гамильтониан на «разделимость», но, вообще говоря, проще предположить, что функция S имеет форму (101), и испытывать это допущение непосредственно при решении уравнения в частных производных.

Основная особенность решения в форме (101) состоит в том, что импульс

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial S_k(q_k)}{\partial q_k} \quad (102)$$

становится функцией одного q_k . Напишем уравнение

$$H(q_i, p_i) - E = 0 \quad (103)$$

и решим его относительно p_k . Согласно выражению (102) это решение должно дать p_k как функцию одного q_k , в то время как фактическое решение даст p_k как функцию всех других q_i , а также и p_i . Это противоречие может быть устранено только в том случае, если некоторая комбинация этих переменных сводится просто к некоторой постоянной.

Таким образом, разделение переменных возможно только тогда, когда уравнение (103) может быть рассматриваемо как следствие //

¹Levi-Civita T., Mathematische Annalen, т. LIX, 1904, стр. 383.

соотношений вида

$$p_k = f_k(q_k, a_1, \dots, a_{n-1}, E), \quad (104)$$

где $a_1, \dots, a_{n-1}$ — произвольные постоянные, полученные при выполнении разделения переменных.

Обычно не все a_i входят в каждое из уравнений (104). Если постоянные появляются при каждом последовательном отделении переменных, то, в конце концов, найдем n постоянных a_i , и энергия E будет некоторой функцией этих постоянных

$$E = \psi(a_i).$$

Исключим a_n из этого уравнения, выразив эту постоянную как функцию $a_1, \dots, a_{n-1}, E$. Если заменить p_k через $\frac{dS_k}{dq_k}$, согласно уравнению (102), то с помощью квадратуры получим

$$S_k = \int f_k(q_k, a_1, \dots, a_{n-1}, E) dq_k + C_k. \quad (105)$$

Типичный пример — задача Кеплера. Так как

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

то

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{k^2}{r}.$$

Уравнение

$$H = E$$

может быть разделено так:

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \text{const} = \alpha, \\ p_\theta^2 + \frac{\alpha^2}{\sin^2 \theta} &= \text{const} = \beta^2, \\ \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{\beta^2}{r^2} \right) - \frac{k^2}{r} &= E. \end{aligned}$$

Процесс разделения автоматически дает нужное количество постоянных. Действительное интегрирование не создает никаких новых постоянных.

Уравнение (105) показывает, что разделимые системы позволяют получить в квадратурах полное решение уравнения в частных производных Гамильтона—Якоби. В этом случае сопряженные переменные p_k, q_k в каждой паре связаны только одна с другой и не связаны ни с какими другими. Механическая система с n степенями свободы может рассматриваться как суперпозиция n систем с одной степенью свободы. Истинные уравнения движения содержатся в уравнениях

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = t - \tau \quad (106)$$

и эти уравнения неразделимы, так как, вообще говоря, некоторые a_i (и также E) входят более чем в одну функцию S_i .

«Разделимость» в той или иной задаче не является каким-либо выражением физических свойств механической системы, но целиком является вопросом правильного выбора системы координат. Задача, неразделимая в одной системе координат, может быть сделана такой с помощью соответствующего точечного преобразования. К сожалению, общего метода для этого не существует. Так в 1918 г. Бюргерс¹ показал, что задача, возникающая при совместном рассмотрении штарк-эффекта и зееман-эффекта (электрон, вращающийся вокруг ядра, в возмущающих электрическом и магнитном полях), неразделима ни в каких координатах, но делается разделимой с помощью соответствующего канонического преобразования.

Значительный шаг в развитии методов решения для случая разделяющихся периодических систем был сделан Делоне (1816—1872)² в 1846 г. Метод Делоне, возникший из изучения астрономической задачи возмущенного движения, оказался важнейшим средством исследования проблем квантовой теории атома Н. Бора.

Пусть имеется некоторое полное решение дифференциального уравнения Гамильтона—Якоби в виде

$$S = S(q_i, a_i, \dots, a_{n-1}, E). \quad (107)$$

Применим произвольное точечное преобразование к постоянным интегрирования

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= f_{n-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_n), \\ E &= f_n(\gamma_1, \dots, \gamma_n). \end{aligned}$$

Введем эти соотношения в выражение (107). Тогда получим функцию S в виде

$$S = S(q_i, \gamma_i). \quad (108)$$

Эта функция S есть тоже полное решение уравнения Гамильтона—Якоби, если прибавить к найденному решению в качестве вспомогательного условия уравнение

$$E = f_n(\gamma_i). \quad (109)$$

¹ Burgers J. M., Het Atommodel van Rutherford—Bohr (Leiden, 1918).

² Delaunay Ch. E., Sur une nouvelle théorie analytique du mouvement de la Lune (1846). Работа Делоне излагается нами по книге: Lanczos S., The variational Principles of Mechanics, Toronto, 1949. Делоне написан также малооригинальный курс теоретической механики: Delaunay Ch., Traité de Mécanique rationnelle, Paris, 1862 стр. 1—567.

Точно так же, как мы рассматривали постоянные разделения $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$, E считая их преобразованными переменными $Q_1, \dots, Q_n$, можно рассматривать и новые постоянные $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Тогда мы получим каноническое преобразование от q_i, p_i к Q_i, P_i , которое преобразует гамильтонову функцию H в функцию

$$H' = f_n(Q_1, \dots, Q_n). \quad (110)$$

Хотя форма этой гамильтоновой функции более сложна, чем форма $H' = Q_n$, тем не менее канонические уравнения могут быть все же проинтегрированы в новых координатах. Дело в том, что H' зависит только от одной группы переменных и совсем не включает P_i . Имеем поэтому

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0, \quad (111)$$

откуда

$$Q_i = \text{const} = \gamma_i;$$

вторая группа канонических уравнений дает

$$- \dot{P}_i = \frac{\partial H'}{\partial Q_i} = \text{const} = \nu_i. \quad (112)$$

Постоянство правой части уравнения следует из того, что все Q_i — постоянные, так что

$$- P_i = \nu_i t + \delta_i \quad (113)$$

и тем самым канонические уравнения полностью проинтегрированы.

Преимущество этой более общей формы решения разделяемой системы состоит в том, что исходные постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ не имеют прямого физического смысла, в то время как новые постоянные $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ могут быть подобраны, исходя из физической природы задачи.

Таковы были основные идеи метода, разработанного Делоне в 1846 г. Его метод, развитый им для чисто астрономических задач, открыл глаза физикам на мощь гамильтоновых методов. При разделении, о котором идет речь, каждая пара сопряженных переменных связана между собой и никак не связана со всеми остальными переменными. Отсюда мы можем получить линии тока в плоскости q_i, p_i на основе уравнения

$$p_k = f_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, E),$$

рассматривая α_i как постоянные. В классической механике H — квадратичная функция от p_k , и поэтому решение уравнения $H = E$

для некоторого p_k приводит к решению квадратного уравнения. Это в общем случае приводит к двум решениям, так что для одного и того же q_k могут быть найдены два различных p_k . Мы предполагаем, что дискриминант решения положителен только для определенных пределов q_k . В этом случае q_k должны находиться между двумя определенными пределами a_k и b_k и линии тока, связанные с двумерным фазовым флюидом, должны быть замкнутыми.

Имеется еще другая возможность для того, чтобы линии тока были замкнутыми, без того, чтобы было использовано двузначное соотношение между p_k и q_k . Возможно, что некоторое переменное q_k имеет определенные пределы, заключенные между a_k и b_k в силу геометрической связности пространства. Например, если координата есть угол φ и изменяется в пределах от нуля до 2π , то линия тока замкнется, так как точки a_k и b_k по существу совпадают. Для того чтобы показать это, достаточно изогнуть плоскость кривой (например, синусоиды) в цилиндр так, чтобы конечные ординаты совпали. Изображающая движение точка попадает скачкообразно в исходное положение и будет продолжать свое движение вдоль той же линии тока.

Мы предположим, что (безразлично, в силу какой причины) все линии тока во всех p_k, q_k -плоскостях замкнуты. В этом случае движущаяся частица возвращается в ту же точку и повторяет свое движение одним и тем же образом. Мы имеем, следовательно, периодическое движение. Это, однако, имеет место только для пути движущейся точки, если он спроектирован на q_k, p_k -плоскости и не имеет места для движения во времени. Скорость, с которой точка начинает свой второй оборот, не тождественна с исходной скоростью, так как $\dot{q}_k, \dot{p}_k$ будут, вообще говоря, зависеть от всех q_i, p_i и, следовательно, возвращение одной пары переменных q_k, p_k к их начальным значениям является недостаточным условием для того, чтобы движение было периодическим. Хотя движение содержит n независимых периодичностей, но они распространяются на все переменные так, что не допускают разделения. Метод Делоне и основан на том, что он показал, как частоты движения могут быть найдены с помощью свойств двух основных функций: гамильтоновой функции H и производящей функции S . Соответствующее преобразование выявляет многократно-периодическую природу данной делимой системы и определяет ее частоту в явном виде, причем этот процесс требует только квадратур и исключений.

Перечислим в заключение кратко некоторые исследования, развивавшие в XIX в. и в начале XX в. математические идеи, заключенные в динамике Гамильтона—Якоби.

Прежде всего надо упомянуть о работах Лиувилля (1809—1882)¹, опубликованных в 1849—1856 гг., в которых рассмотрен ряд слу-

¹ Liouville, Liouville Journ., 1849—1856.

чаев, когда уравнения движения точки или системы допускают интегрирование, и проведено исследование этих случаев с помощью функции S .

Дебов в 1848 г.¹ дал новое доказательство теории Якоби и приложил его теорию к проблеме возмущенного движения планет.

Серре в двух заметках в 1848 г.² развил, хотя, как нам представляется, несколько искусственным методом, теорию интегрирования с помощью функции S при весьма специальном выборе переменных.

Штурм Ф. (1841—1919) в том же году³ исследовал теорию функции S как полного решения данного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Он рассмотрел случай, когда потенциал есть также функция времени, но не пошел дальше того, что было найдено Якоби.

Брасин Ф. (1805—1894) в 1851 г. опубликовал работу⁴, в которой показал, что аналогично тому, как можно доказать равенство

$$\frac{d}{dt} \left(\delta \frac{\partial z}{\partial \dot{\zeta}} \Delta \zeta - \Delta \frac{\partial z}{\partial \dot{\zeta}} \delta \zeta + \dots \right) = 0 \quad (114)$$

для уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial \dot{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 0,$$

так можно доказать подобную же теорему для системы

$$-\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial \dot{\zeta}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial \dot{\zeta}} - \frac{\partial z}{\partial \zeta} = 0 \quad (115)$$

и для соответствующих систем m -го порядка.

В 1851 г. Бертран⁵ посвятил ряд статей проблеме интегрирования дифференциальных уравнений динамики, а в 1852 г. он доказал⁶ теорему, аналогичную теореме скобок Пуассона, но более общую.

¹ Desboves, Démonstration de deux théorèmes de M. Jacobi, application au problème de perturbations planétaires Liouville Journ., т. XIII, 1848, стр. 397—41.

² Serret, Sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un point matériel. Comptes Rendus, т. XXVI, 1848, стр. 605—610. Sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique. Comptes Rendus, т. XXVI, 1848, стр. 639—643.

³ Sturm, Note sur l'intégration des équations générales de la dynamique. Comptes Rendus, т. XXVI, 1848, стр. 658—673.

⁴ Brassine, Théorème relatif à une classe d'équations différentielles simultanées analogue à un théorème employé par Lagrange dans la théorie des perturbations. Liouville Journ., т. XVI, 1851, стр. 283—288.

⁵ Bertrand, Mémoire sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique, Liouville Journ., т. XVII, 1851, стр. 121—174.

⁶ Bertrand, Sur un nouveau théorème de Mécanique Analytique. Comptes Rendus, т. XXXV, 1852, стр. 698—699.

Ф. Бриоски (1827—1897) в 1853 г. исследовал эту же проблему и развил идеи Бертрана¹.

В 1855 г. Ж. Бур (1832—1866) напечатал мемуар², посвященный проблеме интегрирования дифференциальных уравнений механики. Он обобщил известную теорему о том, что знание половины всей системы интегралов дифференциальных уравнений (эти интегралы должны удовлетворять некоторым условиям) приводит к остальным интегралам с помощью одних только квадратур.

В том же году Лиувиль³ показал, что доказанная Буром для случая, когда H не зависит от времени, теорема может быть обобщена и на случай, когда $H = H(t)$.

Бриоски показал далее в 1855 г.⁴, что если обозначить

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial\alpha}{\partial q} \frac{\partial\beta}{\partial p} - \frac{\partial\alpha}{\partial p} \frac{\partial\beta}{\partial q}, \quad (116)$$

то

$$\sum \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(q, p)} = 1, \quad (117)$$

где α, β — сопряженные пары интегралов канонических систем.

Наконец, в 1857 г. Бертран⁵ развил результаты своей работы 1851 г.

Чрезвычайно интересный результат получил Лиувиль⁶.

Венгерский ученый М. Рети (1846—1925) посвятил принципу наименьшего действия и принципу Гамильтона большую работу, доложенную Венгерской Академии Наук в 1894 г.⁷ Он рассматривает вопрос о возможных путях обобщения этих принципов на случай, когда не имеет места закон живых сил, и выясняет связи между принципом Гамильтона и принципом наименьшего действия.

¹ Brioschi, Sulla variazione delle costanti arbitrarie nei problème della dinamica. Tortolini Annali, т. IV, 1853, стр. 298—311.

² Bour, Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique Analytique, Liouville Journ., т. XX, 1855, стр. 185—200.

³ Liouville, Note à l'occasion du mémoire précédent de M. Edmond Bour, Liouville Journ., т. XX, 1855, стр. 201—202.

⁴ Brioschi, Sopra una nuova proprietà degli integrali di un problema di dinamica. Tortolini Annali, т. VI, 1855, стр. 430—432.

⁵ Bertrand, Mémoire sur quelquesunes des formes les plus simples qui puissent prendre les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel. Liouville Journ., т. II (2 Série) 1857, стр. 113—140.

⁶ Liouville, Expression remarquable de la quantité, qui dans le mouvement d'un système de points matériels à liaisons quelconques, est un minimum en vertu du principe de la moindre action. Comptes Rendus, hebdomadaires des séances de l'Académie de Sciences, т. XLII, № 24, Paris, 1856.

⁷ Réthy M., Über das Princip der kleinsten Aktion und das Hamilton'sche Princip. Mathematische Annalen, т. 48, Leipzig, 1897, стр. 514—547.

Некоторые любопытные свойства движения тяжелой точки установил Дарбу¹.

В работе «Über die principien der Mechanik» Л. Кенигсбергер² рассмотрел силы, которые являются функциями не только координат и времени, но также функциями скоростей, ускорений и других высших производных пути по времени. Задача эта поставлена явно под влиянием проблемы сил магнитного действия. Он рассматривает поэтому лагранжеву функцию, называемую им кинетическим потенциалом (с обратным знаком), как функцию координат системы, их производных до n -го порядка и времени. Очевидна связь его работы, на что он и сам указывает, с исследованиями Гельмгольца (см. гл. 5).

В 1903—1904 г. произошла дискуссия между Хевисайдом, Боссе и Орром по вопросу о соотношении принципа наименьшего действия и уравнений Лагранжа³. В дискуссии рассматривался вопрос о выводе уравнений Лагранжа из принципа наименьшего действия и обратно, а так же о сфере применимости принципа наименьшего действия в механике.

Дискуссия мало дала для развития проблемы.

В статье «Über die dynamischen Gleichungen von Lagrange» Г. Морера⁴ вывел уравнения Лагранжа с помощью теории инвариантов квадратичных форм.

Наконец, в статье «La nouvelle forme des équations de Mécanique»⁵ Пуанкаре в 1901 г. дал обобщение уравнений Лагранжа.

8. Уравнения Рауса

Существенно новое, особенно для приложений в физике, внес в аналитическую механику Раус (1831—1907).

Э. Дж. Раус в 1877 г. вывел уравнения движения, занимающие промежуточное положение между уравнениями Гамильтона и уравнениями Лагранжа.⁶ Для получения уравнений Рауса разобьем все степени свободы системы на две группы: одну, состоящую из $(f-r)$ степеней свободы, будем описывать обобщенными координатами Лагранжа $q_1, \dots, q_{f-r}; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{f-r}$, вторую же группу будем характеризовать гамильтоновыми обобщенными координатами и

¹ Darboux C., Sur le mouvement des corps pesants et le principe de la moindre action. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2-я сер., т. XXXVI, 1912, Paris, стр. 119—130.

² Königsberger L., Berl. Sitzber., 1896, стр. 899—944. 1173—1183.

³ Heaviside O., Nat. 67, 1903, стр. 297—298; Bosset A., Nat. 67, 1903, стр. 343—344; Orr W., Nat. 67, 1903, стр. 415.

⁴ Morera G., Atti di Torino, т. 38, 1903, стр. 57—70.

⁵ Poincaré H., C. R., т. 132, № 7, 18 II 1901.

⁶ Routh E. I. A., treatise of stability of a given state of motion, London, 1877.

импульсами

$$q_{f-r+1}, \dots, q_f; \quad p_{f-r+1}, \dots, p_f.$$

Вместо функции Лагранжа L или функции Гамильтона H вводим теперь функцию Рауса R , причем

$$R = R(t, q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{f-r}; p_{f-r+1}, \dots, p_f).$$

Определяем R следующим образом:

$$R = \sum_{k=f-r+1}^f p_k \dot{q}_k - L(t, q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad (118)$$

или

$$R = H(t, q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f) - \sum_{k=1}^{f-r} p_k \dot{q}_k. \quad (119)$$

При $r = f$ функция Рауса переходит в функцию Гамильтона, а при $r = 0$ с точностью до знака переходит в функцию Лагранжа. Написав два выражения для полного дифференциала R из (118), (119) и воспользовавшись известным dL , после небольших преобразований найдем уравнения Рауса:

для $k = 1, 2, \dots, f - r$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial R}{\partial q_k}, \quad p_k = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}, \quad (120)$$

для $k = f - r + 1, f - r + 2, \dots, f$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial R}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = +\frac{\partial R}{\partial p_k}. \quad (121)$$

Первая группа k уравнений относится к типу уравнений Лагранжа (при $R = -L$), а r уравнений второй группы относятся к типу уравнений Гамильтона (при $H = R$).

Раус выводил эти уравнения для приложений к циклическим системам¹. Для этого примем, что координаты второй группы степеней свободы являются циклическими и, следовательно, не входят в функцию Лагранжа, а также, как очевидно, и в функцию Рауса. Вследствие этого, согласно первому уравнению из второй группы, p_k оказываются постоянными. Подставляя эти постоянные p_k в

¹ Циклическими координатами системы называются свободные координаты системы, когда длина бесконечно малого перемещения системы не зависит от значений координат, а зависит лишь от их изменений. Материальная система называется циклической системой, если ее энергия является с достаточным приближением однородной квадратичной функцией скоростей изменения ее циклических координат.

уравнения (118) и (119), получим функцию Рауса, зависящую только от $f - r$ координат q_k первой группы и от $\dot{q}_k$. Для этих координат справедлива первая группа уравнений Рауса, в силу чего задача сводится к $f - r$ уравнениям типа Лагранжа.

Гельмгольц положил этот вид уравнений Рауса в основу своей теории моно- и полициклических систем, связанной с основными проблемами термодинамики (см. гл. V).

Система уравнений Рауса приобретает большой интерес, если в функцию R входят не величины q_i , а только соответствующие p_i . Этот случай так называемых циклических координат встречается всегда, когда имеет место вращательное движение тел вращения — циклической координатой является здесь угол вращения, проявляющийся только в соответствующем моменте вращения. Если заключить вращающееся тело в непрозрачную оболочку, то скрытое движение тела проявит себя только в необычном поведении при движении в пространстве тела как целого.

Из представления о циклических движениях и их законах (особенно $\dot{p}_i = 0$) вытекает возможность коренного изменения обычного представления о потенциальной энергии. Допустим, что кинетическая энергия распадается на две части:

$$E_{\text{кин}} = E_1(q_i, \dot{q}_i) + E_2(q_{i+1}, p_{i+1}).$$

Тогда функция Рауса будет иметь вид (c — постоянная)

$$R = E_1(q, \dot{q}) - E_2(q, c) - U(q).$$

Величины $q_{i+1}, \dots, q_n$ определяются из дифференциальных уравнений

$$p_i = \frac{dE_1}{dq_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial [E_1 - (U + E_2)]}{\partial q_i}.$$

Обе величины U и E_2 являются функциями только от q с постоянными коэффициентами и в формулы всегда входят вместе. Поэтому возникает соблазнительная возможность рассматривать потенциальную энергию U также как кинетическую энергию, обусловленную скрытыми циклическими движениями. В широком плане это пытался сделать Дж. Дж. Томсон¹.

Записав уравнения Лагранжа с помощью обобщенных импульсов p_k в виде

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad (122)$$

видим, что в случае, если q_k — циклическая координата, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

¹ См. гл. V, разд. 3.

то уравнение (122) интегрируется и дает

$$p_k = \text{const} = c_k.$$

Это значит, что импульс, связанный с циклической координатой, остается постоянным в течение движения (подробно об этом см. гл. V).

Применение циклических переменных позволяет указать на один интересный аспект закона сохранения энергии, который показывает связь этого закона с временем в классической механике. Глубокая связь классической механики и теории относительности очень хорошо видна и в этом принципиальном вопросе, так как в релятивистской теории энергия также соответствует четвертой (временной) компоненте четырехмерного тензора энергии-импульса.

Рассмотрим склерономную систему, т. е. такую, для которой L не содержит явно времени. Будем рассматривать t не как независимую переменную, а примем, что $n + 1$ переменных q_n и t являются функциями некоторого параметра τ . В этом случае система имеет $n + 1$ степеней свободы. Обозначим производную по τ штрихом. Интеграл действия будет иметь следующую форму:

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(q_n, \frac{q'_n}{t'}\right) t' d\tau;$$

так как только t' входит в подынтегральное выражение, а t не входит, то t является циклической координатой.

Используем теперь теорему, согласно которой импульс, связанный с такой переменной, постоянен во время движения. Для этой цели найдем импульс, связанный со временем

$$p_t = \frac{\partial(Lt')}{\partial t'} = L - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{q'_i}{t'^2} \right) t' = L - \sum p_i \dot{q}_i = -(\sum p_i \dot{q}_i - L).$$

Выражение в скобках есть полная энергия E , равная для обычной механической системы $T + V$. Следовательно, мы получили важную теорему, которая имеет место как для консервативной, так и для неконсервативной системы: обобщенный импульс, связанный со временем t , есть отрицательная величина полной энергии. Если t — циклическая координата, т. е. система консервативна, то

$$p_t = -E = \text{const},$$

т. е. мы получаем закон сохранения энергии.

Как известно, циклическая переменная может быть исключена, что уменьшит число переменных вариационной задачи на единицу. В данном случае мы можем исключить t из вариационной задачи и получить новую вариационную задачу, которая определяет дви-

жение в пространстве, но ничего не говорит о том, как описывается эта траектория во времени t .

Изменим прежде всего лагранжеву функцию. Положим

$$\bar{L} = L\tau - p_i \tau' = (L - p_i) \tau' = \sum p_i \dot{q}_i \tau',$$

тогда получим новый интеграл действия

$$I = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum p_i \dot{q}_i \tau' d\tau,$$

который, так как

$$\sum p_i \dot{q}_i = \sum a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T,$$

может быть записан в виде

$$I = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} T\tau' d\tau.$$

Итак, хотя общий метод интегрирования уравнений Лагранжа и не может быть дан, но при некоторых условиях может быть найден, по крайней мере, частный интеграл. Это имеет место в случае циклических переменных. Вообще говоря, лагранжева функция $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ включает все координаты и скорости. Однако может быть и такой случай, когда некоторая переменная q_k не входит в нее, хотя $\dot{q}_k$ входит. Сначала в 1877 г. Раус, а затем Гельмгольц рассмотрели этот важный случай. Раус назвал эти переменные «отсутствующими координатами», Дж. Дж. Томсон — киностеническими, Гельмгольц — циклическими переменными.

9. Интегральные инварианты Пуанкаре

В 1890 г. А. Пуанкаре (1854—1912) ввел понятие об интегральных инвариантах¹. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

где X_i — заданная функция x_i, t . Эти уравнения можно рассматривать как уравнения движения точки в пространстве n измерений. Многообразие такого рода точек, занимающих в начальный момент некоторую m -мерную область A_0 , будет и для всякого последующего момента занимать некоторую m -мерную область A . Распространенный на область A m -кратный интеграл называется интегральным

¹ Poincaré H., Sur les problèmes des trois corps et les équations de la dynamique, Acta Math., т. 13, 1890, стр. 5—270.

инвариантом, если он сохраняет одинаковые значения для всякого момента времени t . Так, например, при движении несжимаемой жидкости интеграл для объема жидкости, распространенный на все ее частицы, заполняющие в начальный момент определенную область, будет интегральным инвариантом, ибо состоящий из этих частиц объем жидкости не изменяется со временем.



А. ПУАНКАРЕ (1854—1912)

Теория интегральных инвариантов, созданная А. Пуанкаре, изложена им в труде «*Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*» т. III.

Рассмотрим этот вопрос несколько подробнее.

В каждой совокупности преобразований имеются некоторые основные величины, которые не изменяются при преобразовании. Это — основные инварианты, которые определяют природу преобразования. Если мы начинаем изучение канонического преобразования, то устанавливаем инвариантность дифференциальной формы $\sum p_i dq_i$, чтобы обеспечить инвариантность канонических уравнений. Однако инвариантность этих уравнений имеет место и при более общих условиях. Необходимое и достаточное условие

канонического преобразования дано в форме требования, чтобы разность двух дифференциальных форм была полным дифференциалом dS некоторой функции S .

Этот вопрос тесно связан с вопросом о геометрической структуре фазового пространства. В самом деле, лагранжево конфигурационное пространство имеет определенную геометрическую структуру, ибо в нем задан риманов линейный элемент ds , квадрат которого является квадратичной дифференциальной формой переменных q_i . Эта величина ds^2 есть основной инвариант лагранжева точечного преобразования и в то же время — бесконечно малое расстояние, определяющее геометрическую структуру конфигурационного пространства.

В гамильтоновом фазовом пространстве имеет место нечто подобное. Здесь существует основная дифференциальная форма, связанная с каноническим преобразованием и являющаяся инвариантом этих преобразований, хотя она и совершенно отлична от риманова ds^2 . Она также квадратична в дифференциалах, но связана с двумя смещениями, и поэтому уже не представляет расстояния. Геометрия фазового пространства не является поэтому обычной метрической геометрией. Она представляет собой скорее геометрию, в которой могут быть измерены площади, а не расстояния.

Так как основной дифференциальный инвариант канонических преобразований линеен для обоих бесконечно малых перемещений, то мы называем его билинейной дифференциальной формой. Вся теория канонических преобразований может быть основана на этой инвариантной дифференциальной форме. Дифференциальная величина

$$\sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i = dS \quad (123)$$

напоминает по своему виду работу сил, могущих быть представленными в виде производной одной скалярной функции. Для того чтобы определить, таков ли характер тех или иных рассматриваемых сил, мы допускаем, что силы, действующие на частицу, приводят ее некоторым произвольным путем назад в исходное положение. Если полная работа силы равна нулю для замкнутого пути, то силы удовлетворяют этому условию, в противном случае — нет. Подобный критерий может быть приложен к форме (123).

Проинтегрируем (123) по какой-либо замкнутой кривой l фазового пространства. Тогда мы получим два линейных интеграла в левой части (123), так как каждая p , q -точка связана с соответствующей P , Q -точкой с помощью преобразования. Интеграл справа исчезает. В силу этого мы получаем инвариантный принцип, в котором уже нет неопределенной функции S :

$$\Gamma = \oint \sum p_i dq_i = \oint \sum P_i dQ_i. \quad (124)$$

Для любой замкнутой кривой фазового пространства может быть образована величина Γ — «циркуляция», которая является инва-

риантом по отношению к произвольному каноническому преобразованию.

Пуанкаре назвал любой интеграл, связанный с фазовым флюидом и имеющий свойство оставаться неизменным в течение движения, «интегральным инвариантом». Объем σ фазового флюида есть один из примеров интегрального инварианта. Другим примером может служить величина, введенная Гельмгольцем под названием циркуляции.

Вариация интеграла действия A для произвольных вариаций q_i (вариация может не равняться нулю в конечных точках пути) будет

$$\delta A = \left[\sum_{i=1}^n p_i \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (125)$$

Эта важная теорема сохраняется без какого-либо изменения и в гамильтоновом формализме, так как вариация p_i не влияет на δA . Поэтому (125) имеет место для произвольных вариаций q_i и p_i .

Проведем произвольную замкнутую кривую в фазовом пространстве в некоторое время t_1 . Точки этой кривой жестко связаны с частицами флюида, через которые проходит кривая. В некоторое другое время t_2 мы найдем эту кривую где-нибудь в фазовом пространстве, причем она опять окажется замкнутой кривой. Пусть в момент времени t_1 эта кривая задана в параметрической форме

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(\tau), \\ p_i &= \varphi_i(\tau). \end{aligned} \quad (126)$$

Образует линейный интеграл, распространенный вдоль нашей замкнутой кривой:

$$\Gamma = \oint \sum_{i=1}^n p_i dq_i = \oint \sum p_i q'_i d\tau. \quad (127)$$

Эта величина есть инвариант движения

$$\Gamma = \text{const}. \quad (128)$$

Фазовое пространство в моменты времени t_1 и t_2 может быть представлено в виде двух сечений $(2n+1)$ -мерного пространства состояний. Некоторая точка M_1 переходит за время движения в точку M_2 , а соседняя с ней точка N_1 — в точку N_2 . Линия M_1M_2 есть мировая линия частицы флюида и аналогично — линия N_1N_2 . Интеграл действия имеет значение A между M_1 и M_2 и значение $A + dA$ между N_1 и N_2 . Так как линия N_1N_2 может быть рассматриваема как вариация линии M_1M_2 , то мы можем применить теорему (125); получим

$$dA = \left[\sum p_i dq_i \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (129)$$

Проинтегрировав это уравнение между двумя точками τ_1 и τ_2 некоторой кривой, получим

$$\Delta A = \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum p_i dq_i \right]_{\tau_1}^{\tau_2}. \quad (130)$$

Однако, если мы совершим полный обход вдоль замкнутой кривой, то начальная и конечная точки совпадут и ΔA обратится в нуль, а тогда

$$\left[\oint \sum p_i dq_i \right]_{t_1}^{t_1} = 0, \quad (131)$$

и так как t_1 и t_2 являются произвольными, то отсюда следует теорема (128).

Гельмгольц дал интересное применение этой теоремы. Рассмотрим движение частицы в силовом поле с потенциальной энергией V . Связанное с этим движением фазовое пространство будет шестимерным. Однако применение шестимерного пространства не является необходимым. Вместо того, чтобы рассматривать p_1, p_2, p_3 как три добавочные координаты, введем вектор с компонентами p_1, p_2, p_3 в точках q_1, q_2, q_3 пространства конфигураций. Возьмем в качестве q -координат обычные прямоугольные координаты x, y, z . Тогда мы получим замкнутую кривую в обычном трехмерном пространстве и вдоль этой кривой непрерывное векторное поле с компонентами p_1, p_2, p_3 . А так как вектор момента равен $m\mathbf{v}$ в трехмерном пространстве, то

$$\Gamma = m \oint \mathbf{v} ds. \quad (132)$$

Таким образом, шестимерное фазовое пространство заменено трехмерным пространством конфигураций. Хотя это пространство конфигураций, вообще говоря, не связано с действительным пространством, но в случае одной частицы оно совпадает с физическим пространством, причем различные пути в нем представляют пути частицы, описанные при различных начальных условиях. Эти пути можно рассматривать как линии тока так называемой идеальной жидкости. Хотя на частицу жидкости действуют силы, созданные окружающими частицами, однако Эйлер показал в своих гидродинамических уравнениях, что эти силы имеют потенциал. Поэтому условия применимости принципа Гамильтона удовлетворены, и линии тока движущейся жидкости те же, что и в пространстве конфигураций. Поэтому

$$\oint \mathbf{v} ds = \text{const}$$

для идеальной жидкости вдоль замкнутой кривой, а так как циркуляция равна нулю в момент времени $t = 0$, то она равна нулю в любой момент движения. Это значит, что жидкость, которая была вначале свободна от вихрей, остается такой все время движения, т. е. вихри не могут быть созданы или разрушены.

А. Пуанкаре показал, что общие уравнения динамики обладают тем свойством, что они допускают линейный интегральный инвариант

$$\int \sum p_i dq_i \quad (133)$$

или, что естественно получается из теории Гамильтона,

$$\int \sum p_i dq_i - H \delta t.$$

Выражению под знаком интеграла, как указывает Э. Картан (1869—1951), можно дать название тензора «количество движения — энергии»¹. Элементарное действие Гамильтона есть не что иное, как тензор, рассматриваемый вдоль траектории.

Дифференциальные уравнения движения не только допускают интегральный инвариант (133), но и являются единственными дифференциальными уравнениями, обладающими этим свойством. Поэтому в основу механики можно положить «принцип сохранения количества движения и энергии». «Движения материальной системы (с вполне голономными связями, находящейся под действием сил, имеющих силовую функцию) управляются дифференциальными уравнениями первого порядка, связывающими время, параметры положения и параметры скоростей, и эти дифференциальные уравнения характеризуются тем свойством, что интеграл тензора «количества движения — энергии», распространенный на любую непрерывную линейную замкнутую последовательность состояний системы, не меняет значения при перемещении этих состояний каким-либо способом вдоль соответственных траекторий»².

Эта формулировка, хотя и весьма абстрактна, но имеет и некоторые преимущества. Дело в том, что уравнения Лагранжа не зависят от координатной системы, в чем и заключается их значение, но время в этих уравнениях еще играет особую роль. Напротив, принцип сохранения количества движения и энергии позволяет дать законам динамики форму, не зависящую от выбора координат пространства — времени. Действительно, если одновременно заменить переменные, относящиеся к параметрам положения системы и ко времени, то достаточно иметь выражение тензора «количества движения — энергии» в новой системе координат, чтобы получить уравнения движения. Эта схема охватывает, естественно, и релятивистскую механику.

Рассмотрим непрерывную линейную замкнутую последовательность траекторий, каждая из которых ограничена промежутками времени $\Delta t = t_1 - t_0$. Полная вариация действия, когда мы вернемся к начальной траектории, будет равна нулю, так что, интегрируя

¹ К а р т а н Э., Интегральные инварианты, Гостехиздат, М.—Л., 1940.

² Там же, стр. 9.

по произвольному параметру a , ($x_i = f_i(a, t)$), получим:

$$\int (\sum m_i \dot{x}_i \delta x_i - E \delta t)_1 = \int (\sum m_i \dot{x}_i \delta x_i - E \delta t)_0.$$

Для понимания дальнейшего введем пространство состояний — пространство семи измерений ($x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$). Траекторию можно определить как последовательность состояний, соответствующих одному и тому же реальному движению точки, т. е. как решение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i, \quad m \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

В силу этого криволинейный интеграл

$$\int \sum m_i \dot{x}_i \delta x_i - E \delta t,$$

взятый вдоль некоторой замкнутой кривой пространства состояний, не изменяется, если переместить каким-либо способом каждое из составляющих его состояний вдоль траектории, соответствующей этому состоянию.

Подынтегральное выражение можно рассматривать как элементарную работу четырехмерного вектора, имеющего в качестве пространственных компонентов три компонента импульса, а в качестве компонента по времени — энергию.

Если теперь взять последовательность одновременных состояний, т. е. положить $\delta t = 0$, то получим выражение

$$\int \sum m_i \dot{x}_i \delta x_i,$$

для которого имеет место следующая теорема: если рассматривать замкнутую последовательность траекторий и если взять на этих траекториях состояния, соответствующие какому-либо определенному моменту t , то интеграл $\int \sum m_i \dot{x}_i \delta x_i$, взятый по замкнутой последовательности полученных таким образом состояний, не зависит от t . Это и есть определение интегрального инварианта по Пуанкаре.

Картан отмечает следующее важное обстоятельство: «Замечательно, что если вместо последовательности одновременных состояний мы будем рассматривать последовательность состояний, удовлетворяющих соотношениям

$$\delta x_i = \dot{x}_i \delta t,$$

то тензор $\sum m_i \dot{x}_i \delta x_i - E \delta t$ приводится к элементарному действию Гамильтона

$$dV = \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U \right] dt.$$

Следовательно, интегральный инвариант Пуанкаре и действие Гамильтона представляют собой лишь два различных вида интег-

рала «количество движения — энергия», хотя с первого взгляда между этими двумя понятиями и нет никакой связи»¹. Доказав, что дифференциальные уравнения движения являются единственными, которые допускают в качестве инварианта интеграл $\int dV$, взятый по любому замкнутому контуру, можно перейти к построению других интегральных инвариантов. Из них очень важное значение имеет интегральный инвариант

$$I = \iint \sum dp_i dq_i; \quad (134)$$

т. е. если дано двумерное многообразие траекторий и на каждой траектории даны состояния, соответствующие определенному моменту времени t , то двойной интеграл (134), распространенный по всем этим состояниям, не зависит от t .

Пусть p_i и q_i — функции двух параметров u и v ; тогда

$$I_1 = \iint \sum_i \left| \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial v} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right| du dv. \quad (135)$$

Инвариантность I_1 будет доказана, если показать, что

$$\sum_i \left| \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial v} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right| = \sum_i \left| \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial u} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial v} - \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial v} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial u} \right|$$

при условии, что $\bar{q}_i$ и $\bar{p}_i$ получаются из q_i и p_i с помощью канонических преобразований. Напишем преобразование в форме

$$p_i = \frac{\partial V(q_1, \bar{p}_1, \dots, t)}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial V(q_1, \bar{p}_1, \dots, t)}{\partial \bar{p}_i}, \quad (136)$$

где V — некоторая функция, зависящая от $2f$ старых и новых переменных, а также от времени; V — производящая функция канонического преобразования.

Заменяя с помощью (136) q_i , p_i через $\bar{q}_i$, $\bar{p}_i$, имеем:

$$\sum_i \left| \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial v} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right| = \sum_i \left| \frac{\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \bar{p}_k} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \bar{p}_k} \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial v} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right| = \sum_{ik} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \bar{p}_k} \left| \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial \bar{p}_k}{\partial v} \frac{\partial q_i}{\partial u} \right|.$$

¹ Картан Э., Интегральные инварианты, стр. 16—17.

Переставляя индексы, получим

$$\sum_{ik} \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial p_i} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial u} & \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial v} & \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{array} \right|. \quad (137)$$

Теперь, если воспользоваться вторым из уравнений (136), то подынтегральное выражение будет

$$\sum_i \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial u} \sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{p}_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial v} \sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{p}_i \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial v} \end{array} \right| = \sum_i \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial u} & \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial v} & \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial v} \end{array} \right|, \quad (138)$$

чем и доказана инвариантность I_1 .

Аналогично можно доказать инвариантность интеграла

$$I_2 = \int \int \int \sum dp_i dp_k dq_i dq_k, \quad (139)$$

а также интеграла

$$I_3 = \int \int \int \int \sum dp_i dp_k dp_l dq_i dq_k dq_l \quad (140)$$

и так далее, и, наконец, последнего интеграла

$$I_f = \int \dots \int dp_1 \dots dp_f dq_1 \dots dq_f. \quad (141)$$

Таким образом, объем в фазовом пространстве остается инвариантом относительно канонических преобразований.

Пуанкаре использовал интегральные инварианты с замечательным успехом в своих исследованиях по устойчивости.

В заметке, опубликованной в 1896 г. в *Comptes Rendus*¹, Кенигс также исследовал интегральные инварианты, выражаемые $(n-1)$ -кратными интегралами вида

$$I = \underbrace{\int \dots \int}_{n-1} \sum_i M_i dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \quad (142)$$

в предположении, что коэффициенты X дифференциальных уравнений, равно как и функции M_i , не зависят от t . Интересные замечания о теории и применении интегральных инвариантов сделал Дондер². Пуанкаре выяснил связь теории интегральных инвариантов с якобиевой теорией множителей системы, важность которых для интегрирования системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (143)$$

¹ Koenigs G., C. R. Acad. d. Sci., Paris, t. CXXII, 1896, стр. 25.

² Donder, Circolo di Palermo, т. XV, 1901, т. XVI, 1902.

уже отмечена нами. Эта связь состоит в том, что функция под знаком интегрального инварианта, имеющего порядок, равный порядку системы, является множителем Якоби и обратно.

Пуанкаре не ограничился исследованием только инвариантов порядка, равного порядку системы; он показал¹, что полезно ввести в рассмотрение и более общие инварианты, определяемые интегралами, распространенными на многообразие с каким угодно числом измерений меньшим порядка системы (линейные, поверхностные и другие интегралы).

10. Принцип Гаусса

Особое место среди вариационных принципов механики, которые должны указать интегралы или функции, имеющие экстремум в действительном движении системы, занимает принцип наименьшего принуждения Гаусса (1777—1855). Этот принцип является общим началом и может быть выражен одной из самых простых аналитических формулировок, в которой нахождение уравнений движения любой системы, голономной или неголономной, сводится к нахождению минимума функции второй степени.

Установление этого принципа, опубликованного Гауссом в 1829 г., связано, как он сам указывает, с его работами по способу наименьших квадратов.

В короткой заметке² Гаусс с изумительной ясностью и лаконичностью не только осветил вопросы, связанные с формулируемым им принципом, но также высказал весьма интересные методологические соображения и кратко остановился на существовавших тогда принципах механики. Рассматривая вопрос о значении принципов механики, он писал: «Если для прогрессивного развития науки и для индивидуального исследования представляется более удобным идти от легкого к тому, что кажется более трудным, а от простых законов к более сложным, то, с другой стороны, наш ум, дойдя до более высокой точки зрения, требует обратного движения, в свете которого вся статика представляется ему в качестве частного случая динамики. И упомянутый нами геометр (речь идет о Лагранже — Л. П.), по-видимому, оценил это обратное движение, представляя в качестве преимущества принципа наименьшего действия возможность охватить одновременно законы движения и законы равновесия, если его рассматривать в качестве принципа наибольшей или наименьшей живой силы. Но надо признать, что эта мысль является более остроумной, чем верной, так как в этих двух случаях мини-

¹ Poincaré H., Méthodes nouvelles de la mécanique céleste, т. III, Paris, 1899, стр. 22—24.

² Гаусс К., Об одном новом общем принципе механики. Цит. по приложению к книге: Лагранж, Аналитическая механика, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 411—414; «Сборник», стр. 170—172.

мум имеет место при совершенно различных условиях». Такая точка зрения Гаусса естественно приводит его к формулировке общего принципа механики — принципа наименьшего принуждения.

Принцип Гаусса — это попытка обобщения, которая позволяет определить движение системы точек, подчиненных некоторым связям, если известно движение соответствующей системы без связей.



К. ГАУСС (1777—1855)

Предположим, что во время t некоторая частица с номером r , имеющая массу m_r , находится в точке A_r и что, если каждая частица движется свободно, она будет в точке B_r через время dt . Соответствующее положение при наложенных связях обозначим через C_r .

Это означает, что «принуждение», вызываемое связями, обнаруживается в том, что положение B_r не совпадает с C_r , т. е. оно зависит от отрезка $B_r C_r$ и будет равно нулю, когда B_r совпадет с C_r , так как в этом случае естественное движение будет иметь характер движения в отсутствии связей. Целесообразно принять, кроме того, что «принуждение» пропорционально m_r , так как для изменения состояния точки (для сообщения ей ускорения) необходимо некото-

рое усилие, которое при прочих равных условиях тем больше, чем больше масса. В силу этих соображений целесообразно оценивать принуждение для точки произведением

$$m_r(B_r C_r)^2,$$

а для систем

$$\sum_r m_r(B_r C_r)^2$$

Заметим еще раз, ввиду важности этого обстоятельства, что C_r — положение, достигаемое точкой к концу заданного промежутка времени в естественном движении, а B_r — в воображаемом свободном движении¹. Сумма

$$\sum_r m_r(B_r C_r)^2$$

была названа Гауссом «принуждение» и он показал, что эта сумма меньше для действительно осуществляющегося движения, чем для всякого другого движения, совместимого с наложенными связями.

Принцип Гаусса (и Герца) можно записать так (вводя силы):

$$\sum_r m_r \left\{ \left(\ddot{x} - \frac{X_r}{m_r} \right)^2 + \left(\ddot{y} - \frac{Y_r}{m_r} \right)^2 + \left(\ddot{z} - \frac{Z_r}{m_r} \right)^2 \right\} \quad (144)$$

есть минимум (при фиксированных скоростях). Это выражение имеет то преимущество перед формулировками самих Гаусса и Герца, что позволяет определить действительное движение при наличии связей без того, чтобы заранее знать движение этой системы в отсутствие связей. В самом деле, для системы свободно движущихся точек согласно уравнениям движения Ньютона обращается в нуль выражение

$$Z = \sum_r m_r \left(\ddot{x}_r - \frac{X_r}{m_r} \right)^2 + \dots \text{ и т. д.} \quad (145)$$

Стационарность Z без всяких дополнительных условий приводит к минимуму. Это следует из того, что Z , будучи суммой существенно положительных членов, должен иметь минимум согласно теореме Вейерштрасса о непрерывных функциях.

Принцип Гаусса проще принципа наименьшего действия в том отношении, что он не требует интегрирования по времени. Однако он требует рассмотрения ускорений, в то время как принцип наименьшего действия требует рассмотрения скоростей. Принцип Гаусса применим и к неголономным системам.

Величина $\ddot{x}_r - \frac{X_r}{m_r}$ есть в известном смысле мера действия внешних условий на r -ю координату. В приведенной статье Гаусс говорит: «Весьма примечательно, что когда свободные движения

¹ Cp. Lipschitz R., Journ. für Mathem., Bd. LXXXII, 1877, стр. 316.

несовместимы с природой системы, то они изменяются совершенно так же, как геометры при своих исчислениях изменяют выводы, полученные ими непосредственно, применяя к ним метод наименьших квадратов с тем, чтобы сделать эти выводы совместимыми с необходимыми условиями, предписанными природой вопроса¹. Поясним это замечание Гаусса.

В способе наименьших квадратов определяется сумма квадратов индивидуальных ошибок m измерений n параметров, причем $m > n$, и значения параметров проблемы определяются из того принципа, что эта сумма должна быть минимумом.

Принцип наименьшего принуждения заключает $3n$ членов суммы, образующей Z , которые соответствуют $3n$ наблюдений. Это число больше числа неизвестных $\ddot{q}_i$ в силу m заданных кинематических условий. «Ошибка» формально представлена отклонением величины действующей силы от силы инерции. Множитель $1/m_i$ может быть интерпретирован как весовой коэффициент по аналогии с неравноточными наблюдениями, которым приписывается вес в зависимости от их особенностей. Таким образом, Гаусс сам подчеркивает связь своего принципа с разработанным им вычислительным методом наименьших квадратов. Действительно, величина, стоящая в скобках в (145), является для r -й точки отклонением от свободного движения, вызванным принуждением. Эту величину легко увязать с даламберовой потерянной силой (т. е. той частью силы F_r , которая не затрачивается на движение r -й точки), а именно она равна потерянной силе, деленной на массу, и

$$Z = \sum \frac{1}{m_i} (F_r^*)^2, \quad (146)$$

где F_r^* — потерянная сила.

Мы видим, что потерянные силы и обратные массы играют здесь такую же роль, как погрешности и статистические веса в теории ошибок.

Рассмотрим, что же собственно означало «наименьшее принуждение». Для этого найдем, какие величины должны варьироваться при вычислении $\delta Z = 0$ и какие оставаться постоянными.

Неизменными должны оставаться состояние системы для любого момента времени, т. е. $\delta x_r = 0$ и $\delta \dot{x}_r = 0$, а также условия связей наложенные на систему. В случае системы с голономными связями, имеющими вид $F(x_i) = 0$, при варьировании необходимо принять во внимание дополнительные условия

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, r), \quad (147)$$

¹ Гаусс К., Об одном новом общем принципе механики, ... стр. 414.

где r — число уравнений связи, а следовательно, $3n - r$ — число степеней свободы системы. Из (147) получим

$$\sum_i \frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_i} \delta \ddot{x}_i = 0, \quad (148)$$

выполнив двукратное дифференцирование с учетом $\delta x_i = 0$ и $\delta \dot{x}_i = 0$. Наконец, не должны изменяться и силы, действующие на систему, и массы:

$$\delta X_i = 0, \quad \delta m_i = 0.$$

Отсюда следует основной для понимания рассматриваемого принципа вывод, что варьировать нужно лишь $\ddot{x}_i$. Из уравнений (145) и (148) найдем, применив метод неопределенных множителей Лагранжа:

$$\delta Z = 2 \sum_i^{3n} \left(m_i \ddot{x}_i - X_i - \sum_{k=1}^r \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta \ddot{x}_i = 0. \quad (149)$$

Отсюда без труда можно получить равенство нулю выражения в скобках что непосредственно дает уравнения Лагранжа первого рода. Таким образом, принцип Гаусса действительно является новым общим началом механики.

Зоммерфельд замечает, что «это начало механики равноценно принципу Д'Аламбера и, подобно последнему, представляет собой дифференциальный принцип, потому что оно трактует поведение системы только в настоящий (не в будущий или прошедший) момент времени»¹.

Строгая формулировка принципа Гаусса такова: для материальной системы со связями без трения, находящейся под действием каких угодно сил, естественное движение отличается от всех остальных, совместных со связями, тем, что для него принуждение со стороны связей (так же как и давление на связь) имеет наименьшее значение, если исключить свободное движение.

Гиббс в прекрасной работе² применил принцип Гаусса к различным задачам, в особенности к вопросу о вращении твердых тел; наконец, А. Майер также воспользовался этим принципом³.

¹ Зоммерфельд А., Механика, Москва, ИЛ, 1947, стр. 295.

² Gibbs, W., On the fundamental Formulae of Dynamics. American Journal of Mathematics, т. II, 1879.

³ Mayer A., Über die Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung für reibungslose Punktsysteme und zur Regulierung der Stöße in reibungslosen Systemen, die dem Zwange von Bedingungsleichungen unterliegen. Ber. der. Math. Phys. Kl. d. Königl. Sachs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig. Sitzung 3.VII. 1899.

Ср. также Валье-Пуссен Ш.-Ж., Лекции по теоретической механике, т. 2, ИЛ, М., 1949.

Дж. В. Гиббс (1839—1903) в 1879 г. независимо от Гаусса и из совершенно других соображений вывел принцип

$$\sum (X_i - m\ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i \leq 0. \quad (150)$$

Гиббс ищет в динамике метод, аналогичный методу Лагранжа в статике, который основывался бы на принципе возможных перемещений, а не был бы простым сведением динамики к статике с помощью принципа Д'Аламбера. Для того случая, когда налицо только неголономные координаты, Гиббс дает новые уравнения движения

$$\frac{\partial A}{\partial \dot{q}_i} = Q_i, \quad (151)$$

где

$$A = \frac{1}{2} \sum m_i U_i^2, \quad \text{а} \quad U_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2.$$

Наконец, в 1903 г. Ф. Э. В. Журден¹ независимо от Гиббса и Аппеля ввел обобщенные координаты в формулу $\sum (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0$ и нашел уравнение (151). Но когда он затем узнал о том, что Аппель установил пригодность уравнения (151) для неголономных систем, он доказал, что эти уравнения согласуются с расширенными уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \sum m_i \left(\dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots),$$

последний член левой части которых может быть приведен к виду

$$\sum m_i x_i \frac{\partial x_i}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

и притом лишь тогда, когда система голономна. Дальнейшее обобщение было дано Кёнигсбергером².

11. Принцип Герца³

Глубокое развитие идей Гаусса в связи с идеей Гельмгольца о кинетическом объяснении всех видов энергии при помощи «скрытых движений» дал в 90-х г. XIX в. Г. Герц (1857—1894), разработавший принцип прямейшего пути. Познавательная ценность этого принципа состоит в том, что он сводит задачи механики к проблеме геодезических линий, коренным образом геометризует классическую динамику.

¹ Jourdain, On Gauss principle of least constraint and the equations of Mechanics, Math. Gazette, т. II, 1903, стр. 337—340.

² Königsberger L., Die Principien der Mechanik, Mathematische Untersuchungen, Leipzig, 1901.

³ Раздел 11 написан совместно с А. Т. Григорьяном.

Во введении к «Принципам механики» Герц характеризует существующие картины механических процессов. Он считает, что до середины XIX в. полным объяснением явлений природы считалось сведение этих явлений к бесчисленным, действующим на расстоянии силам между атомами материи. Но в конце XIX в. под влиянием резко возросшего значения принципа сохранения энергии физика «предпочитает рассматривать относящиеся к ее области



Г. ГЕРЦ (1857—1894)

явления как превращения одной формы энергии в другую и видеть в качестве своей конечной цели сведение явлений к законам превращения энергии». Тогда в механике понятие силы уступает место понятию энергии. Однако, если картина, основанная на силе, была построена, «то о второй картине этого, разумеется, сказать нельзя». По мнению Герца, при этом исходят из четырех независимых друг от друга основных понятий, отношения между которыми должны составить содержание механики. Два из них (по Герцу) носят математический характер — пространство и время; два других — масса и энергия — вводятся как две физические сущности, являющиеся определенными неуничтожаемыми количествами. Из анализа результатов опыта выводится следствие, что энергию можно разделить на

две части, одна из которых зависит только от скорости изменения обобщенных координат, а другая — от самих координат. Здесь связаны между собой понятия пространства, массы и энергии. «Для того же, чтобы связать все четыре понятия, а вместе с тем и течение во времени, мы воспользуемся, — говорит Герц —, одним из интегральных принципов обычной механики, пользующихся понятием энергии. Каким из них мы воспользуемся, — довольно безразлично»¹.

В каком отношении эта картина находится к картине классической механики? Прежде всего, она охватывает значительно больше особенностей движения, чем классическая, основанная на понятии силы.

По мнению Герца, современная физика пользуется языком учения об энергии, «потому что этим путем ей легче всего избежать рассуждений о вещах, о которых она очень мало знает и которые не имеют никакого влияния на то существенное, что она хочет выразить». Ведь именно в первой картине необходимы представления об атомах, молекулах и их движениях. И хотя мы теперь убеждены в их существовании, «но форма атомов, их взаимосвязь, их движения в большинстве случаев остаются совершенно скрытыми от нас: число атомов во всех случаях необозримо велико»².

Герц указывает, что «так как мы можем дать различные изложения принципов механики при различном выборе положений, лежащих в ее основе, то мы получаем различные картины вещей, которые мы можем проверять и сравнивать друг с другом в отношении их допустимости, правильности и целесообразности». Таких картин, по мнению Герца, можно построить три. В первой из них, следуя Архимеду, Галилею, Ньютону, Лагранжу, в основу положены понятия пространства, времени, силы и массы. Вторая картина — более позднего происхождения. В ней под влиянием физики и открытия закона сохранения энергии понятие силы в изложении механики с самого начала уступает место понятию энергии. В этой картине исходят также из четырех основных понятий: пространство, время, масса, энергия. Для того чтобы установить взаимоотношения всех четырех понятий и вместе с тем рассмотреть развитие явлений во времени, можно воспользоваться одним из интегральных принципов механики, которые строятся на понятии энергии, например, принципом Гамильтона, смысл которого Герц усматривает в том, что разность между кинетической и потенциальной энергиями должна быть возможно малой на протяжении всего времени движения.

¹ Герц Г., Принципы механики, изложенные в новой связи, изд. АН СССР, М., 1959, стр. 29—30.

² Там же, стр. 32.

Хотя этот закон и не является простым по форме, все же он в одном-единственном определении однозначно воспроизводит все естественные превращения энергии из одной формы в другую и тем самым позволяет полностью предвидеть будущее развитие физических явлений (по крайней мере, обратимых). Однако принцип Гамильтона в обычной его форме не охватывает движение систем с неголономными связями.

Герц выдвигает третью систему принципов механики, которая отличается от первых двух главным образом тем, что она пытается исходить только из трех независимых основных представлений: времени, пространства и массы. Герц ссылается при этом на Кирхгофа¹, который в своем курсе механики еще раньше отметил, что эти три независимые друг от друга понятия необходимы, но также и достаточны для развития механики. Вместо понятия силы и энергии, исключаемых Герцем из основных понятий, он вводит представление о скрытых связях, скрытых массах и скрытых движениях.

Основной закон, связывающий фундаментальные понятия пространства, времени и массы воедино, Герц выражает в форме, представляющей весьма тесную аналогию с обычным законом инерции: «каждое естественное движение самостоятельной материальной системы состоит в том, что система движется с постоянной скоростью по одному из своих прямейших путей»².

Это положение объединяет закон инерции и принцип наименьшего принуждения Гаусса в одно-единственное утверждение.

Выражаясь языком ньютоновой механики, Герц считает, что нет иных движений, кроме движений по инерции связанной системы.

Прямым путем Герц называет такой, для которого все его элементы имеют одинаковое направление, а кривым — такой, когда направление его элементов изменяется. В качестве критерия кривизны, как и в геометрии точки, вводится скорость изменения направления при изменении положения. Из всех возможных путей, в тех случаях когда движение системы ограничено связями, выделяются некоторые, обладающие особенно простыми свойствами. Это прежде всего пути, которые во всех положениях искривлены так незначительно, как это только возможно. Именно их Герц называет прямейшими путями системы. Затем идут пути кратчайшие. При известных условиях понятия прямейших и кратчайших путей совпадают: «Это соотношение, — говорит Герц, — будет нам вполне понятно, если мы вспомним теорию поверхностей... Перечисление и систематизация всех возникающих при этом соотношений относится к геометрии системы точек... Так как система n точек выражает $3n$ многообразие движений, которое, однако, может быть

¹ Kirchhoff G., Vorlesungen über theoretische Physik, т. I, Mechanik. Leipzig, 1872, стр. 1 и след.

² Герц Г., Принципы механики..., стр. 43.

уменьшено связями до любого произвольного числа, то в результате этого возникает большое число аналогий с геометрией многомерного пространства, причем эти аналогии заходят отчасти так далеко, что те же самые положения и обозначения могут иметь место как здесь, так и там¹.

Смысл такого метода изложения, по мнению Герца, состоит прежде всего в том, что он устраняет искусственное разделение механики точки и механики системы, позволяя рассматривать любое движение как движение системы. Кроме того, такой геометризованный метод выражения ярко оттеняет тот факт, что метод изложения Гамильтона скрывает свои корни не в особых физических основах механики, как это обычно принимают, но что он, собственно говоря, является чисто геометрическим методом, который может быть обоснован и развит совершенно независимо от механики и который не находится с ней в более тесной связи, чем любое другое используемое механикой геометрическое познание¹. Это нашло свое выражение в аналогиях, обнаруженных при сопоставлении идей Гамильтона в механике и геометрии многомерного пространства.

Герц доказывает, что для голономных систем каждый прямейший путь есть геодезический и обратно, причем геодезическим путем материальной системы он называет путь, длина которого между двумя любыми положениями отличается лишь на бесконечно малую величину высшего порядка от длины любого другого бесконечно близкого соседнего пути между теми же положениями (в неголономных системах это не имеет места).

Кратчайший путь между двумя положениями есть геодезический, но геодезический путь не есть обязательно кратчайший, хотя он всегда есть кратчайший между любыми двумя достаточно близкими соседними положениями, находящимися на конечном расстоянии друг от друга.

Определим длину ds элемента траектории в случае такого смещения системы, когда точка r передвигается из A_r в B_r , уравнением

$$m(ds)^2 = \sum m_r(A_r B_r)^2,$$

где m — масса системы.

Угол α между ds и другим элементом траектории, по которой точка r смещается из A'_r в B'_r , определяется уравнением

$$m ds ds' \cos \alpha = \sum m_r(A_r B_r)(A'_r B'_r).$$

Эти выражения распространяются и на пространство трех измерений.

Кривизна траектории в какой-либо точке определяется как предел отношения угла между направлениями двух крайних участков элемента траектории к его длине, когда он становится бесконечно малым. В случае системы, свободной от связей, кривизна будет равна

¹ Герц Г., Принципы механики . . . , стр. 46—47, 49.

нулю (движение по «прямой» линии). Герц показал, что из всех элементов пути, совместимых со связями и имеющих заданное направление, система движется по тому, у которого кривизна наименьшая.

Необходимым и достаточным аналитическим условием геодезического пути является требование, чтобы интеграл между какими-либо двумя точками пути имел вариацию, равную нулю, причем вариации должны исчезать на пределах интеграла и вариации координат и их дифференциалы удовлетворять уравнениям — условиям связей.

Исчезновение вариации интеграла не есть, однако, достаточное условие для того, чтобы путь между двумя конечными положениями был кратчайшим; для этого необходимо, чтобы его вторая вариация была существенно положительной. Для достаточно близких соседних положений пути это условие всегда выполняется.

Уже из этого изложения можно видеть две особенности механики Герца, связанные с тем, что в исходных предпосылках он ограничивается тремя, а не четырьмя (как это имеет место у Ньютона и Гамильтона) понятиями: во-первых, отсутствие среди основных понятий понятия силы (или энергии) приводит к усложнению изложения и не дает простого пути для решения конкретных задач; во-вторых, особо важная роль отводится геометрическим образам. Если первая особенность ограничивала практическое значение его механики, то вторая была чрезвычайно важным этапом на пути синтеза аналитического и геометрического аспектов механики.

Найдем теперь, следуя Герцу, дифференциальные уравнения геодезического пути в прямоугольных координатах. $3n$ прямоугольных координат x_ν , которые мы сначала рассматриваем как функции любой переменной, должны до и после вариации удовлетворять i уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^n x_{L\nu} dx_\nu = 0, \quad (152)$$

где L принимает значение от 1 до i , а величины $x_{L\nu}$ следует рассматривать как непрерывные функции от x_ν . Соответственно, $3n$ вариации dx_ν связаны i уравнениями, получаемыми из уравнения (152) варьированием:

$$\sum_{\nu=1}^{3n} x_{L\nu} d\delta x_\nu + \sum_{\nu=1}^{3n} \sum_{\mu=1}^{3n} \frac{\partial x_{L\nu}}{\partial x_\mu} \delta x_\mu dx_\nu = 0. \quad (153)$$

Так как длина ds элемента пути зависит только от dx_ν , а не от x_ν , то ее вариация будет:

$$\delta(ds) = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} \delta dx_\nu = \sum_{\nu=1}^{3n} \frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} d\delta x_\nu, \quad (154)$$

причем

$$\delta \int ds = \int \delta ds = 0.$$

Согласно правилам вариационного исчисления умножим каждое уравнение (153) на пока произвольные функции φ_L от координат x_ν и сложим сумму левых частей полученных уравнений (она равна нулю) с вариацией элементов интеграла. Затем посредством интегрирования по частям исключим дифференциалы вариаций и положим равными нулю множители при произвольных вариациях δx_ν . В итоге получим $3n$ дифференциальных уравнений следующего вида :

$$d \left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} \right) + \sum_{L=1}^i x_{L\nu} d\varphi_L - \sum_{L=1}^i \sum_{\mu=1}^{3n} \left(\frac{\partial x_{L\mu}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial x_{L\nu}}{\partial x_\mu} \right) \varphi_L dx_\mu = 0, \quad (155)$$

которые вместе с уравнениями (152) образуют $3n + i$ уравнений для определения $3n + i$ функций x_ν и φ_L . Эти уравнения (155) являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы путь был геодезическим. Отсюда, обозначив через 0 и 1 нижний и верхний пределы, получим

$$\delta \int ds = \sum_{\nu=1}^{3n} \left[\left(\frac{\partial ds}{\partial dx_\nu} + \sum_{L=1}^i x_{L\nu} \varphi_L \right) \delta x_\nu \right]_0^1 = 0, \quad (156)$$

так как на конечных точках пути вариации dx_ν исчезают¹.

Затем Герц доказывает теорему, в которой выражена, по существу говоря, глубокая связь его механики с геометрической оптикой и теоремой Бельтрами—Липшица. Теорема Герца гласит: если построить во всех положениях некоторой поверхности прямейшие пути (а следовательно, в случае голономной системы — геодезические), перпендикулярные к этой поверхности, и отложить вдоль этих путей равные длины, то получим новую поверхность, которая будет пересекать эти прямейшие пути также ортогонально.

Таким образом, в самой сердцевине механики Герца заключаются геометрические соотношения, которые связывают ее с общей теорией поверхностей. Пространственные формы механического движения материальных тел играют поэтому у Герца основную роль.

Естественно возникает вопрос об отношении принципа Герца к принципу наименьшего действия Эйлера—Лагранжа в его классической форме и в форме, которую придал ему Якоби, и к принципу Гамильтона.

Герц посвятил этому вопросу несколько разделов своей книги. Так как в голономной системе прямейший путь между двумя достаточно близкими положениями является одновременно кратчайшим, то естественный путь такой системы между указанными положениями короче, чем какой-нибудь другой возможный путь между теми же

¹ См. также Су слов Г. К., Механика Герца, Изв. Киевского университета, 1898 г.

положениями. Эта теорема сразу приводит к принципу наименьшего действия в форме Якоби. Обозначим через m , массу, через ds , — длину пути точки в системе в определенный момент времени; тогда эта теорема гласит, что вариация интеграла

$$\int ds = \frac{1}{\sqrt{m}} \int \sqrt{\sum_{v=1}^n m_v ds_v^2}$$

исчезает при естественном движении системы, а это и есть принцип наименьшего действия в форме Якоби. Согласно обычному пониманию механики, — отмечает Герц, — приведенная теорема представляет собой частный случай теоремы Якоби, а именно, случай, когда силы отсутствуют. Однако, «по нашему мнению, наоборот, предпосылки полной теоремы Якоби следует считать более узкими, а теорема Якоби является специальной формой выражения нашей теоремы»¹. Такая точка зрения Герца основана на том, что Якоби для получения своего выражения принципа наименьшего действия должен был воспользоваться законом сохранения энергии, чтобы с его помощью исключить время, в то время как принцип Герца совершенно не зависит от этого закона. Кроме того, выражение Якоби, в отличие от принципа Герца, справедливо лишь для голономных систем.

Легко показать далее, следуя Герцу, что естественное движение свободной голономной системы переводит систему из данного начального в достаточно близкое конечное положение за более короткое время, чем какое-либо другое возможное движение с одинаковым постоянным значением энергии, так как в этом случае энергия и скорость одинаковы, и время перехода пропорционально длине пути. В этом случае интеграл по времени от энергии равен произведению данного постоянного значения энергии на промежуток времени перехода. Таким образом, получается принцип наименьшего действия Эйлера—Лагранжа. Отношение этого принципа к принципу Герца такое же, как принципа наименьшего действия в форме Якоби.

Аналогичные рассуждения могут быть приведены и для принципа Гамильтона.

Герц рассматривает, наконец, вопрос о том, в какой степени телеологические умозаключения на самом деле связаны с этими принципами. По его мнению, такая связь не вытекает с необходимостью из рассмотрения якобы будущих целей движения. Более того, представление о таком телеологизме даже недопустимо. То, что «такое понимание этих принципов не необходимо, вытекает из того, что свойства естественного движения, являющиеся как бы проявлениями цели, на самом деле устанавливаются как необходимые следствия закона (т. е. принципа Герца. — Л. П.), в котором

¹ Герц Г., Принципы механики..., стр. 169.

не содержится никакого выражения предвидения будущего¹. Недопустимость же такого представления вытекает из того, что «если бы природа действительного имела цель достигать кратчайшего пути, наименьшей затраты энергии, кратчайшего времени, то невозможно было бы понять, как могут существовать системы, в которых эти цели хотя и достижимы, но постоянно терпят неудачу»².

Таким образом, Герц со своих материалистических позиций полностью отвергает какие-либо телеологические домыслы, связываемые без должного обоснования с рассматриваемыми принципами.

Выведа далее гамильтонову характеристическую и главную функции, Герц отмечает, что в них, по его мнению, «содержится только слегка завуалированный смысл прямейшего расстояния...»³.

Принцип Герца был бы просто частным случаем принципа Гаусса, если бы не заменил силы, действующие на систему, связями ее с другими системами, находящимися с ней во взаимодействии. Этим самым Герц как бы изучал только свободные системы. Для своего геометрического рассмотрения Герц должен был считать все массы кратными некоторой условной единичной массы. Тогда, так как $m_r = 1$, $X = 0$, из гауссова выражения (145) получим

$$Z = \sum_{r=1}^n \ddot{x}_r^2. \quad (157)$$

Что, собственно, в этом случае означает верхний предел суммирования, остается неясным, так как число единичных масс не поддается точному определению.

Заменим теперь $\ddot{x}_r$ на $\frac{d^2 x_r}{ds^2} \frac{ds^2}{dt^2}$. Для этого введем по терминологии Герца элемент длины

$$ds^2 = \sum dx_r^2. \quad (158)$$

Величину ds надо рассматривать как элемент длины в n -мерном евклидовом пространстве координат $x_1, \dots, x_n$, в котором элемент длины на самом деле имеет форму выражения (158). Так как закон сохранения энергии, который является следствием уравнений Лагранжа первого рода, а следовательно, и принципа Гаусса, в данном частном случае приводит к выражению

$$\frac{1}{2} \sum \left(\frac{dx_r}{dt} \right)^2 = T$$

¹ Герц Г., Принципы механики..., § 364, стр. 173.

² Там же, § 365, стр. 173.

³ Там же, § 417, стр. 189.

или

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \text{const},$$

то, разделив выражение (157) на квадрат этой постоянной, получим

$$K = \sum \left(\frac{d^2 x_r}{ds^2}\right)^2. \quad (159)$$

Герц назвал K кривизной траектории, описываемой системой, и постулировал, что для действительного движения

$$\delta K = 0, \quad (160)$$

т. е. «всякая свободная система пребывает в своем состоянии покоя или равномерного движения вдоль прямейшего пути»¹. Этот способ формулирования общего принципа механики можно рассматривать как естественное обобщение первой аксиомы Ньютона.

Зоммерфельд правильно отметил, что «механика Герца построена в высшей степени увлекательно и последовательно, но в силу сложности замены сил связями оказалась малопродуктивной»².

Механику Герца часто называют «механикой без силы». Понятие силы, хотя и вводится Герцем³, однако оно не является основным исходным понятием его механики. В этом состоит прежде всего резкое отличие механики Герца⁴ от обычного ее изложения. Сложность понятия силы в классической механике, абсолютизация его многими крайними ньютонианцами и заманчивая возможность объяснить силу движением некоторых (хотя бы и скрытых) масс привели многих физиков второй половины XIX в. к попыткам пересмотреть смысл и место понятия силы в системе механики.

Важнейшим стимулом в этом отношении было развитие континуальной физики поля, в первую очередь электромагнитного.

Классическое понятие силы, которое возникло из изучения непосредственного контакта (удара) двух масс, постепенно стало рассматриваться не как выражение взаимодействия тел в процессе движения, а как нечто независящее от движения материи. Физика поля, напротив, по самому своему характеру подсказывала возможность рассматривать силу как вторичное понятие, выражающее взаимодействие среды (эфира) и весомых тел.

В том же направлении влияло и введение Гельмгольцем понятия скрытых масс и скрытых движений для объяснения специфического, не укладывающегося в рамки обычной механики характера тепло-

¹ Г., Принципы механики ..., 417. стр. 158.

² Зоммерфельд А., Механика, стр. 298.

³ Герц Г., Принципы механики..., § 455, стр. 200.

⁴ Подробное изложение механики Герца и ее развития см. Котов В. Ф., Механика Герца, Учен. записки МГУ, вып. 7, 1957, стр. 201—257.

вых процессов. Поэтому естественно было попытаться отказаться в механике от сложного понятия силы как исходного понятия, положив в основу взаимодействие скрытых и наблюдаемых масс. Принципиально эта концепция была прогрессивной, так как она стремилась выразить все основные понятия механики через движение масс, рассматриваемое как исходный пункт. Но в силу исторической ограниченности физики XIX в. в этой концепции характер и поведение скрытых объектов рассматривались как чисто механический комплекс взаимодействий. Кроме того, скрытые массы оставались скрытыми, непознаваемыми элементами этой картины, что неизбежно приводило к агностическим выводам.

Герц был не первым ученым, разрабатывавшим во второй половине XIX в. «механику без силы». До него это в наиболее отчетливой форме пытался сделать Кирхгоф. Кирхгоф не отвергал совершенно понятия силы, а только отказывал ему в первичности¹.

Однако всесторонне развил и последовательно изложил эту точку зрения только Герц.

12. Заключительные замечания

Подведем итоги. Быстрое развитие аналитических методов решения задач механики в XVIII в. в трудах Эйлера, Д'Аламбера, Лапласа, Лагранжа и др. привело к созданию аналитической механики. «Аналитическая механика» Лагранжа, которую другой замечательный аналитик Гамильтон справедливо назвал научной поэмой, послужила отправным пунктом для разработки в XIX в. аналитических методов динамики. Однако уже в лагранжевом аналитическом методе рассмотрения механики системы с помощью так называемых уравнений Лагранжа второго рода имеется глубокая внутренняя связь с геометрическими проблемами. Гауссов метод криволинейных координат на поверхности совпадает с методом Лагранжа, так как оба метода зависят только от собственных существенных свойств поверхностей и механических систем.

Аналитическая механика Лагранжа дала особенно полезный и гибкий аппарат для решения технических, прикладных, а также различных физических задач; свое глубокое обоснование она нашла в принципе наименьшего принуждения Гаусса.

Следующим этапом развития аналитической динамики были исследования Гамильтона двадцатых-тридцатых гг. XIX в. Отправляясь от оптико-механической аналогии, выражающейся в глубоком внутреннем родстве принципа Ферма для лучевой оптики и принципа наименьшего действия для динамики системы, Гамильтон развил, а несколько позднее К. Якоби и М. В. Остроградский

¹ Kirchhoff G., Vorlesungen über theoretische Physik, т. I, Mechanik, Leipzig, 1872, стр. 1.

дополнили и усовершенствовали новый аспект аналитической динамики — динамику в форме Гамильтона—Якоби. Эта динамика образует единый комплекс методов, оказавшихся важнейшим оружием физического исследования в электродинамике, учении о теплоте, статистической механике, квантовой механике и механике релятивистской. Эти исследования потребовали рассмотрения уравнений движений системы уже не в обычном трехмерном евклидовом пространстве, а в обобщенных пространствах: фазовом (Гиббс) и конфигурационном.

Многосторонняя разработка аналитической динамики в XIX в. после работ Гамильтона и Якоби дала исследователям в самых различных областях физики и техники мощный, гибкий и изумительный по многогранности метод. Сюда относятся прежде всего замечательные работы Якоби и Остроградского по теории интегрирования дифференциальных уравнений, теория последнего множителя Якоби, исследование варьированных движений между варьированными пределами, понижение порядка при наличии известных интегралов, теория кинетических фокусов Томсона и Тэта, теория интегральных инвариантов Пуанкаре, Кёнига, Матье, и т. д... Раус вывел уравнения, которые занимают промежуточное положение между уравнениями Лагранжа и каноническими уравнениями Гамильтона. Несколько позднее Гельмгольц положил этот тип уравнений в основу своей теории моно- и полициклических систем, связанной с основными проблемами термодинамики. Гельмгольц же, который в своих последних работах широко использовал принцип наименьшего действия, назвал лагранжеву функцию $L = T - V$ кинетическим потенциалом, отметив, что по аналогии с термодинамикой можно назвать L свободной энергией. Гельмгольцу, кроме того, принадлежат исключительно интересные теоремы взаимности. Принцип Гамильтона был обобщен на неконсервативные и на неголономные системы. Серре, Талызин, Слудский, Сомов исследовали вопрос о характере вариаций в принципе наименьшего действия и принципе Гамильтона, а Бобылев подробно изучил вторую вариацию и нашел условия для того, чтобы из условия стационарности интеграла Гамильтона вытекал минимум его для действительного механического движения. Сравнение различных принципов произвел в 1896 г. Гёльдер, а также Фосс.

Во второй половине XIX в. выявилась органическая связь механики в форме Гамильтона—Якоби с теорией преобразований. В 1877 г. Софус Ли определил касательные преобразования в связи с проблемой теории возмущений. Если уравнения Лагранжа инвариантны по отношению к точечным преобразованиям, то канонические уравнения Гамильтона являются инвариантными по отношению к касательным преобразованиям. Лиувилль показал, что при любом движении, определяемом канонической системой, протяженность или объем в фазовом пространстве (p, q) будут инвари-

антными. В 1891 г. Ф. Клейном была проанализирована связь лучевой оптики и динамики в n -мерных пространствах.

Канонические уравнения оказались, по существу говоря, математическим выражением принципа Гюйгенса, рассматриваемого в его первоначальном геометрическом виде. Механическое движение с этой точки зрения рассматривается как непрерывное саморазвертывание касательного преобразования (Уиттекер). Глубокая аналогия между идеями гамильтоновой механики, не зависящей от выбора системы координат, и геометрией многомерных пространств привела к геометризации механики. Было выяснено, что разыскание движения голономных систем со связями, независимыми от времени, под действием сил, имеющих потенциал, может быть сведено к задаче геодезических линий. Механика Герца, основанная на его принципе прямейшего пути, была геометризована в n -мерном пространстве, однако, она, несмотря на исключительную последовательность, оказалась мало плодотворной в силу сложной замены сил связями со скрытыми, вообще говоря, системами.

Внутренний синтез аналитических аспектов динамики и геометризации в n -мерных пространствах, отражая глубокое родство выражения количественных связей материального мира в анализе и геометрии, привел к такой «геометризации механики», которая в какой-то степени подготовила аналогичные, но гораздо более фундаментальные идеи теории относительности. Геометризация принципа наименьшего действия в форме Якоби

$$\delta \int \sqrt{2(E - V)} \sum_i m_i ds_i^2 = 0,$$

определяющего траектории с одной и той же полной энергией, была осуществлена в работах Лиувилля (1856 г.), Липшица (1871), Томсона и Тэта (1879 г.), Леви-Чивита (1896) и Дарбу, посвятившего этой проблеме две части «Лекций по общей теории поверхностей».

Первые идеи о связи динамики системы с движением точки в n -мерном пространстве были довольно неотчетливо изложены Риманом в 1854 г. В 1869 г. Бельтрами и в 1872 г. Липшиц использовали геометрические методы. В 1917 г. Леви-Чивита применил понятие параллелизма к механике. Идея многомерного риманова пространства постепенно все глубже внедрялась в механику. В конце XIX в. Дарбу и Герц рассматривали динамическую систему как точку, движущуюся в n -мерном пространстве. В 1894 г. Пенлеве изучал механические проблемы с помощью многомерных пространств, используя главным образом евклидову метрику. Наконец, тензорные методы в динамике ведут свое начало от работ Риччи и Леви-Чивита 1900 г. Дальнейшее развитие этих идей принадлежит Райту (1908 г.), З. Гораку (1924 г.), Дж. Синджу (1926), Г. Вран-

чану (1926), Схоутену (1929), Вагнеру (1935) и многочисленным другим авторам¹.

Поведение динамической системы оказалось таким, какое естественно приписать точке в n -мерном пространстве. Движение системы представляется тем самым не как движение совокупности так или иначе связанных частиц в трехмерном евклидовом пространстве, а как движение одной-единственной точки n -мерного риманова пространства. Динамическая траектория естественного движения между двумя заданными конфигурациями при заданном значении энергии будет некоторой кривой метрического многообразия, для которого установлено мероопределение вида $ds^2 = \sum a_{nk} dq_n dq_k$.

Таким образом, фундаментальный синтез геометрического и аналитического аспектов, представление движения в n -мерных неевклидовых пространствах, обобщенная концепция корпускулярно-волнового движения являются основными тенденциями развития классической динамики системы XIX в. и начала XX в. Именно это позволило использовать классическую динамику для углубления познания действительных закономерностей материального мира.

¹ Wright J. E., *Invariants of quadratics differential forms*. Cambridge, 1908; Horak Z., *Le principe de la conservation de l'énergie et les équations de la Physique*, Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Charles, Prague, 25, 1924 (по-чешски с французским резюме); Horak Z., *Sur les systèmes non holonomes*. Bull. Internat. Akad. Sci. de Bohême, 29, 1928, стр. 1—18; Synge J. C., *On the geometry of dynamics*. Phil. Trans. Roy. Soc., London, A 226, 1926, стр. 31—106; Vranceanu G., *Sur les espaces non holonomes*. Comptes Rendus, Acad. Sci., Paris, 183 (1926), стр. 852—854; Scouten J. A., *On non holonomic connections*. K. Akad. Wet. te Amsterdam Proceedings, 31, 1928, стр. 291—299; Вагнер В. В., *Геометрия пространства конфигураций твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки*. Ученые записки Саратовского гос. ун-та им. Чернышевского, серия физ.-матем., т. 1, вып. 2, 1938, стр. 34—57; Вагнер В. В., *Геометрическая интерпретация движения неголономных динамических систем*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу при Московском гос. ун-те, вып. V, 1941, стр. 301—327. Вагнер В. В., *Геометрия (n-1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве*, там же; Подробный обзор проблем неголономной геометрии дал М. Вранчану (Vranceanu M., *Les espaces non holonomes et leurs applications mecaniques*, Mémorial des Sciences mathématiques, LXXVI, Paris, 1936, стр. 1—70; к обзору приложена большая библиография. Большой исторический интерес представляет статья Ricci G. et Levi-Civita T., *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann., t. 54, 1900, стр. 125—201.

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ В МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

В основе применения и физического смысла вариационных принципов механики лежат две теоремы: теорема независимости Гильберта (1862—1943) и теорема Нетер (1882—1935).

Первая теорема дает математическое обоснование вариационных принципов, вторая — раскрывает их физический смысл, связывая их с центральной физической проблемой — проблемой инвариантов различных групп преобразований.

Поэтому изложение общих соображений о вариационных принципах мы начинаем с этих двух теорем.

1. Теорема независимости Д. Гильберта

Еще в своем знаменитом, сделанном в 1901 г., докладе «*Mathematische Probleme*»¹ Гильберт развил метод, который приводит к установлению необходимого и достаточного критерия в вариационном исчислении. Из установленной им «теоремы независимости» не только непосредственно следуют хорошо известные критерии экстремума функционала, но также и все существенные положения теории Гамильтона—Якоби.

В работе Гильберта, опубликованной в 1906 году², второй раздел посвящен теореме независимости. Гильберт ставит задачу так: как известно, простейшей проблемой вариационного исчисления является определение функции y переменной x так, чтобы интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(y', y; x) dx, \quad (1)$$

где $y' = \frac{dy}{dx}$, имел минимальное значение по сравнению с теми значениями, которые он принимает, когда вместо $y(x)$ подставляют дру-

¹ Hilbert D., *Gesamm. Abhandl.* т. 3, Berlin, 1935, стр. 290—329.

² Hilbert D., *Zur Variationsrechnung*, *Math. Ann.*, т. 62, 1906, стр. 351—370, см. также *Gesammelte Abhandlungen*, т. 3, стр. 38—57.

гие функции от x с теми же заданными начальными и конечными значениями.

Рассмотрим интеграл

$$I^* = \int_a^b \{F + (y' - p)F_p\} dx,$$

где

$$F = F(p, y; x), \quad F_p = \frac{\partial F(p, y, x)}{\partial p},$$

и поставим вопрос о том, в виде какой функции от x и y надо взять



Д. ГИЛЬБЕРТ (1862—1943)

величину p для того, чтобы интеграл I^* был независим от пути интегрирования в xy -плоскости, т. е. независим от выбора функции y переменной x . Ответ: возьмем однопараметрическое семейство интегральных кривых дифференциального уравнения Эйлера для $F = F(y', y; x)$, и определим в каждой точке x, y значение производной y' , проходящей через эту точку кривой семейства; значение этой производной y' есть тогда функция $p(x, y)$, обладающая указанным свойством.

С математической точки зрения теорема независимости наиболее естественным образом объединяет теорию Гамильтона—Якоби вариационного исчисления и теорию Вейерштрасса, сочетая методы полей экстремалей и трансверсалей E -функции и полевого интеграла Вейерштрасса. Это сразу дает необходимую общность и строгость механике Гамильтона—Якоби, причем глубокая связь вариационных принципов, уравнения Эйлера и уравнения Гамильтона—Якоби с оптико-механической аналогией и синтезом корпускулярного и волнового аспектов движения делается особенно прозрачной. Независимость вариационного интеграла от вида пути дает дополнительные возможности для широкого применения вариационных принципов в физике, где основные процессы и функции состояния не зависят от вида пути, которым физическая система пришла в то или иное состояние.

Исторически необходимо отметить, что рассмотрение Остроградским вариационной проблемы как проблемы интегрируемости вариации интеграла полного дифференциала (см. гл. II, разд. 5), по существу, предвосхищало постановку задачи Гильбертом, так как независимость от вида пути интегрирования автоматически выполняется в концепции Остроградского.

Теорема независимости была открыта еще в 1868 г. Е. Бельтрами (1835—1900) в связи с его работами по геодезическим линиям¹, но осталась незамеченной; она была найдена вновь тридцать лет спустя Д. Гильбертом, который ясно очертил ее основополагающее значение. Возможно, что было бы справедливо называть эту теорему теоремой Бельтрами—Гильберта².

В теории Гильберта рассматривается интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(y', y, x) dx = \text{extrem};$$

так как его значения изменяются с функцией $y = y(x)$, то он сам есть функция от функции.

Между начальной точкой $P(x_0, y_0)$ и конечной $P(x_1, y_1)$ можно однозначно определить экстремали вариационной задачи. Закрепим P_0 ; тогда интеграл I будет функцией конечного положения

¹ Beltrami E., Sulla theoria delle linee geodetiche, Rend. del. R. Istituto lombardo (2) t. 1, 1868, стр. 708; Opere matematiche, t. I, Milano, 1902, стр. 366.

² Приводимое далее доказательство теоремы Гильберта взято из книги Th. Pöschl; Einführung in die analytische Mechanik, 1949. Оно очень близко к доказательству, данному Гильбертом. Заметим, что в этой книге 165 стр. и из них 35 (вся гл. 2) посвящены изложению вариационного исчисления.

Интересные применения теоремы независимости в физике см. Born M., On the quantum theory of the electromagnetic field, Proc. Roy. Soc., т. 143, 1934, стр. 410—437; H. Herzberger, Strahlenoptik, Springer, 1931.

P_1 , причем изменение P_1 изменяет и самую экстремаль. Тогда

$$I(P_0, P) = \int_{P_0}^P F[y'(x, P_0, P), y(x, P_0, P), x] dx. \quad (5)$$

Исследуем F как функцию P при закреплённом P_0 . Гильберт показал, что значения I , как функции P , можно рассматривать как решения дифференциального уравнения первого порядка в частных производных и определить таким образом частные производные

$$I_x = \frac{\partial I}{\partial x}$$

и

$$I_y = \frac{\partial I}{\partial y}.$$

Для вывода этого дифференциального уравнения в частных производных для функции $I(P_0, P)$ Гильберт разработал метод, имеющий значение для всего анализа.

Трудность нахождения $\frac{\partial I}{\partial x}$ и $\frac{\partial I}{\partial y}$ состоит в том, что $I(P_0, P)$, как это видно из выражения (5), зависит не только от конечной точки P , но и от расположения экстремали $y = y(x)$ между P_0 и P . Для того чтобы преодолеть эту трудность, Гильберт преобразует подынтегральное выражение так, чтобы экстремаль $y = y(x)$ имела прежнюю форму и чтобы преобразованное подынтегральное выражение зависело только от начальной P_0 и конечной P точек, и было независимо от выбора функции $y = y(x)$, связывающей P_0 и P . Если для такого преобразованного интеграла будут найдены производные от I_x и I_y , то они будут совпадать также со значениями I_x и I_y первоначальной вариационной проблемы.

Каким образом можно построить интеграл вида

$$\int_{P_0}^P G(y', y, x) dx \quad (6)$$

так, чтобы его значение зависело только от границ, но не зависело от пути, т. е. от выбора функции $y = y(x)$, связывающей точки P_0 и P ? Иными словами: в каком случае любая кривая (конечно, при наличии необходимых свойств дифференцируемости) является экстремалью этой задачи? Это, очевидно, возможно только тогда, когда эйлерово дифференциальное уравнение для поставленной таким образом задачи выполняется для каждого «линейного элемента» (x, y, y') . Эйлерово дифференциальное уравнение для вариационной задачи (6) в общем виде будет:

$$G_{y''} y'' + G_{y'y'} y' + G_{y'x} - G_y = 0. \quad (7)$$

Это уравнение тождественно выполняется, когда первый член и сумма трех следующих исчезают, т. е.

$$\left. \begin{aligned} G_{y'y''} y'' &= 0, \\ G_{y'y'} + G_{y'x} - G_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Первое условие гласит, что G есть линейная функция y' , имеющая вид

$$G(y', y, x) = A(x, y)y' + B(x, y). \quad (9)$$

Второе условие равносильно следующему соотношению для функций A и B :

$$A_x = B_y, \quad (10)$$

т. е. A и B суть частные производные одной и той же функции $\Phi = \Phi(x, y)$:

$$\left. \begin{aligned} A &= \Phi_y, \\ B &= \Phi_x, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

так что

$$G(y', y, x) = \Phi_x + \Phi_y y' = \frac{d\Phi}{dx}, \quad (12)$$

и интеграл

$$\int_{P_0}^P G(y', y, x) dx = \Phi(P) - \Phi(P_0) \quad (13)$$

действительно есть функция только границ и не зависит от пути, которым они связаны.

Возвратимся теперь к первоначальному интегралу I , предполагая, что первое и второе условия остаются действительными. Согласно фундаментальной идее Гильберта это обеспечивается с помощью выражения

$$G(y', y, x) = F(u(x, y), y, x) + \lambda(u(x, y), y, x) [y' - u(x, y)] \quad (14)$$

с тремя первоначально еще неопределенными функциями

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ \lambda &= \lambda(u(x, y), y, x), \\ y &= y(x). \end{aligned}$$

Прежде всего непосредственно можно видеть, что для $u = y'$ функция G переходит в подынтегральное выражение первоначальной вариационной проблемы. Далее, G есть линейная функция y' ; интеграл может, следовательно, коль скоро выполнено условие $A_x = B_y$, стать независимым от пути.

Для определения λ — множителя добавочного условия $u = y'$ — служит эйлерово дифференциальное уравнение вариационной задачи:

$$\int_{P_0}^P G(y', y, x) dx = \text{extremum} . \quad (15)$$

Если для ранее данного значения G получить эйлерово дифференциальное уравнение, то для функции y тогда имеет место :

$$G_{y'} = \lambda, \quad G_y = F_y + F_u u_y - \lambda u_y + (\lambda_y + \lambda_u u_y)(y' - u), \quad (16)$$

где последний член отпадает для вариационной задачи, в которой $u = y'$, и получается

$$\frac{d}{dx} G_{y'} - G_y = \frac{d\lambda}{dx} - F_y - F_u u_y + \lambda u_y . \quad (17)$$

Подобным же образом получаем эйлерово уравнение для функции u :

$$F_u - \lambda = 0$$

и, следовательно,

$$\lambda = F_u . \quad (18)$$

Если ввести производную $\frac{d\lambda}{dx}$, то получим уравнение (17) в форме

$$\lambda_u(u_x + uu_y) + \lambda_y u + \lambda_x - F_y - F_u u_y + \lambda u_y = 0 . \quad (19)$$

Подставим в это уравнение $\lambda = F_u$, тогда оно примет вид

$$(u_x + uu_y) F_{uu} + u F_{uy} + F_{ux} - F_y = 0 . \quad (20)$$

Это уравнение первого порядка для u Гильберт назвал присоединенным (adjungiert) к первоначальной вариационной проблеме.

Преобразованный согласно Гильберту интеграл поэтому будет :

$$\int_{x_0}^{x_1} G(y', u, y, x) dx = \int_{x_0}^{x_1} [F(u, y, x) + F_u(y' - u)] dx . \quad (21)$$

Он не зависит от пути, и поскольку u есть какое-либо решение введенного выше уравнения в частных производных, вариационная задача $\int G dx = \text{extrem}$ должна рассматриваться как эквивалентная исходному уравнению (1).

Выберем теперь какое-либо частное решение $y = y(x)$ для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y' = u(x, y) .$$

Тогда, очевидно,

$$G(y', u, y, x) = F(y', y, x) . \quad (22)$$

Покажем, что y' в этом случае удовлетворяет эйлерову дифференциальному уравнению вариационной задачи :

$$I = \int_{P_0}^P G(y', u, y, x) dx = \int_{P_0}^P F(y', y, x) dx = \text{extrem}.$$

Действительно, из $y' = u(x, y)$ следует

$$y'' = u_x + u_y y' = u_x + u_y u. \quad (23)$$

Если подставим в левую часть уравнения Эйлера для F вместо y' и y'' их значения, то получим непосредственно левую часть уравнения в частных производных (20) для u , и она обратится в нуль, так как мы предположили, что u есть решение этого уравнения. Каждое решение уравнения в частных производных (20) для $u = y'$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера для функций F .

Так же можно показать, что каждая экстремаль исходной вариационной задачи для функции F есть решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$y' = u(x, y), \quad (24)$$

когда скоро $u(x, y)$ есть определенное решение присоединенного уравнения в частных производных (20); вместе с тем было бы показано, что для каждой экстремали, проходящей через P_0 и P , действительно

$$\int_{P_0}^P G(y', u, y, x) dx = \int_{P_0}^P F(y', y, x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Пусть

$$y = y(x, \alpha, \beta)$$

— общий интеграл эйлерова дифференциального уравнения для данной функции F , зависящий от двух параметров α и β . Из этого двухпараметрического семейства выделим однопараметрическое

$$\beta = W(\alpha),$$

где W — произвольная функция и, следовательно,

$$y = y(x, \alpha, W(\alpha)) = g(x, \alpha). \quad (25)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет это семейство, найдется, если продифференцировать по x уравнение (25) и исключить α из обоих уравнений

$$y = g(x, \alpha) \quad \text{и} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = g_x(x, \alpha). \quad (26)$$

В результате получим

$$y' = \varphi(x, y),$$

где φ — произвольная функция от W . Эта область удовлетворяет эйлерову дифференциальному уравнению; тогда в результате дифференцирования по x имеем

$$y'' = \varphi_x + \varphi_y y' \quad (27)$$

и, подставив в эйлерово уравнение, получим

$$(\varphi_x + \varphi \varphi_y) F_{\varphi\varphi} + \varphi F_{\varphi y} + F_{\varphi x} - F_y = 0. \quad (28)$$

Это есть обычное (не дифференциальное) уравнение для x, y .

Это уравнение должно быть тождеством в x, y , что не имело бы места, если бы y не было однозначно (или дискретно-многозначно) определено через x ; но все семейство кривых, как решение, отсюда не получается.

Однако $\varphi(x, y)$ есть интеграл уравнения в частных производных (20), который содержит еще произвольную функцию; $\varphi(x, y)$ есть общий интеграл уравнения в частных производных (20).

Когда множитель вариационной задачи (1) с добавочным условием $y' = p$ определен формулой $\lambda = F_u$, тогда однозначно следует, что подынтегральное выражение (21)

$$[F + F_u(y' - u)] dx = (F - u F_u) dx + F_u dy \quad (29)$$

есть полный дифференциал, и соотношение

$$\frac{\partial(F - u F_u)}{\partial y} = \frac{\partial F_u}{\partial x} \quad (30)$$

тождественно с присоединенным уравнением в частных производных (20).

Выразим полученные результаты в следующих предложениях:

1. Все интегралы $u(x, y)$ присоединенного дифференциального уравнения в частных производных (20) дают с помощью обыкновенного дифференциального уравнения $y' = u(x, y)$ однопараметрическое семейство экстремалей вариационной задачи.

2. Каждое однопараметрическое семейство $y = g(x, \alpha)$ эйлерова уравнения вариационной задачи $I = \text{extremum}$ приводит указанным способом к интегралу присоединенного уравнения в частных производных (20)

$$u(x, y) = \left[\frac{\partial g(x, \alpha)}{\partial x} \right]_{\alpha = \varphi(x, y)}, \quad (31)$$

где $\alpha = \varphi(x, y)$ — решение уравнения $y = g(x, \alpha)$ для α . Уравнение $y' = u(x, y)$ представляет промежуточный интеграл эйлерова уравнения вариационной задачи (1).

3. Общий интеграл уравнения (20) получается из общего интеграла эйлерова уравнения в виде

$$y = y(x, \alpha, \beta), \quad \text{где } \beta = W(\alpha);$$

здесь W — произвольная функция α и находится дифференцированием функции $y = y(x, \alpha, W(\alpha))$ по x и исключением α .

4. Значение интеграла

$$I(x, y) = \int_{P_0}^P F(y', y, x) dx$$

вдоль экстремали, соединяющей P_0 и P , совпадает со значением интеграла

$$\int_{P_0}^P [F(u(x, y), y, x) + F_u \{y' - u(x, y)\}] dx,$$

где $u(x, y)$ есть интеграл уравнения (20), а однопараметрическое семейство кривых, определенное через $y' = u(x, y)$, содержит экстремаль, проходящую через P_0 и P . При этом для $y = y(x)$ может быть использована какая-нибудь кривая, проходящая через P_0 и P , так как последний интеграл не зависит от пути; поэтому

$$I = \Phi(P) - \Phi(P_0).$$

Из этого следует важнейший результат.

5. Когда $u(x, y)$ есть решение уравнения (20), то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &= F(u(x, y), y, x) - u F_u, \\ \frac{\partial I}{\partial y} &= F_u; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

а исключением $u(x, y)$ из этих двух уравнений получается уравнение в частных производных первого порядка для функции $I(x, y)$ вида

$$\Psi(I_x, I_y, x, y) = 0, \quad (33)$$

которое называется уравнением Гамильтона—Якоби.

В это уравнение само I не входит, поэтому I и $I + \text{const}$ являются решением. Как было уже сказано, начальное значение интеграла I выбрано произвольно.

2. Теорема Э. Нетер

Развитие теоретико-групповых представлений в приложении к проблемам геометрии нашло наиболее яркое выражение в знаменитой Эрлангенской программе Ф. Клейна. Основная идея Эрлангенской программы состоит в том, что объектом геометрии является система инвариантов некоторой группы преобразований непрерывного многообразия и что различные системы геометрии отличаются друг от друга постольку, поскольку отличны структуры положенных в их основу групп.

В этой программе, носящей название «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», Ф. Клейн так определяет обобщение геометрии в теоретико-групповом смысле: «Как обобщение геометрии получается, таким образом, следующая многообъемлющая задача.



Ф. КЛЕЙН (1849—1925)

Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразования группы.

Применительно к современной терминологии, которую, впрочем, обыкновенно прилагают только к определенной группе — группе всех линейных преобразований — можно выразиться еще так:

Дано многообразие и в нем группа преобразований. Требуется развить теорию инвариантов этой группы¹.

¹ К л е й н Ф., Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей, ГТТИ, М., 1956, стр. 402.

Заметим, что отсюда следует существование различных геометрий, отличающихся друг от друга характером элементов того или иного многообразия и строением группы, причем существенное значение имеет именно строение группы.

Фундаментальное значение групп преобразований и их инвариантов в вариационном исчислении и физике показала в духе Эрлангенской программы Э. Нетер (1882—1935) в 1918 г.

Эмми Нетер¹ родилась 23 марта 1882 г. в Эрлангене в семье известного математика М. Нетера. Ее математическое дарование развивалось медленно. В 1907 г. она защитила в Эрлангене у Гордана диссертацию в духе гордановской формально-вычислительной теории инвариантов. Впоследствии Нетер часто награждала эту диссертацию пренебрежительными эпитетами «Formelnstrüpp», «Rechnerei».

Как отмечает П. С. Александров, она, хотя и была противницей всякой алгоритмики в математике, но прекрасно ею владела, что доказывается ее классическими работами 1918 г. о дифференциальных инвариантах и инвариантах вариационной проблемы. Уже в этих работах проявилось основное свойство ее математического дарования: умение раскрыть логическую природу проблемы, дав ей наиболее адекватную общую формулировку. Работы по инвариантам написаны ею в Геттингене под сильным влиянием Гильберта. Однако не эти замечательные работы, которые уже сами по себе доставили бы ей славу первоклассного математика, а ее более поздние основные исследования в области общей, абстрактной алгебры сделали ее создательницей нового направления в алгебре, того направления, которое П. С. Александров называет *begriffliche Mathematik*.

На жизненном пути Нетер ярко отразились косность, тупость и убогие предрассудки прусской академической и чиновной бюрократии. Она получила звание приват-доцента в 1919 г. лишь в результате настойчивости Д. Гильберта и Ф. Клейна, которые с огромным трудом преодолели сопротивление университетских кругов, для которых явным препятствием был... пол Э. Нетер.

«Как можно допустить, чтобы женщина сделалась приват-доцентом: ведь, сделавшись им, она может стать профессором и членом Университетского Совета; позволительно ли, чтобы женщина вошла в Сенат?». На это заявление Гильберт в свойственном ему духе заметил: «Господа, ведь Сенат не бани, почему же женщина не может войти туда!» По существу же сопротивление реакционных

¹ При изложении научной биографии Э. Нетер мы следуем прекрасному описанию ее жизни и творчества, данному академиком П. С. Александровым (хорошо ее знавшим) в речи, произнесенной 5. IX. 1935 г. на заседании Московского математического общества, посвященном памяти Э. Нетер. Речь эта опубликована в Успехах матем. наук, вып. 2, ОНТИ, М.—Л., 1936, стр. 255—265. Некрологи, посвященные Э. Нетер: Weyl H., Scripta mathematica, т. 3, вып. 3, 1935; van der Verden, Mathematische Annalen, т. 111, 1935, стр. 469.

академических кругов было вызвано всем известными левыми убеждениями Нетер и ее национальностью.

С большим трудом она получила приват-доцентуру, а затем и сверхштатную профессиру; благодаря усилиям Куранта она получила небольшой гонорар от Министерства просвещения за порученные ей курсы. В этом положении, не имея даже гарантированного оклада, она и дожила до изгнания из Германии.



ЭММИ НЕТЕР (1882—1935)

Вот что пишет Г. Вейль в некрологе, посвященном Э. Нетер: «Когда я получил кафедру в Германии в 1930 г. (кафедру Гильберта в Геттингенском университете, так как Гильберт достиг предельного возраста; эта кафедра считалась первой математической кафедрой в Германии и была связана с повышенным окладом. — Л. П.), я делал серьезные попытки добиться от Министерства улучшения условий для нее. Мне было стыдно занимать привилегированное перед нею положение, в то время как я понимал, что она как математик выше меня во многих отношениях. Я не достиг успеха... Традиции, предрассудки, внешние соображения перевесили ее научные заслуги и научное величие, которое в это время уже не отрицалось никем. В мои геттингенские годы (1930—1933 г.; в 1933 г. Г. Вейль эмигрировал. — Л. П.) она являлась там вне всякого сомнения сильнейшим центром математической активности...»

«Именно она научила нас мыслить в простых и общих алгебраических понятиях — гомоморфное отображение, группа или кольца с операторами, идеал, — а не в сложных алгебраических выкладках, и поэтому открыла путь к нахождению алгебраических закономерностей»,... пишет об Э. Нетер академик П. С. Александров. «Такие теоремы как теорема о гомоморфизмах и изоморфизмах, такие понятия как обрыв возрастающих или убывающих цепей подгрупп или идеалов, или в особенности как понятие группы с операторами были впервые сформулированы ею и вошли в качестве могущественного оружия в ежедневную практику целого ряда областей математики, вовсе не связанных по своему предмету с работами самой Э. Нетер»¹. П. С. Александров отмечает влияние Э. Нетер на его собственные работы, работы Понтрягина, Колмогорова, ван-дер-Вардена, Хопфа, Хассе, Вейля, Куроша и др.

Для Э. Нетер математика была всегда познанием мира, а не игрой символов, в основе всего ее математического творчества лежало глубокое чувство реальности.

Нетер была тесно связана с Советской Россией, с Москвой. Эта связь началась с 1923 г., когда П. С. Александров и П. С. Урысон приехали в Геттинген и попали в математический кружок, возглавлявшийся ею. Она не скрывала своих симпатий к нашей стране, к ее социальному и государственному строю, хотя это в академических кругах Западной Европы считалось тогда возмутительным и неприличным. Она была, например, буквально изгнана из одного из пансионов, где жила и столовалась, по требованию студентов-корпорантов, не желавших жить под одной крышей с «марксистски настроенной еврейкой». В Советском Союзе «...она видела начало новой эры в истории человечества и твердую опору всего прогрессивного, чем жила и живет человеческая мысль»².

Зиму 1928—1929 г. Нетер провела в Москве: она читала курс абстрактной алгебры в МГУ и вела семинар по алгебраической геометрии в Коммунистической Академии.

Э. Нетер дождалась признания своих идей. В 1932 г. на Международном Математическом Конгрессе в Цюрихе она была увенчана лаврами самого блестящего успеха.

В 1933 г. с приходом фашизма Э. Нетер была изгнана из стен университета и эмигрировала из Германии. Не имея никаких средств, лишенная даже того скромного заработка, который она имела в Геттингене, она приняла приглашение в женский университет в американском городке Брин Мор, где и прожила последние полтора года своей жизни. Умерла Э. Нетер 14 апреля 1935 г.

Этот крайне скупой очерк научной жизни Э. Нетер позволено закончить удивительно прочувствованными словами

¹ Успехи матем. наук, вып. 2, ОНТИ, М.—Л., 1936, стр. 257.

² Там же, стр. 262.

П. С. Александрова : «В лице Э. Нетер ушло в могилу одно из обаятельнейших человеческих существ, с которыми мне когда-либо приходилось встречаться. Ее необыкновенная душевная доброта, чуждая всякой рисовки и неискренности ; ее жизнерадостность и простота ; ее способность не замечать того, что в жизни несущественно — создавали вокруг нее атмосферу теплоты, спокойствия и легкой радости... Она имела свои мнения и умела их отстаивать с большой силой и настойчивостью... Трогательна была ее любовь к своим ученикам,... заменявшим отсутствовавшую у нее семью... Большое чувство юмора... Тщеславие и погоня за внешним успехом были ей чужды...

Такова была Э. Нетер, величайшая среди женщин математиков, большой ученый, удивительный учитель, незабываемый человек... Она любила людей, науку, жизнь со всей теплотой, со всею радостью, со всей бескорыстностью и со всей нежностью, на которую способна глубоко чувствующая — и притом женская — душа¹.

Впервые термин «инвариант» был введен Сильвестром в 1851 г. в статье, озаглавленной «On the general theory of associated algebraical forms»². Идеи этой статьи он развил далее в 1852 г. в статье «On the principles of the calculus of forms»³, в которой впервые появились термины «коградиентный» и «контраградиентный». Таким образом, понятие инварианта, как и многие другие, возникло в математике задолго до того, как получило название в теоретической физике.

В работе 1918 г. «Invariante Variationsproblem»⁴ Э. Нетер рассмотрела проблему инвариантов вариационных задач, основываясь на объединении методов вариационного исчисления с методами теории групп Ли⁵. В этой работе дается общий алгоритм, позволяющий найти полную систему инвариантов любой физической теории, формулируемой в терминах лагранжева или гамильтонова формализма. Этот алгоритм основан на связи инвариантов группы Ли с постоянными интегрирования уравнений Гамильтона или Лагранжа. Хотя алгоритм Нетер применим только к непрерывным преобразованиям, что ограничивает его применимость ко многим задачам, тем не менее он является одним из наиболее общих и плодотворных алгоритмов современной теоретической физики. Очень красивый и наглядный вывод теоремы Нетер дан в книге Н. Н. Боголюбова и

¹ Успехи матем. наук, вып. 2, ОНТИ, М. — Л., 1936, стр. 264—265.

² Sylvester, Cambridge and Dublin Math. Journal, т. IV, 1857 ; см. также Collected Works of Sylvester, т. 1, Cambridge, 1901.

³ Sylvester, Cambridge and Dublin Math. Journal, т. VII, 1852, а также Collected Works, т. 1.

⁴ Noether E., Nachr. v. d. Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, math.-phys. Kl., 1918, вып. 2, стр. 235—258 ; «Сборник», стр. 611—630 ; применение теоремы Нетер в классической электродинамике см. Bessel-Hagen, Math. Ann., т. 84, 1921, стр. 258.

⁵ О группах Ли см. гл. II.

Д. В. Ширкова¹. Значение теоремы Нетер в настоящее время особенно велико в задачах, связанных с построением теории квантованных полей.

В своей работе Э. Нетер следующим образом формулирует две теоремы, которые составляют содержание ее исследования :

«I. Если интеграл I инвариантен по отношению к некоторой группе G_ρ , то ρ линейно независимых комбинаций лагранжевых выражений обращаются в дивергенции ; обратно, из последнего условия вытекает инвариантность I по отношению к некоторой группе G_ρ . Теорема сохраняет справедливость и в предельном случае бесконечно большого числа параметров.

II. Если интеграл I инвариантен по отношению к группе $G_{\sigma\rho}$, в которой встречаются произвольные функции до σ -й производной, то имеют место ρ тождественных соотношений между лагранжевыми выражениями и их производными до σ -го порядка ; здесь также возможно обращение»².

Формулировке этих теорем предшествуют некоторые определения, которые мы здесь кратко приведем :

1. Все функции в анализе Нетер предполагаются аналитическими или, по крайней мере, непрерывными и конечными, а часто и непрерывно дифференцируемыми и однозначными в рассматриваемой области.

2. Группа преобразований определяется обычным образом (см. гл. II, разд. 6); вводится понятие о конечной непрерывной группе и бесконечной непрерывной группе.

3. Некоторая функция называется инвариантом группы, если существует соотношение

$$P\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = P\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \dots\right),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — независимые переменные, $u_1(x), \dots, u_\mu(x)$ — их функции, $y_1, \dots, y_n$ и $v_1(y), \dots, v_\mu(y)$ — независимые переменные и их функции, полученные в результате того, что x и u были подвергнуты преобразованиям некоторой группы.

В частности, инвариантом группы является интеграл

$$I = \int \dots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right) dx = \int \dots \int f\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial x}, \dots\right) dy,$$

где интегрирование распространяется на любую действительную область x и соответствующую область y .

4. Первая вариация δI некоторого (не обязательно инвариантного) интеграла I после преобразования и при $\delta u = 0$ на границах

¹ Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, М., 1957, стр. 20—23.

² Noether E., Nachr. v. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, 1918, стр. 236.

области интегрирования имеет вид

$$\delta I = \int \dots \int \delta f dx = \int \dots \int \left\{ \sum \psi_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) \delta u_i \right\} dx,$$

где ψ_i — левые части уравнений Эйлера для соответствующей вариационной задачи.

5. Интегральному соотношению $\delta I = 0$ соответствует равенство

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f + \operatorname{div} A,$$

где A линейная функция от δu и их производных.

В многомерном случае из теоремы I получаются уравнения дивергенции, которые теперь часто определяют как «теоремы сохранения»¹.

В статье «Über Erhaltungssätze der Elektrodynamik»² Бессель-Хаген приводит две теоремы Нетер в общем виде, ссылаясь на ее устное сообщение. Пусть интеграл

$$I_x = \int \dots \int f \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots \right) dx \quad (34)$$

распространен на произвольную вещественную область переменных $x_1, \dots, x_n$. Аргументы $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$ представляют сокращенную запись μ действительных функций $x_1, \dots, x_n$ и их частных производных; dx — сокращенная запись $dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

С помощью однозначного и однозначно обратимого преобразования переменных

$$\left. \begin{aligned} y_i &= A_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) & (i=1, 2, \dots, n) \\ v_q(y) &= B_q \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) & (q=1, 2, \dots, \mu) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

и его обобщения на преобразование производных $\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \dots$ выражение (34) перейдет в выражение

$$I_y = \int \dots \int f \left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \dots \right) dy, \quad (36)$$

где интеграл распространен на y -область, соответствующую x -области выражения (34).

Если функция $\bar{f}$ тождественна с функцией f , то интеграл I есть инвариант по отношению к преобразованию (35).

¹ Noether E., Nachr. v. d. K. Gesellsch..., стр. 237. Проблема инвариантов групп преобразования подробно рассмотрена с различных точек зрения Ф. Клейном. См., например, Klein F., Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert, т. 2, Springer, Berlin, 1927.

² Bessel-Hagen E., Math. Ann., т. 84, 1921, стр. 258.

Рассмотрим непрерывную группу преобразований (35). Положим, что параметры $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$, введенные для конечной группы R_r , в случае бесконечной группы R_∞ выбраны нами так, что тождественное преобразование соответствует значению $\varepsilon = 0$. Тогда формулы преобразования (35) примут вид

$$\left. \begin{aligned} y_i &= x_i + \Delta x_i + \dots & (i = 1, 2, \dots, n), \\ v_\rho(y) &= u_\rho + \Delta u_\rho + \dots & (\rho = 1, 2, \dots, \mu). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Предположим, что Δx_i , Δu_ρ линейны относительно ε , и оборвем выражение в правой части (37) на этих линейных членах, тогда полученное таким образом преобразование называется согласно Ли бесконечно малым.

Инвариантность интеграла I относительно бесконечно малого преобразования означает соответственно, что функция $\bar{f}$ отличается от f на член, в который ε входит в виде выражения по крайней мере второго порядка.

Назовем, как обычно, дивергенцией выражение

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n},$$

где A_i есть функции $x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$

Назовем теперь интеграл I инвариантным по отношению к бесконечно малому преобразованию (до дивергенции), если

$$\bar{f} = f + \operatorname{div} C + \text{высшие члены}, \quad (38)$$

где величина C линейна относительно ε . Это выражение включает в себе и тот случай, когда C тождественно равна нулю. В этом и состоит обобщение теоремы по сравнению с первоначальной формулировкой, данной Нетер в 1918 г.

Теперь можно выразить теорему Нетер так: если интеграл I инвариантен по отношению к бесконечно малому преобразованию конечной группы R_r (до дивергенции), то получается точно r линейно-независимых связей (соотношений) лагранжевых выражений и дивергенций.

Возьмем

$$\delta u_i = v_i(x) - u_i(x) = \Delta u_i - \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j \quad (39)$$

и определим $A_1, A_2, \dots, A_n$ тождеством

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f + \operatorname{div} A,$$

где ψ_i имеют прежние значения; далее, определим $B_1, B_2, \dots, B_n$

уравнениями $B_i = C_i + A_i - f \Delta x_i$, тогда δu_i и B разлагаются по ε так:

$$\delta u_i = \varepsilon_i \delta^{(1)} u_i + \dots + \varepsilon_e \delta^{(e)} u_i, \quad B_i = \varepsilon_i B_i^{(1)} + \dots + \varepsilon_e B_i^{(e)},$$

и искомые соотношения дивергенции будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sum \psi_i \delta^{(1)} u_i &= \operatorname{div} B^{(1)}, \\ \dots\dots\dots \\ \sum \psi_i \delta^{(e)} u_i &= \operatorname{div} B^{(e)}. \end{aligned}$$

Заметим, что выражение для B_i в случае, когда f зависит только от первых производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, будет:

$$B_i = C_i - \sum_k \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} + \sum_\lambda \Delta x_\lambda \left(\sum_k \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_k}{\partial x_i}} \frac{\partial u_k}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda i} f \right),$$

где

$$\delta_{\lambda i} = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \neq i, \\ 1, & \text{если } \lambda = i. \end{cases}$$

Второй закон Нетер имеет место в случае бесконечной непрерывной группы $R_{\infty e}$ и гласит: инвариантность (до дивергенции) интеграла I относительно бесконечно малого преобразования группы $R_{\infty e}$ дает как следствие e линейно-независимых зависимостей между ψ_i и ее полными производными по x и, обратно, существование e таких линейно-независимых зависимостей заключает в себе инвариантность интеграла I (до дивергенции) относительно бесконечно малого преобразования с e произвольными функциями.

Для того чтобы установить эти зависимости, напомним уравнение (39) в развернутой форме:

$$\delta u_i = \sum_{\lambda=1}^e \left\{ a_i^{(\lambda)}(x, u, \dots) p^{(\lambda)}(x) + b_i^{(\lambda)}(x, u, \dots) \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x} + \dots + c_i^{(\lambda)}(x, u, \dots) \frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma} \right\}, \quad (39a)$$

тогда искомые зависимости запишутся просто:

$$\sum_i \left\{ (a_i^{(\lambda)} \psi_i) - \frac{\partial}{\partial x} (b_i^{(\lambda)} \psi_i) + \dots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} (c_i^{(\lambda)} \psi_i) \right\} = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, e),$$

где $p^{(1)}(x)$, $p^{(2)}(x)$, ..., $p^{(e)}(x)$ — произвольные функции.

Дадим еще одну формулировку теоремы Нетер.

Пусть дан интеграл

$$I = \int \dots \int L \left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx^2}, \dots \right) dx,$$

распространенный на область $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Если этот интеграл инвариантен по отношению к бесконечно малому преобразованию определенной конечной группы, которая содержит q параметров (G_q), то будут иметь место q соотношений вида

$$\operatorname{div} A^{(q)} = T^{(q)}. \quad (40)$$

Бесконечно малое преобразование имеет форму

$$\begin{aligned} y_i &= x_i + \Delta x_i, \\ v_\mu(y) &= u_\mu + \Delta u_\mu, \end{aligned}$$

где Δx_i , Δu_μ зависят линейно от параметров преобразования $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q$ данной группы G_q или они зависят линейно от произвольных функций $p_1(x), p_2(x), \dots, p_q(x)$ и их производных для случая инвариантности по отношению к бесконечной группе G_∞ . Обозначим выражение Лагранжа через

$$\psi_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} - \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_k}},$$

Уравнение (40) можно записать так:

$$\operatorname{div} A(q) = \sum \psi_i \delta(q) u_i, \quad (40a)$$

где

$$\delta u_i = v_i(x) - u_i(x) = \Delta u_i - \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} \Delta x_\lambda.$$

В том случае, когда L зависит только от первых производных u по x , A_ν принимает вид

$$\begin{aligned} A_\nu &= - \sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}} \Delta u_\mu + \sum_\lambda x_\lambda \left(\sum_\mu \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}} \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\lambda} - \delta_{\lambda\nu} L \right), \\ \delta_{\lambda\nu} &= \begin{cases} 0 & \text{если } \lambda \neq \nu, \\ 1 & \text{если } \lambda = \nu. \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

Легко подобрать вид лагранжевой функции, которая при использовании вариационного принципа приводит к уравнениям Дирака. К исследованию этого уравнения и следствий, вытекающих из него, М. Марков¹ применил в 1936 г. теорему Нетер.

Требования инвариантности прежде всего выражают основные свойства пространства и времени, хотя они отнюдь не ограничиваются лишь этими последними свойствами.

¹ Markow M., Zur Dirac'schen Theorie des Elektrons., Physik, Zeitschr. d. Sovietunion, т. 10, № 6, 1936, стр. 773—808.

Преобразования, которые оставляют уравнения полей и частиц инвариантными в пространстве-времени таковы:

1) перенос начала координат, выражающий однородность пространства-времени;

2) трехмерные пространственные вращения, выражающие изотропность трехмерного пространства;

3) специальный принцип относительности, выражающий свойства четырехмерного пространства-времени, заключающий инвариантность уравнений относительно четырехмерных вращений, содержащих как обычные вращения, так и преобразования Лоренца в собственном смысле слова;

4) зеркальные отражения (инверсии)¹ и обращение времени;

5) произвольные точечные преобразования к любой криволинейной системе координат — общий принцип относительности, — выражающие отсутствие в природе каких-либо избранных систем.

Как мы видели, теорема Э. Нетер гласит, что всякому непрерывному преобразованию координат, обращающему в нуль вариацию действия, при котором задан также закон преобразования функций поля, соответствует определенный инвариант, т. е. сохраняющаяся комбинация функций поля и их производных. Таким образом, согласно этому — одному из самых широких обобщений современной физики — каждому свойству пространства и времени, выражающемуся в ковариантности уравнений относительно определенной группы преобразований, соответствует особый закон сохранения. Ковариантности уравнений поля или, что то же самое, инвариантности лагранжевой функции относительно смещений начала отсчета в пространстве (однородности пространства) соответствует закон сохранения количества движения. Инвариантности лагранжевой функции относительно смещений начала отсчета времени (однородности времени) соответствует закон сохранения энергии. Инвариантности относительно пространственных поворотов (изотропности пространства) соответствует закон сохранения момента количества движения. Инвариантность относительно преобразований Лоренца, т. е. вращений в плоскостях (x, t) (y, t) (z, t) , приводит к обобщенному

¹ Преобразование инверсии, заключающееся в одновременном изменении знака всех координат, по отношению к которому инвариантна функция Гамильтона замкнутой системы, в классической механике не приводит к каким-либо законам сохранения. Иное положение в квантовой механике.

Пусть I оператор инверсии, действие которого на функцию состоит в изменении знаков всех координат. Инвариантность гамильтоновой функции по отношению к инверсии означает

$$HI - IH = 0.$$

Собственные значения оператора инверсии будут ± 1 . Это равенство выражает тогда закон сохранения четности: если состояние замкнутой системы обладает определенной четностью, то эта четность сохраняется со временем (см. Ландау Л. и Лифшица Е., Квантовая механика, ч. I. Нерелятивистская теория, ГТТИ, М.—Л., 1948, стр. 117). О несохранении четности см. гл. VIII.

закону сохранения движения центра тяжести. Таким образом, в четырехмерном пространстве-времени имеем всего десять фундаментальных законов сохранения.

Преобразования Лоренца, преобразования общей теории относительности, преобразования переноса и трехмерных вращений, калибровочные преобразования образуют группы непрерывных преобразований. Преобразования же инверсии группы не образуют, но вместе с ортогональными преобразованиями вращений или Лоренца образуют более общую группу вещественных ортогональных преобразований. В этой связи Нетер отмечает справедливость замечания Ф. Клейна о том, что употребляемый в физике термин «относительность» следует заменить термином «инвариантность по отношению к некоторой группе»¹.

Отметим, что для случая обычной механической системы материальных точек доказательство теоремы Нетер существенно упрощается. Приводим доказательство теоремы Нетер для этого случая, предложенное Г. А. Соколиком.

Рассмотрим лагранжиан $L = L(x_i, \dot{x}_i, t)$, причем координаты x_i ($i = 1, 2, 3$) преобразуются согласно некоторой группе Ли. Инфинитезимальные операторы, задающие эту группу, определены пфаффовыми формами $x_i = \xi_a^i \frac{\partial}{\partial x_a}$, где ξ_a^i — некоторая функция обобщенных координат, удовлетворяющая дифференциальным уравнениям Маурера, вытекающим из коммутационных соотношений

$$x_i x_k - x_k x_i = [x_i x_k] = C_{ik}^a x_a.$$

Тогда из условия $\delta S = \text{const}$, эквивалентного принципу Гамильтона, вследствие того, что S определяется с точностью до постоянной, следует $\delta S = \alpha_i \xi_a^i \frac{\partial S}{\partial x_a} = \alpha_i C_i$, а так как $\frac{\partial S}{\partial x_a} = p_a$ — обобщенный импульс, то

$$\xi_a^i p_a = \text{const}.$$

Частными случаями этого общего закона сохранения будут уравнения: $E = \text{const}$, $p_a = \text{const}$, $x_i p_j - x_j p_i = \text{const}$, соответствующие условиям инвариантности относительно групп сдвига по времени, сдвигов по пространственным координатам и, наконец, группы трехмерных вращений. Для случая неоднородной группы Лоренца имеем:

$$x_i \frac{\partial S}{\partial x_i} - x_4 \frac{\partial S}{\partial x_4} = \text{const}; \quad x_i E + c^2 p_i = \text{const}, \quad x_i p_j - x_j p_i = \text{const}. \quad (42)$$

$$E = \text{const}, \quad p_i = \text{const}.$$

¹ Klein F., Über die Geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe, Jahrb. d. Deutsch. Math. Vereinig., т. 19, 1910, стр. 287; Сб. Новые идеи в математике, № 5. Принцип относительности в математике, СПб., 1914, стр. 144—174.

Аналогичные результаты можно получить из условия инвариантности самого лагранжиана относительно группы Ли. Пусть $\delta S = 0$. Тогда $\xi_a^i \frac{\partial S}{\partial x_a} = 0$. Отсюда после простых преобразований получим

$$\frac{d}{dt}(\xi_a^i p_a) = \frac{\partial \xi_a^i}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta p_a \quad \text{или} \quad m \frac{d}{dt}(\xi_a^i p_a) = \varepsilon_{a\beta}^i p_a p_\beta, \quad (43)$$

где

$$\varepsilon_{a\beta}^i = \frac{\partial \xi_a^i}{\partial x_\beta}.$$

В случае $\varepsilon_{a\beta}^i = -\varepsilon_{\beta a}^i$ уравнение (43) переходит в закон сохранения углового момента, полученный выше¹.

В этом последнем случае правую часть уравнения (43) можно записать, используя уравнения Гамильтона, так:

$$\frac{d}{dt}(\xi_a^i p_a) = \varepsilon_{a\beta}^i \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial S}{\partial x_a} = \{H, S\}, \quad (44)$$

где фигурными скобками обозначены скобки Пуассона.

Заметим, что соотношение (43) получается также из условия инвариантности гамильтониана относительно группы Ли:

$$\delta H = 0 \quad \text{или} \quad \xi_a^i \frac{\partial H}{\partial x_a} = 0.$$

Итак, уравнения классической механики инвариантны относительно параллельного переноса начала координат (x, y, z) системы

$$x'_i = x_i + \xi_1, \quad y'_i = y_i + \xi_2, \quad z'_i = z_i + \xi_3; \quad (45)$$

относительно вращения вокруг начала координат, т. е. при ортогональных преобразованиях

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= \alpha_1 x_i + \beta_1 y_i + \gamma_1 z_i, \\ y'_i &= \alpha_2 x_i + \beta_2 y_i + \gamma_2 z_i, \\ z'_i &= \alpha_3 x_i + \beta_3 y_i + \gamma_3 z_i, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

с детерминантом $+1$ или -1 ; относительно преобразования

$$t' = \pm t + \xi_4 \quad (47)$$

и при преобразовании

$$x'_i = x_i + \varepsilon_1 t, \quad y'_i = y_i + \varepsilon_2 t, \quad z'_i = z_i + \varepsilon_3 t, \quad (48)$$

¹ См. Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Введение в теорию квантовых полей, ГТТИ, М., 1958.

Законы сохранения для механических систем можно получить также, считая S гипергеометрической функцией, порождаемой представлением некоторой группы Ли, и приравнявая затем S постоянной (см. Cartan E., Rend. circ. matem. Palermo) 54 (1929), стр. 217.

т. е. по отношению к равномерному во времени переносу координатной системы x, y, z (в преобразованиях (45), (46) время не участвует).

Преобразования (45) и (46), каждое из которых содержит три независимых параметра, образуют группу G , называемую евклидовой; добавление преобразований (47) и (48) расширяет эту группу до G_{10} , называемую галилей-ньютоновой группой.

Только те свойства классических систем имеют физический смысл, которые инвариантны по отношению к этой группе G_{10} . В отличие от теории относительности время здесь отделено от пространства.

Кроме рассмотренных условий инвариантности, существуют еще требования, налагаемые на величины, используемые нами при описании физических явлений. Это так называемая инвариантность относительно калибровочных преобразований потенциалов, выражающая возможность произвольно выбрать начало отсчета потенциалов.

В силу требования калибровочной инвариантности (преобразования калибровки второго рода, согласно Паули) потенциалов имеем

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \quad \text{т. е.} \quad A' = A + \text{grad } f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t},$$

где f — скалярная функция четырех координат. Поэтому сами электромагнитные потенциалы не могут явно входить в уравнения Максвелла, и последние содержат лишь производные потенциалов. Напротив, в квантовые уравнения полей и частиц, например, в уравнения Шредингера, Дирака и др., электромагнитные потенциалы входят в явном виде. Это оказывается возможным потому, что изменение калибровки этих потенциалов компенсируется изменением фазы волновых функций. Квантовые (волновые) уравнения являются инвариантными относительно калибровочного преобразования волновых функций (калибровочные преобразования первого рода по терминологии Паули)

$$\psi' = \psi e^{\frac{2\pi i e}{\hbar c} f}.$$

Это условие выполняется потому, что наблюдаемыми величинами являются билинейные комбинации (вообще говоря, комплексных) волновых функций, которые не изменяются при таком преобразовании (хорошим примером является плотность вероятности $\psi^*\psi$).

Рассмотренными требованиями инвариантности, конечно, не исчерпываются все возможные условия инвариантности, которые вытекают из познания нами структурных свойств пространства-времени и общих методологических критериев.

Кроме того, нужно отметить, что, как показало новейшее развитие физики, нельзя придавать этим требованиям инвариантности абсолютный и универсальный характер (гл. VIII)

3. Сравнительная характеристика принципа Гамильтона—Остроградского и принципа наименьшего действия

Вопрос об определении места вариационных принципов механики в системе физического знания в первую очередь связывается обычно с формой выражения этих принципов. Однако этот вопрос не исчерпывается только формой выражения. Обычное толкование вариационных принципов состоит в том, что их широкое применение в физике основано на удобной форме. Ряд авторов стоит на той точке зрения, что содержание принципа стационарного действия тождественно с содержанием основных уравнений динамики. Так, например, Кирхгоф говорит: «Принцип Гамильтона, д'Аламберовы и лагранжевы дифференциальные уравнения поэтому совершенно равнозначны»¹. Такая точка зрения господствует в научной литературе XIX века.

Возможность вывода принципа Гамильтона из принципа Д'Аламбера и обратно позволяет говорить об их математической эквивалентности в тех пределах, в которых силы, действующие на систему, являются производными некоторой скалярной функции. Для сил, которые не являются такими производными, преобразование принципа Д'Аламбера в интеграл, имеющий стационарное значение, неосуществимо. Так как голономные кинематические условия представляют собой механический эквивалент сил первого, а неголономные — второго типа, то принцип Гамильтона имеет место для любой механической системы, которая голономна (или, что то же самое, силы которой могут быть представлены как производные некоторой скалярной функции). Эти силы могут не быть консервативными и могут так же, как и наложенные на систему связи, зависеть от времени.

В свете этих соображений необходимо уточнить соотношение принципа Гамильтона и уравнений динамики Ньютона. Мы показали выше математическую эквивалентность принципа наименьшего действия и уравнений динамики. Какие же выводы можно сделать на основе этого факта? Прежде всего можно утверждать, что если некоторая совокупность явлений может быть описана при помощи уравнений динамики, то к ней может быть применен и вариационный принцип наименьшего действия или принцип Гамильтона.

Широко распространенное в литературе выражение «доказательство принципа (начала)» является, вообще говоря, неправильным. Принципы не доказываются, они вводятся и формулируются как обобщение широкого класса опытных данных. То, что называется доказательством вариационных принципов, есть вывод их из уравнений движения. Такой вывод показывает лишь, что для круга опытных

¹ Kirchhoff G., Vorlesungen über mathematische Physik, т. 2, 1876, Leipzig, стр. 23.

фактов, выражаемых уравнениями движения, тот или иной принцип не приводит к абсурдным результатам, а действительно выражает данную совокупность экспериментальных данных. Будет ли этот принцип охватывать и другие явления, не описываемые уравнениями движения, или даже те же явления, но осложненные наложенными дополнительно условиями, сказать на основании такого «доказательства» нельзя. Оно устанавливает лишь, что в данной области принцип и уравнения движения эквивалентны, т. е. выражают одни и те же наблюдаемые явления, хотя и в различной математической форме.

В классической механике вариационные задачи рассматриваются двумя различными методами.

В одном из них функция действия S задается на всем интервале времени движения и при $t=t_1$ и $t=t_2$ вариации координат должны обращаться в нуль. Это эквивалентно заданию начальных и конечных условий. В другом методе, связанном с теорией Гамильтона—Якоби, функция действия S выражается неопределенным интегралом, т. е. как бы обрывается на некотором моменте времени; в этом случае задаются только начальные условия, как бы фиксирующие нижний предел интеграла действия. В классической механике исследуются такие задачи, в которых оба метода эквивалентны.

Особенно большое значение принципа Гамильтона состоит в том, что движение различных физических систем может быть описано с помощью одного и того же лагранжиана. Таким способом было, например, установлено много так называемых электромеханических аналогий для самых общих электромеханических систем¹.

Заметим, что близость принципа Гамильтона и принципа наименьшего действия не исключает различия между ними.

Поясним на очень простом примере различие между принципом Гамильтона и принципом наименьшего действия.

Применим последний к системе материальных точек, которая свободно или по принуждению движется по какой-либо неизменной поверхности и на которую явно не действуют никакие силы. Тогда потенциальная функция U постоянна и для варьированного движения имеет тоже постоянное значение. Так как $T + U$ должно быть постоянно и неизменно для варьированного и неварьированного движения, то T , а также и v , должно для обоих движений быть одинаковым и постоянным. Следовательно,

$$\int_{t_1}^{t_2} mv^2 dt = mv \int_{t_1}^{t_2} ds$$

должен иметь экстремум. Так как m и v постоянные, то должно быть

$$\delta \int ds = 0,$$

¹ См., например, Cherry E. C., Duality, partial duality and contact-transformations, Proc. of the Sympos. on Modern network synthesis, 1955, стр. 323—347.

так что длина $\int ds$ пути от неизменного начального положения к неизменному конечному положению должна быть для действительного движения экстремальной без того, чтобы время, требуемое для варьированного и неварьированного движения, было бы одним и тем же.

Если же применить к этой задаче принцип Гамильтона, то окажется, что для варьированного движения скорость от точки к точке несколько различна, однако изменяется так, что полное время перехода от фиксированного начального положения к фиксированному конечному положению не изменяется (т. е. не варьируется). Следовательно, в этом случае должно быть согласно принципу Гамильтона (так как v , $t_1 - t_0$ и m постоянные)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} v^2 dt = 0.$$

Этот пример ясно показывает, в чем именно состоит различие между принципами Гамильтона и наименьшего действия.

В задачах механики число степеней свободы, вообще говоря, обычно невелико, в то время как число точек системы очень велико. Как в случае системы твердых тел, так и в особенности в случае непрерывной среды применение обобщенных координат позволяет свести задачу к конечному числу уравнений, каково бы ни было число точек.

Использование обобщенных координат¹ — одно из преимуществ формализма Гамильтона—Якоби и Лагранжа. Что же касается уравнений Лагранжа, то их особенное преимущество состоит в том, что все вычисления сводятся к составлению выражения для кинетической энергии как функции t , q , $\dot{q}$ и к простым дифференцированиям.

Для того, чтобы получить уравнения движения в форме Ньютона, надо иметь дело с многочисленными векторами сил и ускорений. При использовании же уравнений Лагранжа употребляются лишь две скалярные функции, которые надо только написать в обобщенных координатах и, образовав из них лагранжиан, подставить его в эти уравнения и получить уравнения движения. При рассмотрении принципа Гамильтона надо допустить, что систему можно заставить перейти от того же начального к тому же конечному положению, что и в действительном движении, с помощью некоторого фиктивного движения (бесконечно мало отличающегося от действительного), не заботясь о том, чтобы удовлетворялись уравнения динамики, но сохраняя связи. Интеграл Гамильтона может обратиться в нуль для всех вариаций, совместимых со связями,

¹ Заметим, впрочем, что в отличие от декартовых координат обобщенные координаты не разделяются на три группы, позволяющие образовывать соответствующие векторы.

лишь в том случае, если сумма под знаком интеграла постоянно равна нулю. В противном случае, изменяя знаки всех δ одновременно, можно выбрать их так, чтобы сумма под знаком интеграла была все время положительна, а следовательно, интеграл не был бы равен нулю. При $U=0$ из принципа Гамильтона получим

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0,$$

а так как T существенно положительно, то естественно считать это выражение условием минимума.

Эта теорема аналогична принципу наименьшего действия, но отличается от него тем, что последний не зависит от времени.

В классической механике принцип Гамильтона выражает свойство движения, зависящее от времени, а принцип наименьшего действия (особенно отчетливо это видно в форме, приданной ему Якоби) — свойство, не зависящее от времени. В случае, когда $U = 0$, $T = h$, из принципа наименьшего действия получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} h dt = h(t_1 - t_0).$$

Условие того, что этот интеграл есть минимум, заключается в данном случае в том, что соответствующее значение $(t_1 - t_0)$ должно быть наименьшим. Таким образом, в отсутствие движущих сил среди всех движений, при которых T сохраняет одно и то же данное значение, действительным движением будет то, которое переводит систему из ее начального положения в конечное в кратчайшее время.

Определение траектории с помощью принципа наименьшего действия в форме Якоби сводится к чисто геометрической задаче нахождения экстремума интеграла

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{V(T)(U + h)} d\lambda^2,$$

т. е. к определению геодезической линии. Время при этом исключается из рассмотрения. Этот интеграл представляет собой действие в смысле механики лишь при дополнительной гипотезе, что энергия $T + U = \text{const}$ при движении системы.

В противоположность принципу Д'Аламбера, согласно которому движение определяется начальным положением точки и ее начальной скоростью, принцип наименьшего действия определяет движение по начальному и конечному положению точки. При всех сравниваемых бесконечно близких движениях только начальные и конечные положения остаются без изменения, тогда как скорости, даже начальные, могут быть произвольно варьируемы в пределах, допустимых заданными связями.

По существу, вариационные принципы не являются ни первыми, ни единственными в отношении выделения осуществляющихся в природе движений из всех возможных движений. Уравнения движения Ньютона также выделяют из всех возможных движений — точнее говоря, из всех мыслимых движений — естественные движения, удовлетворяющие аксиомам механики Ньютона, среди которых первая аксиома является частным случаем обобщенного принципа прямейшего пути Герца. Различие в характере выделения группы естественных движений с помощью уравнений Ньютона от выделения их с помощью вариационных принципов состоит в том, что в первом случае условием является только соответствие аксиомам механики, а во втором это соответствие выражено через экстремальное условие, для применения которого необходимо сравнение возможных движений между собой. Нечто аналогичное уже имело место и в принципе возможных перемещений.

Однако различные формы механики имеют различное значение как в отношении решения механических, так и в особенности в отношении решения немеханических задач. Та форма, которую придал механике Лагранж, основав ее на законах, выраженных в дифференциальной форме, оказалась чрезвычайно продуктивной для решения задач технической механики.

Другая форма механики, основанная на интегральных принципах, которую придали механике Гамильтон и Якоби, стала важнейшим методом для исследования ряда задач астрономии и физики как макрокосмоса, так и микрокосмоса.

В чем же причина этого различия, которое тем более интересно, что в сфере механики налицо полная эквивалентность дифференциальных и интегральных принципов?

Прежде всего необходимо указать, что дифференциальные принципы обладают одним общим недостатком. Формулировка этих принципов всегда требует введения особых координат для исследуемой системы. Необходимость введения таких координат придает решению каждой проблемы специфически механический вид. Но дело не только в этом. Физика должна формулировать законы макрокосмоса так, чтобы они не зависели от произвольного выбора исследователем системы координат. Физический закон должен быть инвариантным относительно той или иной группы преобразований координат. Эти преобразования должны быть выражением каких-то законов природы, каких-то фундаментальных свойств материального мира. Инвариантность является необходимым, хотя и недостаточным условием истинности формулированных нами физических законов. То, что те или иные законы инвариантны лишь по отношению к тем или иным преобразованиям, введенным как логическое обобщение опытных данных (преобразование Галилея — равномерного движения и сложения скоростей, преобразования Лоренца — опыта Майкельсона и т. п.), указывает на определенные границы,

на сферу применения этих законов. Так, уравнение Шредингера, которое не инвариантно по отношению к лоренцевым преобразованиям, являясь аналогом уравнений классической механики, ограничено соответствующим образом в объеме охватываемых им явлений. Интегральный же принцип Гамильтона имеет то огромное преимущество, что он может быть сформулирован так, что окажется инвариантным по отношению к любым преобразованиям координатных систем.

Другое преимущество принципа Гамильтона обнаруживается в механике сплошных сред¹, так как этот принцип позволяет получить не только дифференциальные уравнения задачи, но также и краевые условия, которым должны удовлетворять решения этих дифференциальных уравнений в частных производных.

В качестве примера приведем вывод из принципа Гамильтона уравнений Эйлера для движения несжимаемой жидкости. Подвергнем массу жидкости виртуальному смещению $\delta \mathbf{s}$, которое, однако,

не нарушает условия несжимаемости $\Delta \varphi = \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} = 0$, где

ΔV — первоначальный, а $\Delta V'$ — измененный объем элемента жидкости. Так как $\varphi = \text{div} \mathbf{s}$, то должно быть

$$\delta \varphi = \text{div} \delta \mathbf{s} = 0. \quad 49$$

Это условие будет выполнено, если в подынтегральное выражение в принципе Гамильтона добавить величину $\delta \varphi$, умноженную на множитель Лагранжа λ . Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d\tau (\delta T + \delta U + \lambda \delta \varphi) = 0, \quad (50)$$

¹ Механика сплошных сред (теория упругости и гидродинамики) или механика твердого тела могут быть получены из механики точки введением соответствующих выражений для энергий взаимодействия вида

$$V = \sum_k \sum_i V_{ik}(s_{ik}) \quad (i < k)$$

и некоторого предельного перехода. Поэтому результаты, полученные для механики точки, применимы и к этим областям механики.

Вариационным методам решения задач теории упругости посвящена специальная книга акад. Л. С. Лейбензона. В этой книге широкий круг задач теории упругости рассмотрен на основе вариационного уравнения Лагранжа и вариационного принципа Кастилиано — так называемого начала наименьшей работы деформации (см. Лейбензон Л. С., Вариационные методы решения задач теории упругости, ГТТИ, М.—Л., 1943, стр. 1—287).

О вариационных методах в гидромеханике см., например, Lichtenstein, *Grundlagen der Hydromechanik*, Berlin, 1929, гл. 9 и 10.

где все величины относятся к единице объема, а интегрирование по $d\tau$ распространяется на весь объем жидкости.

Далее:

$$\delta T = \varrho(V, \delta V),$$

$$\delta U = (F, \delta \mathbf{s}).$$

Введя действительную скорость $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$, получим для ее виртуальной вариации

$$\delta \mathbf{V} = \delta \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{s}.$$

Преобразуем член

$$\int_{t_0}^{t_1} \varrho(\mathbf{V}, \delta \mathbf{V}) dt = \int_{t_0}^{t_1} \varrho\left(\mathbf{V}, \frac{d}{dt} \delta \mathbf{s}\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(-\varrho \frac{d\mathbf{V}}{dt}, \delta \mathbf{s}\right) dt.$$

Для члена $\lambda \delta \varphi$ напомним, так как

$$\lambda \delta \varphi = \lambda \operatorname{div} \delta \mathbf{s},$$

следующее выражение:

$$\lambda \operatorname{div} \delta \mathbf{s} = \operatorname{div}(\lambda \delta \mathbf{s}) - \operatorname{grad}(\lambda \delta \mathbf{s}).$$

По теореме Гаусса—Остроградского получим

$$\int \lambda \operatorname{div}(\delta \mathbf{s}) dt = \int \lambda \delta \mathbf{s}_n d\sigma - \int \operatorname{grad}(\lambda \delta \mathbf{s}) d\tau.$$

Используя приведенные преобразования, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V d\tau \left(-\varrho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{F} - \operatorname{grad} \lambda, \delta \mathbf{s}\right) + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S d\sigma \lambda \delta \mathbf{s}_n = 0.$$

Из первого интеграла, так как $\delta \mathbf{s}$ благодаря введению множителя λ может быть выбрано произвольно, получим

$$\varrho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \operatorname{grad} \lambda = \mathbf{F}. \quad (51)$$

Это и является уравнением Эйлера, если λ отождествляется с давлением p . Таким образом, с точки зрения аналитической механики гидродинамическое давление p представляет собой реакцию, соответствующую условию несжимаемости, которому должен удовлетворять выбор λ .

Интеграл по поверхности, который также обращается в нуль согласно принципу Гамильтона, дает граничные условия, требующиеся для полного определения давления¹.

Рассматриваемые в принципе наименьшего действия варьированные состояния физически невозможны. Однако это, конечно, не все невозможные состояния, а только какая-либо группа их, удовлетворяющая некоторым условиям. Так, например, в интеграле Гамильтона таким условием является требование одного и того же значения времени для перехода из начального в конечное состояние. Если же вводить какое-либо условие, отличающее принимаемые во внимание варьированные состояния от непринимаемых, то возникает очевидное затруднение: «все такие состояния нельзя выразить при помощи математических форм, достаточных для описания других невозможных состояний»².

Эддингтон остроумно замечает, что принцип наименьшего действия можно сравнить с утверждением, что «если бы законы арифметики перестали быть верными, то $2+2$ было бы больше или равно (но наверное не меньше) четырех»³. Легко видеть, что это положение может быть сформулировано, если «неправильные системы арифметики» будут иметь неправильность какого-либо определенного вида. Если взять общий случай любых «неправильных систем арифметики», то приведенное выше утверждение не имеет смысла. Аналогично и в принципе наименьшего действия мы выделяем из всех невозможных движений, не находящихся в согласии с законами природы, определенный ограниченный класс. Значение и смысл такого выделения состоит как раз в том, что проводимое сравнение позволяет глубже и всесторонне понять свойства и особенности действительного движения.

¹ Отметим, что, кроме указанного выше (стр. 142) принципа Кастилиано, возникло много других специальных («дочерних») вариационных принципов. В 1929 г. Г. Бейтмен (Proc. Roy. Soc. London, A 125, 1929, стр. 596—618) сформулировал вариационный принцип для изэнтропических движений идеального газа. В частном случае установившегося потенциального движения функционал Бейтмена сводится к интегралу от давления газа по замкнутому контуру. В работах Бейтмена и других авторов требуется независимое варьирование нескольких параметров, определяющих гидродинамическое поле. В ряде работ в 40-х — 50-х годах В. И. Скобелкин («Вариационные принципы в гидродинамике», диссертация, 1958) сформулировал вариационный принцип наименьшего потенциала тока, свободный от недостатков принципа Бейтмена и применимый как для потенциальных, так и для вихревых движений.

Укажем еще на применение вариационных принципов в теории пластичности и ползучести (см. доклад Л. М. Качанова на Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в январе 1960 г.): принцип минимума полной энергии, принцип минимума дополнительной работы, принцип минимума дополнительной мощности.

² Эддингтон А., Теория относительности, пер. под ред. Д. Д., Иваненко ГТТИ, 1934, стр. 263.

³ Там же, стр. 265.

В качестве иллюстрации этого можно привести следующий общеизвестный факт. Если взять изолированную точку, то закон сохранения энергии требует для нее постоянства скорости, но ничего не говорит о направлении движения (т. е. о характере траектории). Из принципа же наименьшего действия непосредственно следует, что траектория этой изолированной точки будет прямой линией, ибо при $v = \text{const}$ выражение $\delta \int m v ds = \min$ дает $\int ds = \min$, т. е. прямую линию.

Значение (и, прежде всего, эвристическое) принципа Гамильтона резко возрастает благодаря тому, что он может быть сформулирован таким образом, что входящие в него величины будут иметь не только механическое значение. Другими словами, исходя из механической формулировки принципа, мы расширяем область его применения и на другие отделы физики. Это достигается прежде всего путем введения понятия обобщенных координат, под которыми понимается совокупность любых параметров, однозначно определяющих состояние системы. При этом все другие параметры, как, например, скорости, должны быть получены из этих обобщенных координат.

Таким образом, принцип, оставаясь механическим по своему происхождению, охватывает другие области физики. Первостепенную роль в этом расширении сферы действия принципа играет аналогия, ибо, хотя по содержанию обобщенные координаты могут существенно отличаться от координат механики x, y, z , но формы связи их между собой и со скоростями их изменений совпадают с соответствующими формами механики. В сущности, значение принципа Гамильтона в классической неполевой физике сводится к весьма простому обстоятельству. Исследуется какая-либо физическая система, о которой *a priori* нельзя утверждать, что она удовлетворяет уравнениям Лагранжа. Непосредственно подставлять значения соответствующих функций в эти уравнения не всегда можно: во-первых, часто трудно подобрать соответствующий вид функции, а во-вторых, неясно, будут ли они удовлетворять этим уравнениям. Поэтому на сцену выступает принцип Гамильтона. Если удастся параметры такой системы привести к виду функции L и если эта функция обратит в нуль вариацию интеграла Гамильтона, то тогда, введя эту функцию в уравнения Лагранжа, можно динамически-определить систему.

Принцип Гамильтона (так же как и другие интегральные принципы) прежде всего выражает свойства, присущие уравнениям движения, а поскольку эти последние являются обобщением законов механики, то также и свойства этих законов.

Благодаря рассмотренным особенностям метод Гамильтона приобрел значение в физике. Это значение еще более увеличивается, если учесть тесную внутреннюю связь принципа Гамильтона и оптики — связь, выраженную в оптико-механической аналогии.

С помощью принципа Гамильтона Гельмгольц первый стал отыскивать новые физические закономерности вне механики. В то время как в XVIII в. Эйлер подчеркивал апостериорное значение принципа наименьшего действия и считал, что с его помощью можно вывести только уже ранее известные механические законы, во второй половине XIX в. положение изменилось. Это не значит, конечно, что тот или иной вариационный принцип стал априорным законом физики. Дело обстоит как раз наоборот. Без обобщенных экспериментальных данных параметров и соотношений, вводимых в принцип Гамильтона, оказалось невозможным получить из него какие-либо новые законы. Однако оказалось, что для очень широкого круга явлений, например, когда энергия системы может быть представлена суммой двух членов, один из которых есть однородная, второй степени функция скоростей, а другой — функция только координат (и времени), функции Лагранжа (и Гамильтона) имеют аналогичное выражение. Наконец, уравнения систем с n степенями свободы могут быть выражены либо n дифференциальными уравнениями второго порядка, либо $2n$ уравнениями первого порядка обычной для механики формы. Знание формы функции Лагранжа для одной группы явлений и сходство фактов другой группы явлений с первой позволяют написать для последней ту же функцию Лагранжа и обычным математическим путем исследовать ее законы.

Этот метод широко использовал Дж. Томсон. Можно поступить и иначе: если законы какой-либо группы явлений выражаются математически через ту же форму функции Лагранжа, что и законы другой группы, то можно предположить внутреннее сходство этих явлений хотя бы в некоторых отношениях, или постулировать общность их механизма или структуры.

Поэтому благодаря существованию аналогии в математической форме выражения законов этих процессов можно получить с помощью принципа Гамильтона новые результаты, так как, задав выражение лагранжевой функции в интеграле Гамильтона, мы сразу получаем возможность выразить законы исследуемой области явления в виде уравнений Лагранжа (или путем некоторых преобразований в виде канонических уравнений) и определить ряд динамических величин.

4. Вариационные принципы механики и принцип Гюйгенса

В возможности образования любой волны как огибающей вторичных предшествующих волн, вышедших из некоторого источника (эта возможность выражает свойство группы однородных касательных преобразований), заключается существенный характер распространения посредством волн. Так как канонические уравнения вполне определяются функцией $H(p, q)$, то отсюда сле-

дует весьма наглядное с физической точки зрения заключение, что явление распространения волн может быть полностью описано, если известна скорость распространения, выраженная как функция места и ориентации фронта волны.

Распространение света в какой угодно среде представляет собой процесс, определяемый некоторой канонической системой с соответствующей характеристической функцией $H[p(q)]$, конечной, однородной и первой степени относительно p . Это и есть аналитическое выражение принципа Гюйгенса, рассматриваемого в его первоначальном исключительно геометрическом виде.

Покажем тесную связь принципа Гюйгенса с принципом Гамильтона и касательным преобразованием. Для двух точек $A(x_i)$ и $\bar{A}(\bar{x}_i)$ в изотропной среде имеем для времени прохождения луча света из A в $\bar{A}$

$$\Delta t = \bar{t} - t = S(x_i, \bar{x}_i), \quad (52)$$

где функция S называется характеристической функцией. Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления пути в A в момент времени t ; $\mathbf{n}$ перпендикулярен к волновой поверхности, проходящей через A . Волновой фронт $\bar{\sigma}$ можно получить из волнового фронта σ с помощью построения Гюйгенса. С этой целью каждый элемент поверхности σ рассматривается как источник вторичных волн, огибающая которых в момент времени $\bar{t}$ даст волновой фронт $\bar{\sigma}$. Световой луч, исходящий из некоторой точки на σ , достигает $\bar{\sigma}$ через время $\Delta t = \bar{t} - t$, независимо от того, какая выбрана точка на σ .

В силу этого значение S не изменится, если начальная точка x_i сместится на δx_i , оставаясь при этом на σ ; следовательно,

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} \delta x_i = 0,$$

а так как δx_i находится на σ , то

$$n_i \delta x_i = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} : \frac{\partial S}{\partial x_2} : \frac{\partial S}{\partial x_3} = n_1 : n_2 : n_3 \quad (53)$$

и аналогично

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}_1} : \frac{\partial S}{\partial \bar{x}_2} : \frac{\partial S}{\partial \bar{x}_3} = \bar{n}_1 : \bar{n}_2 : \bar{n}_3, \quad (54)$$

где $\bar{\mathbf{n}}$ — единичный вектор направления луча в $\bar{A}$ в момент времени $\bar{t}$.

Для заданных S , x_i , $\mathbf{n}$, Δt уравнения (52) и (53) достаточны для определения $\bar{x}_i$, а тогда уравнение (54) позволяет определить $\bar{\mathbf{n}}$. Таким образом, путь луча полностью определяется, если заданы функция S , положение начальной точки и направление луча в ней.

Функция S может рассматриваться как задающая однопараметрическую группу преобразований. В соответствии с параметром Δt функция S определяет преобразование поверхности σ в поверхность $\bar{\sigma}$. Если две поверхности σ_1 и σ_2 касались в точке, то соответствующие поверхности $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ будут касаться в соответственной точке.

Заметим, что время движения луча из точки $\bar{A}(\bar{x}_i)$ в точку $\bar{x}_i + d\bar{x}_i$ в среде с коэффициентом преломления $\bar{\mu}$ равно

$$\bar{\mu} \bar{n}_i d\bar{x}_i;$$

с другой стороны, это время будет

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \bar{x}_i} d\bar{x}_i,$$

откуда

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}_i} = \bar{\mu} \bar{n}_i.$$

Аналогично найдем для точки $A(x_i)$

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = -\mu n_i,$$

где знак минус имеет место потому, что мы рассматриваем свет, распространяющийся из точки A в точку $\bar{A}$.

Проанализируем теперь физический смысл оптико-механической аналогии несколько глубже.

Для этой цели привлечем не только концепции классической механики, но и идеи, возникшие и развившиеся на первой стадии разработки так называемой волновой механики.

Пусть большое количество невзаимодействующих точек выброшено с одинаковой энергией H из некоторой точки на поверхности Σ . Поле сил, в котором движутся точки, будем считать консервативным. Частицы описывают некоторые траектории, которые на начальном участке перпендикулярны к этой поверхности. Рассмотрим одну из частиц. Она покидает точку O поверхности Σ в момент времени $t=0$ и достигает некоторой точки A на траектории в момент времени t . Взяв интеграл принципа наименьшего действия в форме Лагранжа от O до A и положив в точке O действие равным нулю, мы найдем, что действие частицы в точке A равно этому интегралу. Следовательно, частица на каждом участке своей траектории связана с некоторым значением действия, и действие возрастает по мере того, как частица описывает траекторию. Очевидно, что мы можем определить действие в любой точке траектории, независимо от того, находится там на самом деле частица или нет.

Рассмотрим теперь поток частиц. Предположим, как и выше, действие равным нулю во всех точках поверхности Σ , из которых

вылетают частицы. В точке A любой траектории действие имеет некоторое значение. Соединив все точки с одинаковым действием, получим непрерывные поверхности — поверхности равного действия. Уравнения динамики показывают, что эти поверхности пересекаются всеми траекториями под прямыми углами. Так как взятая нами точка A есть произвольная точка траектории, то можно заключить, что поверхности равного действия образуют простое бесконечное семейство и что траектории ортогональны к этим поверхностям. Одной из этих поверхностей будет поверхность Σ , на которой действие равно нулю, а на всех остальных вдоль траектории оно возрастает. Надо заметить, чтобы избежать возможного недоразумения, что частицы, вышедшие с поверхности Σ одновременно, достигают какой-либо заданной поверхности действия отнюдь не в одно и то же время.

Если взять гамильтоново действие, то поверхности равного действия для частицы, движущейся из точки O в точку A в консервативном поле, мы получим, определив значение интеграла от функции $T + U (= T - V)$ по времени движения между этими точками; допустив, что на поверхности Σ гамильтоново действие равно нулю, мы получим, таким образом, его значение в точке A .

Предположим далее, что частица покидает точку O в момент времени $t = 0$. В таком случае, если обозначить лагранжево действие в точке A через V , то гамильтоново действие для той же точки будет

$$S = V - tH, \quad (55)$$

где H — полная энергия, с которой частица движется, а t — время движения частицы от O до A . Из (55) видно, что так как на поверхности Σ , как было уже предположено, $V = 0$, то S на той же поверхности в начальный момент времени $t = 0$ будет равно нулю.

Таким образом, гамильтоново действие связано с движущейся частицей или, иначе говоря, оно имеет значение только в точках, через которые проходит частица. Однако гамильтоново действие может быть определено для каждой точки траектории и в любой момент времени. Пусть в момент времени t частица проходит через точку A , тогда (55) определит гамильтоново действие частицы в этой точке. Однако и после того, как частица пройдет A (или раньше, чем она достигнет точки A), формула (55) определяет гамильтоново действие в этой точке для каждого момента времени t . Из формулы (55) видно, что с течением времени гамильтоново действие в точке A убывает по величине, а в данный момент времени оно возрастает вдоль траектории.

Возьмем на различных траекториях те точки, для которых гамильтоново действие в момент времени t имеет то же значение S , что и в точке A . Тогда (55) показывает, что для всех этих точек лагранжево действие будет одинаково $S + tH$. Следовательно, точки

равных значений гамильтонова действия в данный момент времени будут покрывать поверхность равного лагранжева действия. Это имеет место для всех моментов времени и для всех точек на траектории.

Таким образом, поверхности равного гамильтонова действия S совпадают во всякий момент времени с поверхностями равного лагранжева действия V . Однако между этими поверхностями имеется одно существенное различие. Поверхность равного лагранжева действия есть фиксированная поверхность, которая не меняет своего положения с течением времени. Что же касается поверхности равного гамильтонова действия, то она не остается фиксированной, так как мы видели, что величина гамильтонова действия в какой-либо фиксированной точке меняется с течением времени.

Легко показать, исходя из (55), как поверхность равного гамильтонова действия должна перемещаться, чтобы оставаться связанной с одним и тем же фиксированным значением действия. Поверхность эта должна двигаться нормально к траекториям со скоростью, определенной в каждой точке и равной H/p , где p — величина импульса частицы в рассматриваемой точке. Эта скорость совпадает с той скоростью, которую де Бройль ввел в качестве волновой скорости своих «волн материи» a , следовательно, и в качестве скорости их волновых фронтов; а так как фронты волн де Бройля также перпендикулярны их траекториям, то отсюда вытекает, что эти волновые фронты движутся вдоль поверхностей равного гамильтонова действия. Волна де Бройля может быть поэтому записана как

$$U = c \cos \frac{2\pi}{h} (tH - V) = c \cos \frac{2\pi}{h} S. \quad (56)$$

Гамильтон, рассматривая распространение поверхностей равного гамильтонова действия, отнюдь не предполагал какой-либо их периодичности и не связывал их никак с распространением последовательности волновых пучностей. Только де Бройль с помощью соотношения (56) ввел в гамильтонову картину волновой аспект. Во времена Гамильтона это было невозможно. В самом деле, аргумент косинуса в (56) должен быть безразмерной величиной, а поэтому, чтобы получить число, мы должны делить гамильтоново действие на величину той же размерности. Такой величины тогда в физике не было. Положение изменилось с возникновением квантовой теории и появлением универсальной константы действия Планка h , разделив на которую гамильтоново действие, мы получаем безразмерную величину, могущую быть аргументом косинуса. Полученное таким образом число определяет число универсальных единиц действия h , заключающихся в гамильтоновом действии, и выражение для волны (56) получает простой и естественный смысл.

Так как Гамильтон, по существу, установил эквивалентность уравнений Гамильтона—Якоби и уравнения эйконала, то только

отсутствие достаточного количества экспериментального материала не дало ему возможности прийти к уравнению, открытому Шредингером лишь в 1926 году.

Состояние физической науки в первой половине XIX в. не давало еще никаких указаний на то, что классическая механика является лишь приближением волновой механики, представляя собой своего рода «геометрическую оптику». Потребовалось пройти огромный научный путь, чтобы это стало ясным. Собственно говоря, только опыты Дэвисона и Джермера, показавшие, что для «частиц» имеют место эффекты, зависящие от длины их волны, изменили научную обстановку в этом вопросе, аналогично тому, как открытие интерференции и дифракции света позволило впервые выявить преимущество волновой теории света перед корпускулярной.

5. Вариационные принципы в теории полей

В настоящее время основное значение для физики имеют не те отделы классической механики, которые играли главную роль в XIX в.

В механике XIX в. основное значение имело изучение проблемы n -тел, в то время как современная физика занята в основном проблемой «поля-частицы». Хотя между этими вопросами имеется много общего, но принципиальная постановка задачи существенно различна.

После длительного развития возникшей в XVII—XVIII вв. классической ньютоновской механики и механической концепции картины мира в первоначальном ее варианте универсальных сил различных частиц, действующих друг на друга по законам дальнего действия, выяснилось, что электромагнитные и гравитационные поля подчиняются законам, имеющим другой характер. Кроме того, оказалось, что при больших скоростях уравнения механики должны иметь релятивистский вид, что законы движения и взаимодействия имеют квантовый характер, что все взаимодействия распространяются не мгновенно, а с конечной скоростью, не превышающей скорости света. Ньютонова механика оказалась объективной, приближенной, но отнюдь не универсальной теорией. Попытки механического моделирования электромагнитного поля также не оправдали возлагавшихся на них надежд.

В силу этого и под влиянием бурного развития классической электродинамики в конце XIX — начале XX в. возникли попытки построения «электромагнитного» варианта механистической картины мира, физический и философский смысл которой состоит в сведении всего наблюдаемого многообразия форм движения к одной из них.

Программа построения электромагнитной картины мира, хотя и сыграла исторически прогрессивную роль, однако также не могла быть реализована. Справедливо критикуя «механический»

вариант механицизма, представители этой программы, в конце концов, пришли к односторонним попыткам положить в основу единой картины мира не только заряды и электромагнитное поле, но даже одно электромагнитное поле, выведя все заряды из поля. Открытие нейтральных частиц, ядерных, мезонных и других полей показало, что и «электромагнитная» концепция физической картины мира отнюдь не является универсальным отражением законов природы и не может охватить даже большинства известных физических явлений, в первую очередь, квантовых процессов.

Задолго до того, как прекратились попытки построения «электромагнитной» универсальной картины, особенно в связи с развитием теории относительности, выяснилось, что свойства и закономерности гравитационного поля не удастся получить из поля электромагнитного (даже с привлечением зарядов). Какие-либо новые поля и силы (например, ядерные, мезонные и т. п.) еще не были открыты, поэтому не мог быть разработан новый вариант единой физической картины, построенной, как и прежние, методом сведения к одной форме движения (к одному виду поля или частиц). В то же время в теории относительности выяснилась возможность описания гравитационного поля с помощью величин, характеризующих геометрическую структуру четырехмерного неевклидова пространства—времени.

Рассмотрение риманова пространства, характеризуемого симметричным метрическим тензором и определенным законом параллельного переноса векторов, привело к связи десяти компонентов тензора гравитационного поля с соответственным числом компонентов метрического тензора. Поэтому, естественно, возникла идея о возможности подобного геометрического истолкования и электромагнитного поля путем построения более общей или отличной от римановой единой геометрии мира¹.

Начиная с 1918 г., было предложено очень много так называемых единых теорий поля, которые пытались путем введения неримановой геометрии охватить гравитационное и электромагнитное поля. Эти попытки построить единую теорию поля уже выходят за пределы не оправдавшей себя механистической концепции сведения к одной форме движения; но тем не менее и они оказались бесплодными и не смогли решить поставленной перед ними задачи. Конкретные причины этого прежде всего в том, что риманова геометрия достаточно хорошо отражает свойства реального макроскопического пространства—времени, и отказ от нее скорее ухудшает, чем улучшает дело; кроме того, из любого геометрического оформления классических законов поля нельзя вывести квантовые свойства физических процессов.

¹ См. Д. Иваненко и А. Соколов, Классическая теория поля (новые проблемы), Гостехиздат, М.—Л., 1949.

Более общая причина неуспеха геометризованных единых теорий поля лежит в методологической неправомерности попыток геометризовать физику в смысле выведения свойств и законов всех частиц и полей из геометрических, даже любым образом обобщенных, свойств пространства—времени, которые хотя и являются необходимой формой физических движений, но отнюдь не достаточны для полного их описания и объяснения.

В настоящее время мы находимся в новой стадии построения единой физической картины мира, контуры которой еще неясны, но о которой можно сказать лишь, что, вероятно, это будет релятивистская, квантовая, корпускулярно-полевая картина.

Развитие физики есть процесс неравномерный, но в целом ускоренный. Поэтому единая механистическая картина мира дольше задержалась на историко-научной сцене, чем объединенная, которая быстро в течение трети столетия отошла в прошлое в основном под натиском бурного потока физики XX в.

Перейдем к рассмотрению функции Лагранжа для физического поля.

Как мы видели, функция Лагранжа $L=L(q_i, \dot{q}_i, t)$ представляет собой функцию времени и функционал от возможных траекторий $q_i(t)$ частиц системы. По аналогии можно предположить, что функция Лагранжа для поля является функционалом от амплитуды $\psi(\mathbf{r}, t)$. Обычно ее представляют в виде интеграла от плотности функции Лагранжа, взятого по всему пространству

$$L = \int \tilde{L}(\psi, \text{grad } \psi, \dot{\psi}, t) dV, \quad (57)$$

где появление $\text{grad } \psi$ в аргументе функции $\tilde{L}$ обязано тому обстоятельству, что поле имеет несчетно большое число степеней свободы и ψ непрерывно зависит от $\mathbf{r}$. Это выражение носит наименование лагранжиана¹.

Так как обычно предполагается, что лагранжиан зависит от функций поля и их частных производных не выше первого порядка, то соответствующие уравнения поля оказываются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка.

Для свободных полей лагранжиан обычно должен приводить к линейным и однородным уравнениям этих полей. К этим уравнениям приводят лишь лагранжианы, квадратичные по функциям поля и их производным. Эти условия в совокупности с релятивистской инвариантностью и трансформационными свойствами функций поля определяют лагранжиан с точностью до коэффициентов.

¹ Если лагранжиан зависит от состояния полей в бесконечно малой окрестности точки поля, т. е. от значений ψ и конечного числа их производных, то он именуется локальным лагранжианом.

Поле в классической физике описывается несколькими действительными функциями координат и времени $\psi_i(x, t)$, которые подчиняются некоторым уравнениям в частных производных — уравнениям поля. Если исходить из вариационной задачи, то уравнения



А. ЭЙНШТЕЙН (1879—1955)

Эйлера—Лагранжа должны быть именно уравнениями поля. Пусть

$$|L = L(\varphi, \text{grad } \varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \text{grad } \varphi_2, \dot{\varphi}_2, \dots); \quad (58)$$

образуем выражение

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V L d\tau.$$

Варьируя, найдем обычным способом

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \delta L d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d\tau \sum \delta \varphi_i \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right).$$

Классическое поле определяется требованием экстремальности этого интеграла, т. е. $\delta I = 0$, откуда сразу получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_i} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (60)$$

Это — уравнения в частных производных, порядок которых относительно функции ψ_i не выше второго; они и представляют собой уравнения поля. Введенный здесь вариационный принцип можно сопоставить принципу Гамильтона классической механики. Функции поля ψ_i отличаются от координат механической системы $q_n = q_n(t)$ тем, что $\psi_i = \psi_i(x, t)$. Однако в теории поля можно как бы подражать описанию системы точек с помощью координат q_n (n — число степеней свободы), сопоставляя с n не только индекс i функции поля, но и непрерывно изменяющийся радиус-вектор x . В этом смысле поле можно рассматривать как систему с бесконечным числом степеней свободы. Это эквивалентно разбиению пространства не на бесконечно малые элементы, а на конечные ячейки. Тогда

$$\tilde{L} = \sum_j \delta x_j L_j$$

и для $\tilde{L}$ получим

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q, \dot{q}) dt = 0.$$

Если же вернуться к пространственному континууму, делая все клетки бесконечно малыми, то функция Лагранжа перейдет в интеграл по всему пространству

$$\tilde{L} = \int d\tau L(\psi_1, \text{grad } \psi_1, \dot{\psi}_1, \dots). \quad (61)$$

Выражение

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \psi_i} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}} \equiv \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \psi_i} \quad (62)$$

называется функциональной производной от $\tilde{L} = \int L dx$ по ψ_i .

Одной из центральных задач современной физики является разработка теории квантованных полей, которая вместе с тем должна быть и теорией так называемых элементарных частиц, в какой-то мере сочетая требования инвариантности (в первую очередь релятивистские), определенные представления о геометрической структуре пространства — времени с квантовым характером процессов.

Пользуясь формализмом Лагранжа, легко удовлетворить требованию релятивистской инвариантности, выбирая интеграл от лагранжиана по времени в виде, инвариантном относительно группы преобразований Лоренца. Столь же простой путь релятивизации

формализма Гамильтона еще не найден. В то же время при создании квантовой теории поля во многих случаях приходится исходить из гамильтонова формализма.

Так как плотность лагранжиана при переходе к описанию полей не связывается уже более с какой-либо определенной механической системой, то он не должен быть обязательно равен разности плотностей кинетической и потенциальной энергий. Это значит, что для функции L можно взять любое выражение, в результате подстановки которого в принцип Гамильтона можно прийти к известным уравнениям того или иного поля¹. Можно поступить и иначе, если искомые уравнения поля неизвестны. Задав физически осмысленными условиями, можно вводить те или иные лагранжианы и исследовать новые, может быть, еще неизвестные поля. Указанными условиями могут быть, при отсутствии достаточных экспериментальных критериев, некоторые требования лоренц-инвариантности и других видов инвариантности, а также локальности или нелокальности, линейности или тех или иных видов нелинейности. Этот метод широко применяется в квантовой электродинамике и в теории квантованных полей.

В релятивистской квантовой теории из инвариантного лагранжиана могут быть получены уравнения поля и все основные величины, характеризующие поле, а именно: тензор плотности энергии, вектора импульсов, канонически сопряженных волновым функциям, рассматриваемым как обобщенные координаты и т. п.

Прежде всего получаем импульсы, канонически сопряженные координатам (компонентам ψ -функции)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial t}},$$

¹ Заметим, что добавление четырехмерной дивергенции к плотности лагранжиана не меняет уравнений движения. Действительно, рассмотрим новую плотность лагранжиана $\tilde{L}$, которая получается из плотности лагранжиана L добавлением к последнему четырехмерной дивергенции

$$\tilde{L} = L + \frac{\partial F^\mu(\varphi)}{\partial x^\mu},$$

где F^μ — четырехмерная векторная функция переменных поля. Член

$$\int \frac{\partial F^\mu(\varphi)}{\partial x^\mu} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

может быть по теореме Гаусса—Остроградского преобразован в интеграл по поверхности; его вариация тождественно равна нулю. Хотя физическое содержание двух лагранжианов, отличающихся друг от друга четырехмерной дивергенцией, одинаково, однако соответствующие им гамильтонианы и, следовательно, весь гамильтонов формализм будут для них, вообще говоря, различными.

где $q_i = \psi, \psi^*$, затем канонический тензор энергии (тензор плотности энергии-импульса и натяжений)

$$T_{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial x_\nu}} - \delta_{\mu\nu} L$$

(если использовать инвариантность L относительно переноса), а вместе с тем тензор плотности энергии T_{44} и потока энергии T_{4i} .

Выражение

$$T_{44} = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \frac{\partial q_i}{\partial t}} - L = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial t} p_i - L$$

есть аналог гамильтониана классической механики

$$H = p_i \dot{q}_i - L.$$

Тензор $T_{\mu\nu}$ подчиняется обобщенному закону сохранения

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0,$$

в котором в качестве частных случаев содержатся законы сохранения энергии и импульса поля. Заметим, что канонический тензор энергии будет симметричным только для случая скалярного поля.

В отличие от него так называемый метрический тензор энергии, вводимый согласно Гильберту как вариация функции L по компонентам метрического тензора $g_{\mu\nu}$, записанной в общеквариантной форме

$$T'_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial L \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}},$$

будет всегда симметричным в силу симметрии $g_{\mu\nu}$ и совпадает с каноническим только для скалярного поля.

Наконец, приняв во внимание инвариантность лагранжевой функции относительно вращений и преобразований Лоренца, найдем

$$M_{\mu\nu,i} = x_\mu T_{\nu i} - x_\nu T_{\mu i},$$

т. е. тензор углового момента, обобщающий момент количества движения классической механики.

Из лагранжиана при использовании требований инвариантности непосредственно получаются также выражения тока, спина и т. п. Вариация лагранжиана по электромагнитным потенциалам дает выражение плотностей электрического заряда и тока, связанных с данным полем и частицами. На основе теоремы Нетер лагранжева функция приводит к законам сохранения тех или иных величин.

Можно сказать, что лагранжева функция характеризует и выражает главные свойства исследуемого поля.

Остановимся еще на случае, представляющем некоторое обобщение обычного лагранжиана, а именно, когда лагранжиан зависит и от производных второго порядка

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t);$$

в этом случае принцип Гамильтона приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (63)$$

Свойства такой системы в любой момент времени зависят от $3n$ переменных $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i$, т. е. обычное задание координат и скоростей в некоторый момент времени не дает уже возможности определить их для любого более позднего времени.

Хотя были сделаны многочисленные попытки ввести в квантовую теорию полей лагранжианы, включающие высшие производные, однако все они не принесли сколько-нибудь значительных успехов¹. Причина этих неудач лежит, в частности, в том, что система с n степенями свободы не определяется в случае лагранжиана с высшими производными $2n$ начальными условиями.

6. Гамильтонов и лагранжев формализм

В гамильтоновом формализме основными величинами являются q_i, p_i и H . Гамильтониан конструируется с помощью функции Лагранжа и q_i и p_i . Отсюда непосредственно получаются канонические уравнения и динамические переменные. Однако в гамильтоновом формализме время играет все же особую роль по сравнению с пространственными координатами, так как время, по существу говоря, является единственной независимой переменной. Это дает возможность провести далеко идущую аналогию с классической механикой для любой области, рассматриваемой с помощью канонических уравнений. Вместе с тем основной недостаток гамильтонова формализма также заключается в этой особой роли времени, так как именно поэтому теория оказывается релятивистски инвариантной².

¹ См., например, B o r p F., Z. Naturforsch. 1, 196 (1946), de W e t I. S., Proc. Cambridge Phil. Soc. 44, 546 (1948); Proc. Roy Soc. A 195, 365 (1948); C h a n g T. S., Proc. Cambridge Phil. Soc. 42, 132 (1946) 43, 146 (1947).

² Для наблюдателей, движущихся относительно друг друга, мгновенное настоящее различно, так как оно в каждом случае соответствует различным трехмерным сечениям пространства-времени. Следовательно, уравнения Гамильтона описывают один и тот же процесс каждому наблюдателю различным образом, так как для них различны временные соотношения между событиями. Таким образом, слияние теории относительности и квантовой механики можно осуществить наиболее естественно, если отказаться от гамильтонова метода.

В лагранжевом формализме не вводят q_i , p_i и H (хотя это и вполне возможно сделать). В лагранжевом методе исходят из вариационного принципа для лагранжиана системы. Из условий для экстремума интеграла действия получают уравнения движения. Что же касается динамических переменных (энергия-импульс, заряд и т. д.), то их определяют как инварианты, соответствующие различным преобразованиям системы координат и, в случае теории поля, функций поля. В лагранжевом формализме, в отличие от гамильтонова, время входит совершенно симметрично с пространственными координатами, благодаря чему теория с самого начала оказывается релятивистски ковариантной. Зато аналогия с механикой системы точек оказывается гораздо менее отчетливой.

Можно поставить интересный вопрос: возникает ли различие в понимании сущности физических процессов при изложении теории с помощью того или другого формализма, хотя конечные результаты в обоих случаях безусловно являются эквивалентными (в соответствии с совокупностью экспериментальных данных)?

Уравнения Гамильтона дают возможность проследить за изменением состояний системы во времени, тогда как лагранжев формализм¹ характеризует картину процесса вдоль траектории в целом.

Основное различие методов Лагранжа и Гамильтона состоит в следующем. В формализме Лагранжа поведение системы описывается с помощью q_i и $\dot{q}_i$, где $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$, т. е. они связаны между собой, и поэтому варьирование $\delta\dot{q}_i$ при выводе уравнений Лагранжа надо выполнять через независимые вариации δq_i . Это осуществлялось интегрированием по частям, в результате чего появлялись члены вида $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$ и получались уравнения движения второго порядка. В то же время в формализме Гамильтона q_i и p_i независимы и являются равноправными переменными, т. е. p_i связаны с q_i и t только уравнениями динамики, а не каким-либо заранее заданным соотношением. Таким образом, мы получаем уравнения первого порядка, увеличив число переменных с n до $2n$. Разделение переменных, описывающих движение, на две независимые группы, связанные между собой почти симметричным образом посредством уравнений Гамильтона — вот характерная черта формализма Гамильтона. Наименование q_i и p_i обобщенными координатами и обобщенными импульсами имеет только исторический смысл. Вообще термины «координаты» и «импульсы» применительно к каноническим уравнениям вряд ли можно считать удачными, так как они связаны с представлением о пространственных координатах и количестве движения. На самом же деле разделение переменных на «координаты» и «импульсы» есть их разделение на две независимые группы,

¹ Формализм S-матрицы является аналогом лагранжева метода.

почти симметрично связанные между собой посредством уравнений Гамильтона.

Здесь уместно сопоставить конфигурационное и фазовое пространство.

В формализме Лагранжа рассматривается пространство конфигураций переменных q_i , в гамильтоновом же формализме механические движения представляются в фазовом пространстве $2n$ переменных q_i и p_i .

В то время как пространство конфигураций имеет геометрию риманова типа, фазовое пространство не имеет определенной геометрической структуры и только для удобства вычислений можно предположить, что q_i и p_i образуют прямоугольные координаты $2n$ -мерного евклидова пространства.

Удвоение числа измерений является только кажущимся усложнением, а на самом деле введение фазового пространства имеет большие преимущества перед рассмотрением задач в пространстве конфигураций. Дело в том, что в ряде задач недостаточно рассматривать только одну траекторию, отвечающую определенным начальным условиям и представляющую собой частное решение уравнений движения, а необходимо рассмотреть все траектории, соответствующие любым начальным условиям и представляющие в совокупности полное решение упомянутых уравнений.

В лагранжевом конфигурационном пространстве движение может начаться из любой точки в любом направлении и с произвольной начальной скоростью, и поэтому совокупность траекторий образует сложную запутанную картину пересечений и т. д.

В фазовом пространстве гамильтоновых уравнений движение тоже может начаться из любой точки, но если задана одна точка, то движение однозначно определено, так как канонические уравнения определяют скорость точки, изображающей исследуемую систему, если определено ее положение. Это значит, что полное решение канонических уравнений найдено, если q_i и p_i определены как функции времени t и $2n$ произвольных постоянных интегрирования q_i^0 и p_i^0 (т. е. $2n$ координат при $t = 0$):

$$\left. \begin{aligned} q_i &= f_i(q_i^0, p_i^0, t), \\ p_i &= F_i(q_i^0, p_i^0, t). \end{aligned} \right\}$$

Преимущества метода Гамильтона, конечно, не в его математической специфичности, так как он в общем мало облегчает решение задач механики, и не в том часто кажущемся объединении различных областей физики, которое получается с его помощью, а в равноправности в нем координат и импульсов как независимых переменных. Эта равноправность дает гораздо больше возможностей для выбора величин, которые в ходе решения физических задач рассматривают как «координаты» и «импульсы». Поэтому эти методы

оказали большую помощь в разработке статистической и квантовой механики.

Гамильтонов формализм дает удовлетворительные результаты при рассмотрении простейших задач теории поля. Однако в случае более сложных задач этот метод не дает хороших результатов. Причиной этого является то, что релятивистские теории поля содержат расходимости (например, типа собственной энергии). Хотя эти расходимости и могут быть устранены с помощью перенормировок, однако нековариантный гамильтонов формализм представляет собой очень сложный и трудный путь получения уверенных результатов для конечных остаточных эффектов.

Различие и связь лагранжева и гамильтонова формализма охарактеризованы П. Дираком (род. в 1902 г.): «Пользуясь формализмом Лагранжа, легко удовлетворить требованию релятивистской инвариантности, выбирая действие, т. е. интеграл от лагранжиана по времени в виде, инвариантном относительно группы Лоренца. Мы не знаем столь же простого пути релятивизации гамильтоновского формализма. При создании квантовой теории приходится исходить из гамильтоновского формализма. Существуют надежные правила перехода от классической гамильтоновской динамики к квантовой динамике, основанные на замене координат и импульсов линейными операторами. Эти правила в простых случаях приводят к однозначным результатам, и хотя в более сложных случаях их нельзя применить без известной неоднозначности, они показали себя вполне пригодными для всех практических целей.

Таким образом, оба формализма имеют в настоящее время свои преимущества, что и делает необходимым пользоваться и тем и другим. Оба формализма тесно связаны друг с другом. Исходя из лагранжиана и вводя импульсы, можно в случае, если импульсы — независимые функции от скоростей, получить гамильтониан¹.

7. Вариационные принципы, телеология и причинность

В основе законов механики лежит определенный тип каузальной связи — так называемая динамическая закономерность, смысл которой в механике состоит в том, что если заданы начальные условия системы и действующие силы, то положение системы на траектории в любой момент времени однозначно определено. В целом можно признать, как говорит Гамель (1877—1954), что в основе механики лежат следующие аксиомы познания макрокосма: «А — время и пространство однородны, Б — пространство изотропно... В (достаточного основания) — все явления должны иметь свою познаваемую причину, которою они однозначно определены;

¹ Dirac P. A. M., Canad. I. Math, 2, 1950, стр. 129; «Сборник», стр. 722.

Γ — не существует никакой исключительной длины, никакой исключительной скорости и никакой исключительной массы, которые имели бы значение для построения классической механики»¹.

Когда мы выражаем принципы механики в интегральной форме, то, если интеграл берется по времени, поведение системы как бы рассматривается в будущий и прошедший моменты времени в отличие от принципов, выраженных в дифференциальной форме. Однако это только кажущееся «предвидение будущего» и определение из будущего настоящего, так как вариационные принципы легко могут быть преобразованы к такому виду, при котором время исключено (выражение принципа наименьшего действия, данное Якоби), или не входит совершенно (принцип Герца).

Укажем также на связь принципа Гамильтона с принципом инерции, лежащим в основе классической механики Галилея—Ньютона. Если обратить внимание на первую аксиому механики Ньютона ($v = \text{const}$ для изолированного от внешних воздействий тела), то легко убедиться в ее связи с принципом наименьшего действия. Во-первых, для случая отсутствия внешних сил требование экстремума для интеграла $\int v ds$ дает прямую линию или бесконечность. Последнее мы отбрасываем, так как бесконечных траекторий между двумя точками может быть бесконечно много. Таким образом, мы получаем первую аксиому Ньютона из принципа наименьшего действия. Во-вторых, с точки зрения антропоморфно рассуждающего наблюдателя сохранение состояния сопряжено с наименьшей затратой «действия». Существенно здесь отметить, что первая аксиома Ньютона есть формулировка принципа причинности на языке механики. Вместе со второй аксиомой в ней выражается тот факт, что каждое изменение должно иметь обусловившую его причину, причем во времени последняя предшествует первому. Рассмотрение этой причины как внешней относительно тела, изменяющего свое состояние, есть одна из характерных черт механистического миропонимания. Таким образом, в самой основе механики Ньютона заложен четко сформулированный на языке механики принцип причинности. В то же время эта аксиома Ньютона получается из принципа наименьшего действия, которому усиленно придавалось телеологическое истолкование и который действительно долго сохранял некоторый неприятный привкус «конечных причин».

Телеология должна быть отброшена уже потому, что принципы действия являются не минимальными, а вариационными принципами, согласно которым вариация некоторого интеграла равна нулю, или, иначе говоря, интеграл действия стационарен, т. е. может иметь место минимум, максимум или даже ни минимум и ни максимум. Когда выполняются условия минимума, условие стационарности

¹ H a m e l C., Die Axiome der Mechanik, Handbuch der Physik, т. V, Berlin, J. Springer, 1927, стр. 6—7.

также выполняется, но обратное не имеет места. Действительный минимум интеграла действия получается только в том случае, когда вторая вариация положительна и притом взят достаточно короткий участок пути.

В качестве наглядного примера того, что требование равенства нулю вариации некоторого выражения может дать как максимум, так и минимум, приведем определение геодезической линии на поверхности шара, которой может быть как дуга большого круга, непосредственно соединяющая какие-либо две точки траектории, так и дополнительная дуга большого круга, при этом первая — короче, а вторая — длиннее всех дуг, получающихся от пересечения сферы плоскостями, проходящими через две рассматриваемые точки траектории, но не проходящими через центр шара. Телеологическая же концепция требует только одного: максимума или минимума. Она рушится, как это заметили уже в XVIII в., если, как это имеет место на самом деле, речь идет об экстремуме.

Принципы, выраженные в форме вариации каких-либо интегралов и функций, формулируют существенные экстремальные свойства законов динамики, так как если задана система сил (уравнения движения) и начальные условия, то каждое последующее положение материальной точки в любой момент времени однозначно определено. Принцип Гамильтона дает уравнения движения механики и, следовательно, отнюдь не противоречит причинно-следственному подходу, заключенному в них. Но в нем движение рассматривается, в целом, интегрально, в то время как уравнения движения разбивают его на ряд последовательных элементов.

Вариационные принципы выражают дифференциальные уравнения физических явлений в виде одной компактной теоремы; в них мы имеем такой тип принципов, который охватывает законы значительной части физики. Законы различных областей физики выражаются несложными дифференциальными уравнениями, свойством которых является то, что они могут быть сформулированы в виде вариационного принципа¹. Всякий же вариационный принцип

¹ Вообще говоря, всякое линейное дифференциальное уравнение второго порядка может быть приведено к типу Штурма—Лиувилля, и, следовательно, сформулировано в виде вариационного принципа.

Уравнением Штурма—Лиувилля называется уравнение

$$P_y - \frac{1}{dx} (Ry') = \lambda y,]$$

где $P = P(x)$, $R = R(x)$, которое является уравнением Эйлера для квадратичного функционала

$$k(y) = \int_a^b [P(x) y^2 + R(x) y'^2] dx$$

при условии

$$\int_a^b y^2 dx = 1.$$

эквивалентен некоторой системе дифференциальных уравнений. Таким образом, если законы каких-либо физических явлений выражаются дифференциальными уравнениями, то, исходя из чисто математических соображений, не связанных с сущностью этих явлений, возможно их приведение к вариационной форме. Это важно прежде всего постольку, поскольку позволяет записать эти уравнения в форме, независимой от системы координат, а также и потому, что позволяет использовать вариационные принципы для отыскания таких уравнений.

В электродинамике одна и та же функция Лагранжа служит для вывода уравнений поля и заряженных тел, что математически отнюдь не является очевидным. Это обстоятельство связано с тем, что уравнения системы поле — тело могут быть написаны в гамильтоновой форме, которая далее оказывается необходимой для перехода к квантовой механике.

Таким образом, принцип Гамильтона, может быть, в несколько парадоксальной форме выражает существенное свойство, присущее динамической закономерности. А так как внутри механики принцип Гамильтона эквивалентен уравнениям движения, то он в той же степени связан или является конкретным определением динамической закономерности, в какой она выражается уравнениями движения. Следовательно, везде за пределами собственно механики, где имеет место каузальная связь такого типа, должен действовать и принцип Гамильтона.

С философской точки зрения существуют разные типы каузальной связи. Уже классическая физика, кроме динамической, оказалась вынужденной рассматривать и так называемую статистическую закономерность. Все различные типы каузальной связи имеют общим то, что они устанавливают какое-то соотношение между несколькими явлениями в пространстве и времени. Поскольку в них имеется общее, постольку формула, выражающая один из частных типов каузальной связи, в известном, ограниченном смысле может иметь место и для другого типа.

Статистическая закономерность (закономерность поведения ансамбля), хотя и является уже иным типом каузальной связи, чем динамическая, но в то же время является ближайшим к ней по своему характеру, поскольку в основе ее лежит наложение реальных движений огромного количества дискретных частиц, входящих в статистический ансамбль. То, что это иной тип каузальной связи, непосредственно видно уже из необходимости ввести понятие о распределении и вероятности. Этот тип в то же время близок к динамическому, так как, во-первых, возможность рассмотрения такого ансамбля основана на экспериментально подтвержденном представлении о механическом, однородном и независимом (на длине свободного пробега) движении каждой из частиц, входящих в ансамбль, и, во-вторых, описание поведения физических класси-

ческих ансамблей осуществляется в статистической механике гамильтоновыми уравнениями с помощью тех же по форме и существу функций, которые применяются в классической механике.

Принцип Гамильтона может быть истолкован как стремление средней разности кинетической и потенциальной энергии к минимуму¹ за время движения. Отсюда возникает возможность и продуктивность его применения в тех проблемах (например, в молекулярно-кинетической теории теплоты), в которых средние значения по совокупности энергий, или квадратов скоростей или по времени играют существенную роль.

Когда при переходе к синхронно-варьированным движениям² начальный и конечный моменты t_0 и t_1 не изменяются, интеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

в течение рассматриваемого движения отличается только на постоянный множитель $(t_1 - t_0)$ от среднего значения $\bar{L}$ функции Лагранжа; написав

$$L = T - U, \quad (65)$$

мы видим, что принцип Гамильтона в случае консервативных сил можно высказать также в другой форме: для естественного движения разность между средними значениями кинетической и потенциальной энергии принимает стационарное (именно, минимальное) значение по сравнению с синхронно-варьированными движениями с теми же начальной и конечной конфигурациями. С физической точки зрения это свойство стационарности (и минимума) содержится как частный случай в принципе распределения энергии, который имеет место в статистической механике и, в частности, в кинетической теории газов в том смысле, что естественное движение, если сравнивать это движение с другими, кинематически возможными и имеющими те же конфигурации для $t=t_0$ и $t=t_1$, определяется как движение, при котором среднее значение разности между двумя видами энергии — кинетической и потенциальной — имеет наименьшее значение. В явлениях, в которых участвует большое число элементов, так что оказываются полезными только средние значения, наблюдается аналогичная в некотором смысле даже более подчеркнутая тенденция в отношении распределения энергии между всеми различными степенями свободы, которыми обладает система.

¹ Это, конечно, нестрогое истолкование. Из того, что разность $E_{\text{кин}} - E_{\text{пот}}$ в естественном движении меньше, чем в варьированном, еще не следует, что она стремится к нулю.

² Терминология эта введена Маджи в его *Principii di Stereodinamica* 1903, Milano, т. 2.

Аналогичное замечание можно сделать относительно принципа наименьшего действия в форме Лагранжа. Если записать выражение

$$A = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt$$

в виде

$$A = 2(t_1 - t_0) \bar{T}, \quad (66)$$

то оно равно удвоенному произведению времени движения на среднюю величину живой силы.

Динамические законы, которые не ограничены областью одной только механики, являются строго детерминистическими и применимыми как к отдельной частице, так и к их ансамблю. Статистические законы дают вероятностную картину¹ процессов для ансамблей большого количества частиц (или — более общо — любых элементов) и теряют смысл при рассмотрении малого их числа. Динамические законы описывают обратимые процессы, статистические же законы имеют дело с необратимыми процессами.

Переход к новому типу каузальной связи, который условно можно было бы назвать «квантовым» и который характерен для квантовой (нерелятивистской и релятивистской) механики, где уже классические величины заменяются операторами, где вероятность состояния индивидуальной частицы и индивидуального акта взаимодействия имеет, как известно, совсем иной смысл, чем вероятность состояния ансамбля в классической статистической механике, приводит к тому, что положение и роль принципа Гамильтона оказывается в квантовой механике совершенно иной, чем в классической физике. Важная историческая роль принципа Гамильтона и оптико-механической аналогии в начальной стадии формирования волновой механики, объясняется не только тем, что существует реальная связь и предельный переход от механики атома к классической физике, но также и тем, что существуют общие черты в типах каузальной связи макро- и микрокосмоса. Но именно потому, что в квантовой механике физический смысл имеют амплитуды вероятностей, а не сами значения вероятностей, и что для энергии и времени так же, как для импульса и соответствующей координаты в квантовой механике имеют место перестановочные соотношения,

¹ Можно формально указать также на некоторую возможную связь действия с вероятностью (А. Эддингтон, Пространство, время и тяготение, стр. 177). Их можно связать, так как обе эти величины, являясь инвариантными, могут (при надлежащем выборе единиц) выражаться целыми и дробными отвлеченными числами. Тогда можно (исходя из различных условий суммирования действий и вероятностей) сопоставить действию логарифм вероятности, т. е. $S \sim -\ln W$, и пытаться рассматривать принцип наименьшего действия как принцип наибольшей вероятности. Такая точка зрения представляется некоторой натяжкой.

а сами они являются уже операторами, классический интеграл Гамильтона теряет в ней тот смысл, который он имел в физике обратимых макроскопических процессов.

Вопрос о характере и типе причинности имеет особое значение также в попытках построения теорий квантованных полей.

В этом отношении интересна статья Гейзенберга «Квантовая теория полей и элементарных частиц»¹, представляющая в основном обзор цикла его работ, выполненных им по этой проблеме в течение 1953—1957 гг. Анализ этой статьи выходит за пределы нашей работы. Мы остановимся здесь только на нескольких моментах общего характера, затронутых в ней.

Прежде всего для постановки задачи Гейзенбергом характерно следующее. Им рассматривается «... специальная *модель* (курсив наш — Л. П.) теории элементарных частиц...», автор полагает, что эта модель действительно дает описание элементарных частиц и их взаимодействий...»².

Далее Гейзенберг отчетливо формулирует основную цель теории: «любая полевая теория элементарных частиц или материи должна начинаться с предложения какого-либо решения центральной математической задачи: как совместить квантование с определенной — большей или меньшей — степенью релятивистской причинности»³.

Наконец, на вопрос, чем же руководствоваться в поисках полевых уравнений элементарных частиц, Гейзенберг дает ответ, прямо восходящий к знаменитому правилу (см. стр. 18) Ньютона: «кроме правил отбора и требований инвариантности, единственным руководящим принципом может служить простота уравнений»⁴.

Заметим, что теория Гейзенберга, еще очень далекая от сколь угодно завершенной формы, является вариантом нелинейной, унитарной спинорной теории материи.

8. Метод аналогий в развитии физики

В процессе развития физики развиваются и методы физического исследования. Именно так и обстоит дело с тем методом, который тесно связан с вариационными принципами — методом аналогий. Различные виды физической аналогии возникали исторически в связи с требованиями, выдвигаемыми исследованием тех или иных проблем на определенных стадиях развития физики. Возникшие ранее конкретные формы метода аналогий отнюдь не уходили при этом в глубь истории, а продолжали применяться, обогащаясь сочетанием с

¹ Heisenberg W., Rev. Mod. Phys., v. 29, 1957, стр. 269; сб. Нелинейная квантовая теория поля, ИЛ, М., 1959, стр. 221.

² Там же.

³ Там же, стр. 222.

⁴ Там же, стр. 225.

новыми формами физической аналогии, хотя и не играли уже доминирующей роли.

Нашему употреблению термина «аналогия» ближе всего следующее, конечно, не претендующее на логическую строгость определение смысла аналогии: «Две системы аналогичны, если они согласуются в ясно определенных отношениях соответствующих частей»¹.

Допуская известную схематизацию, можно сказать, что в течение XVI—XVIII вв. преобладали аналогии по форме физических явлений. Для этого типа аналогии характерны две переплетающиеся формы. С одной стороны это — качественная аналогия, рассматривающая внешнее сходство свойств, с другой стороны, аналогия в параметрах и величинах, характеризующих различные совокупности физических явлений. Со второй половины XVIII в. и в течение всего XIX в. развивается и начинает играть все более важную, а затем и главенствующую роль аналогия по математической форме выражения законов физических процессов, записанных с помощью функций². На этой стадии развития в методе аналогий широко используются вариационные принципы механики. В построении новых лагранжианов для электромагнитного поля, для которого были уже известны уравнения, приводящие к результатам, совпадающим с экспериментом, кроме чисто формального объединения теории, намечалась новая возможная форма физической аналогии. В последующем развитии в первой четверти XX в. физическая аналогия по форме выражения физических законов расширилась и углубилась, так как кроме соотношений, выраженных функциями, она охватила законы, выражаемые с помощью функционалов и операторов.

В. И. Ленин отмечает, что «единство природы обнаруживается в „поразительной аналогичности“ дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений»³.

Наконец, в середине XX в. в процессе поисков квантовой электродинамики и теории квантованных полей возникла новая форма аналогии — аналогия по структуре построения теорий различных облас-

¹ Пойа Д., Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, М., 1957, стр. 33. Ср. прекрасное определение Н. Г. Четаева: существо аналогии между двумя явлениями состоит в совпадении их групп преобразования (ПММ, т. IX, 1948, стр. 139).

² Так, например, закон Кирхгофа при составлении электрических уравнений играет ту же роль, что и принцип Д'Аламбера при составлении уравнений механики и акустики. В силу закона Кирхгофа алгебраическая сумма электродвижущих сил в замкнутой цепи равна нулю. Дифференциальные уравнения электрических цепей с R , L , C могут быть составлены с помощью закона Кирхгофа. Дифференциальные уравнения для механических систем могут быть составлены при помощи принципа Д'Аламбера, согласно которому алгебраическая сумма приложенных к телу сил равна нулю. Многочисленные аналогии такого типа рассмотрены в книге: Олсон Г., Динамические аналогии, ИЛ, М., 1948.

³ Ленин В. И., Сочинения, т. 14, 4-ое изд., 1947, стр. 276.

тей физических явлений. Так как в этом случае уравнения соответствующих полей еще неизвестны, то одной из возможностей нахождения их оказывается подбор лагранжианов и гамильтонианов, отправляясь от очень общих требований современной физической теории. К таким требованиям, ограничивающим произвол в выборе лагранжиана для того или иного исследуемого поля, относятся условия инвариантности, например, лоренц-инвариантности, калибровочной, инверсной и т. п., линейности или нелинейности уравнений поля и движения и т. д. Построенные таким способом, исходя из вариационного принципа, теории по своей структуре являются аналогами соответствующих классических и квантовых теорий¹. Это позволяет выяснить и рассмотреть ряд особенностей этих теорий для выяснения их подлинного значения и физического смысла. В современных работах по теории квантованных полей такого рода аналогия нашла широкое применение.

Таким образом, развитие и усложнение аналогии как метода физического исследования было обусловлено развитием физики, переходом ее от одних задач исследования макрокосмоса к другим, от макрокосмоса к микрокосмосу, от раздельного изучения дискретного и континуума к их внутреннему синтезу. Возникавшие в этом процессе формы физической аналогии определялись в конечном счете предметом исследования и становились одним из элементов научного познания.

Подытожим теперь изложенные соображения, которые на конкретном материале рассматриваются в различных главах этой книги.

Итак, исторически развились и в настоящее время применяются, воздействуя друг на друга, следующие виды физической аналогии :

1. аналогия по формам проявления физических процессов,
2. аналогия по математической форме выражения законов физических процессов с помощью функций,
3. аналогия по математической форме выражения законов физических процессов с помощью различного рода функционалов, операторов и т. п.,
4. аналогия по структуре построения теорий различных областей физических процессов.

Приведем пример, в некоторой степени иллюстрирующий сказанное.

Возможность выразить уравнения движения в лапидарной и инвариантной форме, аналогичной форме принципа Гамильтона, имеет место во многих отделах физической науки. Если условно называть основные уравнения электродинамики в форме Максвелла или уравнения квантовой механики в форме Шредингера «уравнениями движения», то для них, также как для уравнений движения

¹ Ср. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957.

Ньютона, можно сформулировать соответствующие вариационные принципы. Хотя понимание электродинамики или квантовой механики отнюдь еще не обогащается таким образом и с первого взгляда дело сводится к чисто формальной операции, однако в действительности здесь открываются новые возможности познания того или иного круга физических явлений. В самом деле, если изложить математическую теорию какой-либо области частично изученных физических явлений, положив в основу соответствующий вариационный принцип, то это изложение по своей внутренней структуре и форме будет аналогично подобным же изложениям теорий других физических областей. Представим себе, что в одной из этих теорий эксперимент дал прямые или косвенные указания на существенную необходимость в той или иной степени изменить физическое содержание этой теории. Тогда указанная аналогия во внутренней структуре построения теорий с помощью вариационных принципов может ориентировать ученого в отношении того, как надо произвести изменения в физических теориях других отделов физической науки. Как пример, можно указать на проблему электромагнитного излучения элементарных частиц. После того, как в начале XX в. установили их квантовое строение, было разработано квантование для элементарных частиц, поведение которых описывалось классической аналитической механикой. Если изложить эту теорию, основываясь на принципе Гамильтона, а при построении теории электромагнитного поля исходить из лагранжиана и вариационного принципа, то методы, разработанные для квантования элементарных частиц, можно будет использовать для анализа проблем квантовой электродинамики и квантовой теории полей и элементарных частиц.

Подводя итоги, можно сказать, что вариационные принципы механики не только выражают в простой инвариантной форме уравнения движения и уравнения многих полей, но и заключают в себе синтез дискретного и континуального аспектов движения и являются выражением обобщенного принципа причинности в физике.

ГЛАВА V

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ И ТЕОРИЯ ТЕПЛОТЫ

1. Вариационные принципы механики и второе начало термодинамики в работах Клаузиуса

Развитие классической термодинамики и молекулярно-кинетической теории тепловых явлений выдвинуло перед представителями механистической физики задачу свести и этот новый круг проблем к механике. В первую очередь речь шла о втором начале термодинамики, так как первое начало внешне без больших затруднений укладывалось в схему основных понятий механики. Второе же начало с характерной для него и глубоко чуждой классической механике идеей необратимости вносило новый элемент в физическую картину мира. Оно явилось тем пробным камнем для механицизма в его прямолинейном варианте сведения всех закономерностей к комплексу чисто механических понятий, который привел к кризису механистического мировоззрения.

Первые попытки вывести второе начало из механических принципов были сделаны Клаузиусом, Больцманом и Чили в 60—70-х годах XIX в. Наиболее последовательно механистична позиция Чили, который думал, что он вывел второе начало прямо из принципа Гамильтона, гораздо тоньше концепции Больцмана и Клаузиуса. Они видели, что для решения этой задачи надо внести в принцип Гамильтона существенное изменение, которое расширит сам принцип, придав ему, однако, различный смысл внутри механики и вне ее.

Общими чертами всех так называемых «доказательств» второго начала термодинамики, основанных на аналитической механике (и в первую очередь на механике Гамильтона—Якоби), являются:

1. предположение, что силы имеют потенциал, и именно, рассмотрение центральных сил, т. е. частного случая потенциальных сил;

2. произвольное введение диссипативных, не имеющих потенциала сил в том случае, когда равенство $\oint \frac{dQ}{T} = 0$, полученное для обратимых замкнутых процессов, надо обобщить на процессы необратимые и написать неравенство $\oint \frac{dQ}{T} > 0$;

3. допущение, что координаты и скорости всех частиц являются определенными функциями времени в течение одного стационарного состояния, но с изменением состояния форма зависимости их от времени изменяется. (Как отметил В. А. Михельсон¹, это обстоятельство вполне соответствует идее вариационного исчисления, почему здесь и применяется варьирование, т. е. сравнение двух бесконечно мало отличающихся движений);

4. использование средних значений величин: дело в том, что сопоставление механических величин — координат, скоростей, истинных кинетических энергий движения в данный момент и т. д. с величинами термодинамическими — объемом, давлением, температурой и т. д. возможно только с помощью средних величин, ибо только они доступны макроскопическому эксперименту, сопоставимому с макроскопической феноменологической термодинамикой.

Среди предлагавшихся доказательств надо отметить особо те доказательства, которые начинаются с рассмотрения одной материальной точки. В этом случае приходится выдвигать искусственные допущения о характере движения точки, как например, замкнутость траекторий у Клаузиуса, или говорить о дисгрегации² одной точки (Больцман), и т. п. Естественно, что попытки таким путем определить состояние системы, поведение которой, по существу, определяется законами статистического ансамбля, оказались неудачными.

Смысл рассуждений Клаузиуса (1822—1888) может быть пояснен следующим образом. В принципе Гамильтона для консервативных систем надо считать, что потенциал имеет смысл для всех состояний системы, зависящих от сил взаимодействия ее точек. Однако для сил внешних, т. е. действующих между точками изучаемой системы и точками, не принадлежащими к ней, понятие потенциала $U(x_i, y_i, z_i)$ неприменимо, так как силы, действующие на систему, изменяются не только от изменения координат точек системы, но и от движения внешних тел. Поэтому Клаузиус предлагает считать потенциал U зависящим от ряда параметров c_i , которые неизменны при одном и том же термическом состоянии и варьируются при изменении состояния тела. Сам Клаузиус отметил, что это обобщение доставило ему больше всего труда.

В 1870 г. Клаузиус доказал, что для системы, состоящей из материальных точек, имеет место следующий закон: средняя живая сила системы равна ее вириалу³. Этот закон

$$\sum \frac{m}{2} \bar{v}_2 = -\frac{1}{2} \sum X_x + Y_y + Z_z,$$

¹ Михельсон В. А., Второй закон термодинамики с точки зрения аналитической механики и теории вероятностей, Собр. соч., т. 1, М., 1930, стр. 9.

² См. ниже, стр. 373.

³ Clausius R., Über einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz, Pogg. Ann., т. 141, 1870, стр. 124.

где $X_x, \dots$ — компоненты сил по соответствующим координатам, а чертой сверху обозначены средние значения, находится в полном согласии с установленным ранее Клаузиусом положением, что механическая работа, которую производит теплота при каком-либо



Р. КЛАУЗИУС (1822—1888)

изменении степени упорядоченности системы, связана с абсолютной температурой, при которой это изменение происходит, соотношением

$$dR = \frac{T}{A} dZ, \quad (1)$$

где dR — бесконечно малая работа, T — абсолютная температура тела, A — постоянная (тепловой эквивалент работы), Z — величина, определяющая тепловое состояние тела без того, чтобы нужно было знать путь, которым система в это состояние пришла. Эту величину Клаузиус назвал дисгрегацией тела.

Так как $T = cQ$, где Q — количество теплоты, а c — постоянная, то

$$dR = \frac{cQ}{A} dZ.$$

Величина $\frac{Q}{A}$ представляет количество теплоты, измеренное в механических единицах, т. е. «живую силу того движения, которое мы называем теплотой»¹. Обозначив $\frac{Q}{A} = h$, получим

$$dR = chdZ. \quad (2)$$

Клаузиус ставит своей задачей отыскать для этого соотношения объяснение, основанное на принципах механики. С этой целью он пользуется вариационными принципами механики.

Обозначим i — время цикла первоначального движения, t — переменное время, которое требуется движущейся точке, чтобы из начального положения достичь другого положения; тогда можно положить

$$t = i\varphi, \quad (3)$$

где φ — некоторая угловая переменная.

Для варьированного движения время цикла обозначим i' и соответственно введем t' , тогда

$$t' = i'\varphi. \quad (4)$$

Если φ одинаково в обоих выражениях, то t и t' — соответственные времена. Когда таким путем определены соответственные времена, тогда определяются и соответственные точки обеих траекторий. Введенную таким образом величину φ Клаузиус называет фазой движения. За один цикл φ изменяется на единицу, а в угловой мере на 2π .

Имеем $t - t' = (i - i')\varphi$ или $\delta t = \delta i \cdot \varphi$. Если же мы хотим дифференцировать равенство $t = i\varphi$, то i надо, напротив, считать постоянным, так как для определенного движения время цикла есть заданная величина, т. е.

$$dt = i d\varphi.$$

Найдем теперь производную $\frac{dx}{dt} \delta x$ по φ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dx}{dt} \delta x \right) &= \frac{d^2x}{dt d\varphi} \delta x + \frac{dx}{dt} \frac{d \delta x}{d\varphi} = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dt}{d\varphi} \delta x + \frac{dx}{dt} \delta \left(\frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\varphi} \right) = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dt}{d\varphi} \delta x + \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\varphi} \delta \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \delta \frac{dt}{d\varphi} = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dt}{d\varphi} \delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\varphi} \right) \delta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \delta \frac{dt}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

¹ Clausius R., Über einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. Pogg. Ann., т. 141, 1870.

А так как $\frac{dt}{d\varphi} = i$, то

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dx}{dt} \delta x \right) = i \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{1}{2} i \delta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \delta i. \quad (6)$$

Помножим это выражение на $d\varphi$ и проинтегрируем в пределах полного цикла, т. е. от $\varphi = 0$ до $\varphi = 1$. Слева получим

$$\int_0^1 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dx}{dt} \delta x \right) d\varphi = \left. \frac{dx}{dt} \delta x \right|_0^1 = 0,$$

так как начальные и конечные значения полного замкнутого цикла равны между собой.

Так как при интегрировании по φ величины i и δi должны рассматриваться как постоянные, то

$$\int_0^1 x d\varphi = \frac{1}{i} \int_0^1 x dt.$$

Выражение, стоящее справа, есть среднее значение x за время от нуля до i , т. е. за полное время цикла

$$\int_0^1 x d\varphi = \bar{x}.$$

Так как, далее, среднее значение некоторой вариации равно вариации среднего значения, то

$$\overline{\delta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} = \delta \overline{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2}.$$

Поэтому уравнение (6) запишется так

$$0 = i \overline{\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x} + \frac{1}{2} i \delta \overline{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} + \overline{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} \delta i \quad (7)$$

или, преобразуя

$$-\overline{\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x} = \frac{1}{2} \delta \overline{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} + \overline{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2} \delta \ln i \quad (7a)$$

и аналогично для координат y и z .

Сложив три уравнения для x , y , z и приняв во внимание, что

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = v^2,$$

где v — скорость точки, получим

$$-\overline{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right)} = \frac{1}{2} \delta \overline{v^2} + \overline{v^2} \delta \ln i. \quad (8)$$

Умножив это уравнение на массу m материальной точки и заменив слагаемые левой части компонентами действующей силы по координатным осям X, Y, Z , получим

$$-(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \ln i. \quad (9)$$

Допустив, что силы могут быть представлены как взятые со знаком минус производные некоторой функции U по координатам, запишем это выражение так:

$$\delta \bar{U} = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \ln i. \quad (9a)$$

Функцию U Клаузиус назвал эргалом. При переходе от исходного к варьированному движению эргал изменяется на бесконечно малую величину. Клаузиус вводит важное допущение, что эргал исходного движения U в варьированном движении может быть представлен суммой $U_1 + \mu V$, где V — другая произвольная функция координат, а μ — очень малый постоянный множитель¹.

Что касается дополнительного члена μV , то Клаузиус предполагает, что это увеличение эргала происходит не скачком в какой-либо момент времени, а постоянно и равномерно в течение всего цикла движения. Поэтому за некоторый элемент времени dt множитель μ возрастает на $\frac{\mu dt}{t}$ или, что то же самое, за время прохождения элемента фазы $d\varphi$ он возрастает на $\mu d\varphi$. Вариация работы для некоторой фазы φ_1 будет $\delta U + \mu(V_1 - \bar{V})$, где V_1 — значение функции V для фазы φ_1 ; $\bar{V}$ — среднее значение V за весь процесс движения. Отсюда для полного изменения работы в стационарном движении:

$$\delta R = \int_0^1 \delta U_1 d\varphi_1 + \mu \int_0^1 (V_1 - \bar{V}) d\varphi_1$$

или

$$\delta R = \delta \int_0^1 U_1 d\varphi_1 + \mu \int_0^1 (V_1 - \bar{V}) d\varphi_1;$$

и так как

$$\int_0^1 U_1 d\varphi_1 = \bar{U}, \quad \text{а} \quad \int_0^1 V_1 d\varphi = V \quad \text{и} \quad \int_0^1 V d\varphi = \bar{V},$$

то

$$\delta R = \delta \bar{U}. \quad (10)$$

¹ Заметим, что Клаузиус употребляет термин «бесконечно малый».

Этот результат имеет место только при специальном предположении, что эргал в течение всего движения изменяется равномерно. Таким образом, в этом случае можно записать

$$\delta R = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \ln i, \quad (11)$$

или, обозначив $\frac{m}{2} \bar{v}^2 = h$,

$$\delta R = \delta h + 2 h \delta \ln i. \quad (11a)$$

Придадим этому выражению несколько иной вид :

$$\begin{aligned} \delta R &= h \left(\frac{\delta h}{h} + 2 \delta \ln i \right) = h (\delta \ln h + 2 \delta \ln i) = \\ &= h \delta (\ln h + 2 \ln i) = h \delta \ln (hi^2), \end{aligned} \quad (12)$$

что вполне согласуется с уравнением теории теплоты (2), причем $\ln (hi^2)$ представляет величину cZ . Это значит, что для движения отдельной точки дисгрегация пропорциональна величине $\ln (hi^2)$.

Преобразуем $\ln (hi^2)$ для того, чтобы выявить геометрическое значение этой величины :

$$\begin{aligned} \ln (hi^2) &= \ln \left(\frac{m}{2} \bar{v}^2 i^2 \right) = \ln (\bar{v}^2 i^2) + \ln \frac{m}{2} = \\ &= 2 \ln (i \sqrt{\bar{v}^2}) + \ln \frac{m}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае, если на точку не действуют никакие силы и она движется между упругими стенками, $i \sqrt{\bar{v}^2}$ перейдет в iv — длину траектории. Таким образом, при движении с постоянной скоростью дисгрегация с точностью до аддитивной постоянной пропорциональна длине пути. В случае же переменной скорости дело обстоит гораздо сложнее.

Имеем далее закон сохранения энергии

$$\delta \bar{U} + \frac{m}{2} \delta (\bar{v}^2) = 0, \quad (14)$$

при переходе от одной к другой бесконечно близкой траектории. Введем в (9a) вместо $\delta \bar{U}$ величину $-\frac{m}{2} \delta \bar{v}^2$, тогда получим

$$-\frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \ln i$$

или

$$m \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \frac{\delta i}{i} = 0,$$

$$i \delta \bar{v}^2 + \bar{v}^2 \delta i = 0$$

и окончательно

$$\left. \begin{aligned} \delta(\bar{v}^2 i) &= 0, \\ \delta \int_0^i \bar{v}^2 dt &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

т. е. уравнение, имеющее форму принципа наименьшего действия. Однако здесь скрыто существенное различие, так как при выводе этого уравнения предположено, что исходное и варьированное движения происходят по замкнутым траекториям, которые не совпадают ни в одной точке, в то время как в принципе наименьшего действия предполагается, что оба движения происходят из одной общей начальной до другой общей конечной точки. Тот факт, что последнее выражение имеет место в обоих случаях, объясняется тем, что в первом i есть время цикла, а в другом — время, которое требуется точке, чтобы из заданного начального перейти в данное конечное положение.

В случае системы точек уравнение (11) принимает вид

$$\delta R = \sum \frac{m}{2} \delta(\bar{v}^2) + \sum m \bar{v}^2 \delta \ln i \quad (16)$$

или рассматривая, например, компоненту движения по оси x :

$$- \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x = \sum \frac{m}{2} \delta \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \sum m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \delta \ln i. \quad (17)$$

При дальнейшем углублении анализа мы сталкиваемся с той трудностью, что для различных групп точек как v , так и i (время цикла) могут быть различны. Поэтому «для движения, которое мы называем теплотой, мы хотим сделать предположение, что равновесие осуществляется всегда тем способом, что между живыми силами различных точек устанавливается постоянное отношение, которое сохраняется при каждом происходящем изменении общей живой силы»¹. Тогда среднюю живую силу каждой точки можно представить в виде mcT , где m — масса точки, c — определенная для каждой точки постоянная, T — переменная величина, одинаковая для всех точек.

Подставив это выражение вместо $\frac{m}{2} \bar{v}^2$, получим

$$\begin{aligned} \delta R &= \sum mc \delta T + \sum 2mc T \delta \ln i = \\ &= \sum mc \delta T + T \sum 2mc \delta \ln i = T \left(\sum mc \frac{\delta T}{T} + \sum 2mc \delta \ln i \right) = \\ &= T (\sum mc \delta \ln T + \sum 2mc \delta \ln i) = T \delta \sum mc \ln (Ti^2). \end{aligned} \quad (18)$$

¹ Clausius R., Über die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien, Pogg. Ann., 142, 1871, стр. 458.

Полученное уравнение, если понимать под T абсолютную температуру, совпадет с уравнением (1), и дисгрегация выражается через

$$A \sum mc \ln(Ti^3).$$

Покажем, что это уравнение хорошо согласуется и с другим уравнением теории теплоты. Пусть δq — живая сила, полученная системой, тогда

$$\begin{aligned} \delta q &= \delta h + \delta R = \delta \sum mc T + \delta R = \sum mc \delta T + \delta R = \\ &= \sum 2 mc \delta T + T \sum 2 mc \delta \ln i = T \delta \sum 2 mc \ln(Ti). \end{aligned} \quad (19)$$

Это уравнение при соответствующем определении величин совпадает с найденным Клаузиусом уравнением для второго начала.

Умножим уравнение (16) на тепловой эквивалент работы A , обозначим количество теплоты $A\delta q$, соответствующее полученной живой силе, через δQ и введем величину S , определенную так:

$$S = A \sum 2 mc \ln(Ti), \quad (20)$$

тогда

$$\delta q = T \delta S. \quad (21)$$

Здесь S есть та самая величина, которую Клаузиус назвал энтропией тела. Заменив δ на d и проинтегрировав это уравнение для кругового процесса, получим

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (22)$$

Это значит, что при введенных допущениях второе начало механической теории теплоты сводится к общим механическим принципам¹.

В первой работе Клаузиуса не везде достигнута необходимая ясность. Так параметры c_i , изменения которых обуславливают варьирование потенциала, не введены еще явно, не отмечено, что через μV обозначены, собственно говоря, члены второго порядка в выражении работы, недостаточно ясно доказано право распространить уравнение, полученное для строго периодических изменений замкнутых путей, на непериодические изменения и незамкнутые пути. В этом первом доказательстве Клаузиус выводит уравнение сначала для одной точки и только затем для системы, но первый из этих выводов служил лишь для пояснения второго и не имел самостоятельного интереса.

Одновременно с Клаузиусом выступил венгерский ученый К. Чили (1838—1924).

В своей работе «Принцип Гамильтона и второе начало механической теории тепла»¹ Чили исходил из историко-научных предпосылок. Он пишет: «История развития новой физики решительно говорит о том, что только теории, которые кладут в основу механические принципы, в состоянии дать действительное объяснение явлений»².

Для направления творчества Чили в интересующей нас области очень характерна одна работа, в рассмотрение которой мы не входим. Называется она: «Второе начало механической теории теплоты, выведенное из первого»³. В этой работе Чили ошибочно считал, что ему удалось вывести второе начало из закона сохранения энергии без всяких дополнительных гипотез.

Чили поставил перед собой задачу доказать полное тождество принципа Гамильтона и второго начала термодинамики. Для этого он делает ряд произвольных допущений, в первую очередь допущение о применимости принципа Гамильтона к тепловым явлениям, упускает из виду внешнюю работу тела — $\sum \frac{\partial U}{\partial c} \delta c$ и поэтому считает количество сообщенной телу теплоты dQ равным дифференциалу энергии тела dE , что представляет грубую ошибку (так, например, при изотермическом процессе $dE = 0$, а $dQ = I dR_{\text{вн}} \neq 0$). Получение Чили выражения для энергии, близкого к выражению Клаузиуса, объясняется взаимным исключением двух противоположенных ошибок. В своей второй работе Чили обнаружил непонимание не только смысла исследований Клаузиуса, но даже его обозначений.

Указав на то, что первый закон механической теории тепла якобы нашел обоснование в механике, Чили утверждает, что именно в этом заключена причина его широкого применения за пределами теории теплоты и собственно механики. Такое обоснование для второго начала еще не существует, что, по его мнению, мешает широкому применению этого начала. Поэтому он говорит: «Вопрос состоит в том, какое уравнение динамики приводит как к своему специальному случаю к второму началу теории теплоты, или наоборот, к какому уравнению динамики можно свести второе начало теории теплоты»⁴.

По мнению Чили, ему удалось свести второе начало теории теплоты к общему принципу динамики — принципу Гамильтона, т. е. показать, что это начало заключено в нем.

¹ Szily C., Das Hamilton'sche Prinzip und der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, Annalen der Physik und Chemie, herausg. J. C. Poggen-dorf, 145, 1872, Leipzig, J. Barth, стр. 295.

² Там же, стр. 295.

³ Szily C., Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, abgeleitet aus dem ersten, Pogg. Ann., Ergänzungsband, VII, 1876, Leipzig, J. Barth., стр. 154—168.

⁴ Szily C., Das Hamilton'sche Prinzip..., стр. 296.

Клаузиус рассмотрел этот результат Чили в специальной работе¹. Он прежде всего отмечает, что для того, чтобы принцип Гамильтона применялся правильно, необходимо правильное понимание вариации, которая заключена в нем, т. е. выяснение ее характера.

Чили, исходя из выражения $2\delta \int_0^t T dt = i\delta E$, приходит очень простым способом к второму началу теории теплоты, однако в его выводе скрыты существенные непреодоленные и неразрешенные трудности. Клаузиус указывает, что Чили ошибается, когда утверждает, что уравнение Клаузиуса заключено в уравнении Гамильтона. «Это невозможно, — пишет Клаузиус, — так как мое уравнение обладает более общей применимостью, чем гамильтоново»². В то время как в последнем необходимо, чтобы в варьированном движении эргал выражался через ту же функцию пространственных координат, как при первоначальном движении, уравнение Клаузиуса имеет место и тогда, когда представляющая эргал функция координат изменяется. В качестве простого примера можно взять случай, когда кроме координат в эту функцию входит величина, остающаяся постоянной во время движения. Тогда по Гамильтону требуется, чтобы она в варьированном движении имела то же значение, что и в первоначальном, в то время как уравнение Клаузиуса (16) допускает изменение значения этой величины.

Чили ответил на замечание Клаузиуса статьей «Динамический принцип Гамильтона в термодинамике»³, в которой он повторил ошибки, уже указанные Клаузиусом. Статья Чили представляет интерес только с той точки зрения, что она показывает, насколько стремление вывести все физические законы из начал динамики ослепляло отдельных ученых.

Клаузиус еще ранее⁴ показал, что когда эргал претерпевает изменения, независимые от изменения координат, то принцип Гамильтона неприменим.

Рассмотрим случай, когда траектория или замкнута, или движение происходит между двумя точками, из которых конечная либо тождественна с исходной, либо выполняется условие, что

$$\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z$$

¹ Clausius R., Über den Zusammenhang des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie mit dem Hamilton'schen Prinzip, Pogg. Ann., т. 146, 1872, Leipzig, J. Barth, стр. 585—591.

² Там же, стр. 587.

³ Szily C., Das dynamische Prinzip von Hamilton in der Thermodynamik, Annalen d. Physik und Chemie, herausg. J. C. Poggendorf, т. 29, Leipzig, 1873.

⁴ Clausius R., Über die Anwendung einer von mir aufgestellten mechanischen Gleichung auf die Bewegung eines materiellen Punktes um ein festes Anziehungszentrum oder zweier materieller Punkte um einander, Nachrichten der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, 1871, стр. 248 und Math. Ann. Glebsch u. Neumann, т. 4, стр. 232.

имеет одно и то же значение в начальной и конечной точках движения.

Уравнение Гамильтона в этом случае запишется так :

$$\delta(m\bar{v}^2 i) = i \delta E. \quad (23)$$

Уравнение же Клаузиуса запишется так :

$$\delta \bar{U} = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \ln i, \quad (24)$$

так как здесь U выражает эргал лишь для исходного движения. В более поздней работе Клаузиус подчеркнул это отчетливо, записав свое уравнение в следующей форме :

$$\frac{\partial U}{\partial x} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \delta z = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \ln i. \quad (25)$$

Если теперь предположить, что функция U , кроме координат, содержит еще величину c , которая для каждого данного движения постоянна, но изменяется при переходе от одного движения к другому, то в этом случае наше уравнение примет вид

$$\delta \bar{U} - \frac{\partial \bar{U}}{\partial c} \delta c = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \ln i. \quad (26)$$

Теперь можно сравнить все уравнения между собой. В принципе наименьшего действия эргал есть всегда неизменная функция координат, а энергия также имеет постоянное значение. В уравнении Гамильтона (23) эргал также предполагается неизменной функцией, но энергия может изменяться. В уравнении Клаузиуса может изменяться как энергия, так и функция, представляющая эргал.

Это обобщение необходимо, чтобы охватить те обычные в теории теплоты случаи, когда изменения состояния тела вызывают изменение действующих сил, независимое от пространственных изменений, в силу чего эргал в его обычной для механики форме здесь неприменим.

Есть и еще одно затруднение, возникающее при непосредственном применении уравнения Гамильтона (23) в учении о теплоте. Это уравнение предполагает, что все входящие в рассматриваемую систему точки совершают движение в общее время i , которое при изменении движения изменяется одинаково для всех точек. Если теперь считать тело системой очень большого числа движущихся точек и сделать самое простое предположение, что они движутся по замкнутым траекториям, то изложенное условие для i невыполнимо. Трудности еще более возрастут, если вместо замкнутых траекторий движения точек допустить, что они совершают совершенно неупорядоченное движение.

Отметив, что еще в 1870 г. он вывел для материальной точки описывающей замкнутую орбиту, уравнение, находящееся в тесной связи с принципом наименьшего действия и принципом Гамильтона, но существенно отличное от них, Клаузиус ставит в 1873 г. задачу обобщения этого важного, по его мнению, результата¹. Исходное уравнение будет

$$\delta \bar{U} - \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c_i} \delta c_i = \frac{m}{2} \delta \bar{v}^2 + m \bar{v}^2 \delta \ln i, \quad (27)$$

где c_i — постоянные для каждого отдельного движения, но переменные при переходе от одного движения к другому. Для того, чтобы обобщить это уравнение, рассмотрим вместо одной точки систему их, причем время цикла для всех точек может быть одинаковое и различное, а траектория может быть как замкнутая, так и незамкнутая периодическая. В самом общем случае могут периодически изменяться не сами координаты, а некоторые другие величины, функциями которых являются координаты.

Введем обобщенные координаты q , так что

$$x = f(q_i),$$

тогда

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i; \quad 2 E_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i.$$

Обозначим

$$p_i = \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (28)$$

тогда

$$2 E_{\text{кин}} = \sum p_i \dot{q}_i. \quad (29)$$

Для принципа наименьшего действия и принципа Гамильтона имеем соответственно :

$$\delta \int_0^t 2 E_{\text{кин}} dt = \sum (p \delta q - h \delta k) + t \delta E, \quad (30)$$

$$\delta \int_0^t (E_{\text{кин}} - U) dt = \sum (p \delta q - h \delta k) - E \delta t, \quad (31)$$

где k — начальные значения координат q , а h — то же для p .

Хотя при рассмотрении задач классической механики принцип Гамильтона имеет большое значение, однако, как показывает

¹ Clausius R., Über einen neuen mechanischen Satz in Bezug auf stationäre Bewegungen, Pogg. Ann., 158, 1873, Leipzig, J., Barth.

Клаузиус, для рассматриваемой им задачи принцип Гамильтона менее удобен, чем принцип наименьшего действия.

Во-первых, в принцип Гамильтона входит эргал U , который предполагается для действительного и варьированного движения одной и той же функцией координат. Однако, как мы отметили, в теории теплоты обычным является тот случай, когда изменение эргала под действием внешних сил, приложенных к телу, не зависит от изменения координат тела, а связано с изменением молекулярных движений. Такой переход от одного движения к другому не описывается с помощью принципа Гамильтона.

Во-вторых, для стационарных движений имеем следующее. В принцип Гамильтона входят вариации δq_i , значения которых определены так: δq_i — есть разность между значениями, которые имеет q_i в первоначальном движении в некоторый определенный момент времени и соответственными значениями q_i для варьированного движения. Каким условием определяются эти соответственные значения q_i ? Если мы переходим от первоначальных q_i (момент времени t) к значениям q_i для варьированного движения, то последние будут проходиться в момент времени $t + \delta t$, где вариация δt является неопределенной, но для всех q_i одинаковой величиной. Следовательно, приписав δt определенное значение, автоматически сделаем его общим для всей системы.

Рассмотрим простой случай. Пусть в первоначальном движении все точки описывают замкнутые траектории, а для варьированного движения все точки также описывают из немного измененного начального положения бесконечно близкие замкнутые кривые, но времени полного цикла для различных точек пусть изменяются по-разному. Так как δt — произвольно, то можно взять сначала $\delta t = 0$. Тогда, если точка имеет в первоначальном и варьированном движении различные времена цикла, то соответственные положения будут с течением времени все более удаляться друг от друга, т. е. вариации переменных, определяющих состояние системы, будут со временем расти. Если же не полагать $\delta t = 0$, то для одной точки можно выбрать время цикла так, чтобы изменения тех переменных, которые зависят только от положения этой точки, имели бы периодический характер. Для других переменных, зависящих от положений других точек, время цикла которых изменяется каким-либо иным образом, остается то затруднение, что с ростом времени получается всегда большая вариация. В силу изложенного принцип Гамильтона неудобен для целей, поставленных Клаузиусом.

Введя, как и в мемуаре 1871 г., приведенное выше выражение $\delta t = \varphi \cdot \delta i$, а для определения положения точки взяв величины q_i , которые не обязательно должны иметь закономерный период, определим для каждой из них интервалы времени i_i . Тогда фазы φ_i , принадлежащие различным величинам, определяются так:

$$t = i_1 \varphi_1 = i_2 \varphi_2 = \dots = i_n \varphi_n.$$

Обозначим вариации координат q_i , при которых φ остается неизменным, а соответственные интервалы времени изменяются, через

$$\delta_{\varphi i} q_i.$$

Поясним несколько способ варьирования Клаузиуса. Он считал, что общие принципы динамики неприменимы непосредственно к учению о теплоте, в частности, из-за употребляемого в этих принципах способа варьирования. Вместо того варьирования, которое применяется в динамике, Клаузиус предлагает считать в двух сравниваемых движениях соответственными такие положения точки и такие моменты времени, для которых некоторая варьируемая и особая для каждой точки функция времени (как мы видели, Клаузиус называет ее фазой) принимает одинаковые значения. Пусть эта функция $\varphi = \varphi(t)$, тогда $t = f(\varphi)$ в первоначальном движении и $t' = f(\varphi) + \varepsilon f_1(\varphi)$ в варьированном движении. Здесь ε — некоторая бесконечно малая величина, а $f_1(\varphi)$ — производная от $f(\varphi)$ по параметру, приращением которого является ε . Если в обоих выражениях φ имеет одно и то же значение, то t и t' являются соответственными значениями.

Однако такое усложнение вариации не оправдывает себя, хотя и не заключает в себе ничего недопустимого. Клаузиус ввел его для того, чтобы иметь возможность исключить превращение вариаций с течением времени из бесконечно малых в конечные, а также для того, чтобы средняя величина вариации равнялась вариации средней величины. Первое не достигается, так как в жидкостях и газах, где бесконечно малое изменение внешних параметров, определяющих индивидуальное состояние, может вызвать конечное изменение траектории частиц, никаким выбором фазы нельзя удовлетворить требованию, чтобы бесконечно малой вариации подвергался бесконечно малый участок кривой. Второе же не является необходимым условием при рассмотрении задачи.

Образуем для такой вариации выражение $\frac{p_i \delta_{\varphi i} q_i - h \delta k}{t}$. Если бы величины q_i изменялись периодически и i были бы длительностями периодов, то вариации $\delta_{\varphi i} q_i$ изменялись бы также периодически, и это выражение, имеющее время t в знаменателе, с возрастанием времени всегда бы приближалось к нулю. Однако Клаузиус не делает этого предположения, а ограничивается условием, чтобы среднее значение суммы

$$\sum \frac{p_i \delta_{\varphi i} q_i - h \delta k}{t}$$

было для больших значений t очень малым; это условие может быть выполнено как при периодических изменениях, так и при других стационарных изменениях.

На основе этих предварительных замечаний Клаузиус формулирует следующий закон: «Если вариации, при образовании которых величины, определенные уравнениями $t = i_1 \varphi_1 = i_2 \varphi_2 = \dots = i_n \varphi_n$, рассматриваются как постоянные, удовлетворяют условию, что сумма

$$\sum \frac{p \delta q_i - h \delta q}{t}$$

при возрастающем времени стремится к исчезающе малому среднему значению, то имеет место следующее уравнение:

$$\delta(\bar{U} - \bar{E}_{\text{кин}}) = \sum \bar{p} \bar{q} \delta \ln i + \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c} \delta c \gg 1. \quad (32)$$

Сравним это уравнение с принципами наименьшего действия и принципом Гамильтона. В то время как интеграл $\int_0^t 2E_{\text{кин}} dt$ рассматривается как функция переменных q_i их начальных значений k_i и энергии E , а интеграл $\int_0^t (E_{\text{кин}} - U) dt$ — как функция величин q_i , k_i , t , в уравнение Клаузиуса входит среднее значение $\bar{U} - \bar{E}_{\text{кин}}$ как функция интервалов времени i и величин $c_1, c_2, \dots$.

Каков же физический смысл параметров c , т. е. тех независимых переменных, в функции которых выражается дифференциал энтропии $\frac{dQ}{T}$. Очевидно, что одним из них является средняя кинетическая энергия $\bar{E}_{\text{кин}}$ теплового движения, так как она играет в уравнениях движения динамики ту же роль, что и температура в термодинамических уравнениях. Вторым параметром должен быть некоторый период времени, значение которого изменяется при переходе от одного стационарного движения к другому и который занимает в уравнениях динамики то положение, которое имеет объем (или другое переменное, определяющее вместе с температурой тепловое состояние тела) в уравнениях термодинамики.

Мюллер² подробно разобрал теорию Гамильтона и обобщил известное соотношение $V = S + tH$ на случай переменного и по форме потенциала, что, впрочем, не представляло большого труда. Второй закон термодинамики он получил с помощью соответствующего дифференциального выражения, предположив, что вариации на границах есть бесконечно малые высших порядков и допустив, что

$$- \sum \frac{\partial U}{\partial c} \delta c = \delta R_{\text{вн}},$$

¹ Clausius R., Über einen neuen mechanischen Satz in Bezug auf stationäre Bewegungen, Pogg. Ann., 158, 1873, Leipzig, J. Barth, стр. 119—120.

² Müller J. J., Über ein aus der Hamiltonschen Theorie der Bewegung hervorgehendes mechanisches Prinzip, Pogg. Ann., т. 152, 1875.

где $R_{\text{вн}}$ — внешняя работа. Однако ограничения, при которых возможны подобные допущения, им не сформулированы в явном виде.

Уравнение (32) Клаузиуса также может быть разложено на столько отдельных уравнений, сколько в правой его части имеется независимых переменных, однако это будут совершенно другие уравнения, чем получаемые из уравнения Гамильтона. Для доказательства этого имеем

$$\frac{d}{dt}(p \delta_i q) = p \delta_i \dot{q} + \dot{p} \delta_i q = \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial \dot{q}} \delta_i \dot{q} + \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial q} \delta_i q - \frac{\partial U}{\partial q} \delta_i q; \quad (33)$$

просуммировав по всем n переменным, получим

$$\frac{d}{dt} \sum p \delta_i q = \sum \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial \dot{q}} \delta_i \dot{q} + \sum \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial q} \delta_i q - \sum \frac{\partial U}{\partial q} \delta_i q. \quad (33a)$$

Так как

$$\delta_i E_{\text{кин}} = \sum \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial \dot{q}} \delta_i \dot{q} + \sum \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial q} \delta_i q,$$

$$\delta_i U = \sum \frac{\partial U}{\partial q} \delta_i q + \sum \frac{\partial U}{\partial c} \delta c,$$

то из (33a) находим

$$\frac{d}{dt} \left(\sum p \delta_i q \right) = \delta_i E_{\text{кин}} - \delta_i U + \sum \frac{\partial U}{\partial c} \delta c$$

или

$$\delta_i (U - E_{\text{кин}}) = - \frac{d}{dt} \left(\sum p \delta_i q \right) + \sum \frac{\partial U}{\partial c} \delta c.$$

Умножим это уравнение на dt , проинтегрируем от 0 до t , разделим после этого на t и обозначим, как прежде, через h и k начальные значения величин p и q . Найдем

$$\frac{1}{t} \int_0^t \delta_i (U - E_{\text{кин}}) dt = - \sum \frac{p \delta_i q - h \delta k}{t} + \sum \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\partial U}{\partial c} \delta c dt.$$

Последний член справа есть среднее по времени

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{\partial U}{\partial c} \delta c dt = \frac{\partial \bar{U}}{\partial c} \delta c,$$

а член, стоящий в левой части уравнения, может быть записан иначе, так как $t = \text{const}$, в результате чего имеем

$$\delta_i \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - E_{\text{кин}}) dt \right] = - \sum \frac{p \delta_i q - h \delta k}{t} + \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c} \delta c. \quad (34)$$

Введем в правую часть равенства вместо вариации при $t = \text{const}$ вариацию, при которой $\varphi = \text{const}$.

Пусть $\psi = F(t)$ — некоторая зависящая от времени величина для первоначального движения, для варьированного же движения

$$\psi^* = F(t^*) + \varepsilon F_1(t^*),$$

где t и t^* соответственные времена, F и F_1 две какие-либо функции ε — бесконечно малый множитель. Если теперь образовать вариацию $\delta_i \psi$, то надо просто подставить $t^* = t$ и найти $\psi^* - \psi$, т. е.

$$\delta_i \psi = \varepsilon F_1(t).$$

Если же мы ищем $\delta_\varphi \psi$, то для t^* надо подставить то значение времени, которое соответствует неизменному φ , а именно

$$t^* = t + \delta_\varphi t,$$

и образовать $\psi^* - \psi$, т. е.

$$\delta_\varphi \psi = F(t + \delta_\varphi t) + \varepsilon F_1(t + \delta_\varphi t) - F(t)$$

или, пренебрегая членами высшего порядка относительно $\delta_\varphi t$ и ε ,

$$\delta_\varphi \psi = \varepsilon F_1(t) + \frac{dF(t)}{dt} \delta_\varphi t$$

и иначе

$$\delta_\varphi \psi = \delta_i \psi + \dot{\psi} \delta_\varphi t.$$

Для q_i , например, будем иметь

$$\delta_t q_i = \delta_{\varphi_i} q_i - \dot{q}_i \delta_{\varphi_i} t.$$

Подставив в (34), получим

$$\delta_t \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - E_{\text{кин}}) dt \right] = \sum p \dot{q} \frac{\delta_\varphi t}{t} - \sum \frac{p \delta_\varphi q - h \delta k}{t} + \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c} \delta c;$$

но так как $t = i_i \varphi_i$, откуда $\delta_\varphi t = \varphi_i \delta i_i$ и $\frac{\delta_\varphi t}{t} = \frac{\delta i_i}{i_i} = \delta \ln i_i$, то

$$\delta_t \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - E_{\text{кин}}) dt \right] = \sum [p \dot{q} \delta \ln i_i - \sum \frac{p \delta_\varphi q - h \delta k}{t} + \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c} \delta c],$$

а так как это уравнение имеет место для любого времени, то можно в нем все члены заменить средними значениями. Тогда, очевидно,

$$\delta_t \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - E_{\text{кин}}) dt \right] = \sum \bar{p} \dot{q} \delta \ln i_i + \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c} \delta c. \quad (35)$$

Выражение $\frac{1}{t} \int_0^t (U - E_{\text{кин}}) dt$ есть среднее значение $U - E_{\text{кин}}$ за

время от 0 до t и, следовательно, такая функция от t , которая с ростом t все более приближается к постоянному значению $\bar{U} - \bar{E}_{\text{кин}}$, являющемуся средним значением для очень больших времен. Однако для вариации, обозначенной δ_t , это, конечно, не имеет места. Для функции, изменения которой представляют собой только отклонения от некоторой постоянной величины, вариация δ_t с ростом времени может принимать все большие значения. Следовательно, здесь надо рассматривать только такие функции, которые при возрастающем времени всегда испытывают только малые отклонения и приближаются к некоторому пределу, так что обозначенная через δ_t вариация также испытывает отклонения, величины которых с возрастанием времени не увеличиваются. В этом случае можно выражение

$$\delta_t \left[\frac{1}{t} \int_0^t (U - E_{\text{кин}}) dt \right]$$

заменить через

$$\delta (\bar{U} - \bar{E}_{\text{кин}}).$$

Следовательно, в уравнение (35) войдут не вариации самих этих величин, а вариации их средних значений, т. е.

$$\delta (\bar{U} - \bar{E}_{\text{кин}}) = \sum \bar{p} \bar{q} \delta \ln i + \sum \frac{\partial \bar{U}}{\partial c} \delta c. \quad (36)$$

Таким образом, при некотором существенном видоизменении принципа Гамильтона¹ Клаузиусу удалось получить соотношение, аналогичное второму началу, как это, впрочем, сделал иным способом и Гельмгольц. Однако при этом вскрылись два обстоятельства. Во-первых, оказалось, что для задач механики принципу Гамильтона надо придавать обычный, так сказать, «классический» смысл, а для рассмотрения задач теории теплоты — существенно иной смысл, причем обе точки зрения несводимы и ни одна из них не заключается в другой в качестве частного случая. Во-вторых, полученное выражение, связывающее второе начало с величинами механики, оказывается эвристически бесполезным и физически отнюдь не поддается сколько-нибудь простому и наглядному толкованию.

¹ В 1915 г. Ферстерлинг напечатал работу, в которой исследовал некоторые термодинамические законы периодических движений, подчиняющихся принципу наименьшего действия. (Försterling K., Über die thermodynamischen Gesetze periodischer Bewegungen, welche dem Prinzip der kleinsten Wirkung folgen, Ann. der Phys., т. 47, № 8, № 16, 1915, стр. 1127—1139.) Ферстерлинг выясняет и решает в положительном смысле следующий вопрос: следуют ли эти закономерности из общих принципов динамики, если привлечь для рассмотрения задачи принцип наименьшего действия и так называемые циклические движения. Вопросу об аналогах величины действия в теории теплоты посвящены многочисленные исследования. См., например, «Сборник», стр. 466—496.

По существу, уже здесь выяснилось, что идея единой, выводимой из одного (и только одного) единообразно понимаемого принципа картины мира, не была реализована, а подменена идеей объединения различных областей физики (в данном случае механики и теории теплоты) с помощью одного соотношения, но рассматриваемого с разных, внутренне неувязанных точек зрения.

Это означало, что феноменологическая увязка теории теплоты и механики без введения существенно новых понятий (понятие о вероятности состояния ансамбля) не только не дает ничего нового, но и не приводит к желаемому единству, заменяя его видимым, но не существенным объединением теории теплоты и механики. Феноменологические возможности принципа Гамильтона были исчерпаны и начало кризиса классической физики заложено уже здесь.

2. Вариационные принципы механики и скрытые движения в обосновании второго начала термодинамики Гельмгольцем

Один из крупнейших ученых-физиков XIX в. Г. Гельмгольц (1821—1894) отчетливо сформулировал задачу физического познания так, как она рисовалась механистическому мировоззрению. В известном сочинении «О сохранении силы», вышедшем в 1847 г., он пишет: «Задача физического естествознания, в конце концов, заключается в том, чтобы свести явления природы на неизменные притягивательные и отталкивательные силы, величина которых зависит от их расстояния. Разрешимость этой задачи есть в то же время условие для возможности полного понимания природы»¹.

Эту задачу Гельмгольц в 70—80-х годах XIX в. пытался решить с помощью принципа наименьшего действия. При этом он сохранил механическое существо принципа. Однако это ограничение уже отступало у него на задний план, так как при исследовании многих физических систем, как например, гальванических токов, магнитов ему не надо было входить в рассмотрение их специальных физических свойств. Зато Гельмгольц уже тогда сделал решительный шаг. Он не стал выводить лагранжиан из энергии как разность кинетической и потенциальной энергий, что делалось до него, а наоборот, взял лагранжеву функцию за основу в качестве исходной, первичной величины и из нее вывел как все другие законы движения, так и величину энергии.

Треть столетия отделяет работы Гельмгольца, связанные с проблемой объяснения тепловых явлений, от его декларации целей механистического мировоззрения. Если Гельмгольцу как будто бы удалось уложить закон сохранения и превращения энергии в прокрустово ложе механицизма, то второе начало теории теплоты

¹ Гельмгольц Г., О сохранении силы, пер. П. П. Лазарева, Гостехиздат, 1934, стр. 37.

явилось чужеродным элементом в стройном здании механистической физики. Понятие энтропии вносило новый существенный элемент в физическую картину мира. Монотонность функции энтропии подчеркивала односторонность, направленность процессов природы. Прошедшее и будущее, которые не различались в классической механике, где ничто не изменяется при замене плюса на минус в



Г. ГЕЛЬМГОЛЬЦ (1821—1894)

уравнениях движения, переставали быть физически тождественными. В механике не было никаких аналогий функции энтропии, никаких понятий, к которым можно было бы свести содержание второго начала теории теплоты.

Гельмгольц ставил своей задачей включить энтропию в схему классической механистической физики. Прямолинейный механицизм центральных сил сменяется у него более гибким подходом. Задача остается прежней — построение механистической картины мира. Но конкретные формы ее осуществления меняются. Принцип наименьшего действия и представление о циклических и «скрытых» механических движениях представляют собой новые пути к разрешению старой задачи.

Трудности, вставшие перед механистическим миропониманием в связи с термодинамическими проблемами, трудности, которые приводили к формализации этой науки (сравним хотя бы работы Дюэма), Гельмгольц пытается преодолеть путем рассмотрения всех процессов, как вызванных участвующими в них видимыми, наблюдаемыми, так и невидимыми, «скрытыми» массами. Применяя к этим массам наиболее общий принцип механики — принцип Гамильтона, можно охватить явления, выходящие за пределы собственно механики движущихся тел.

Гельмгольц указывает, что «известные законы обратимых процессов могут быть фактически выражены в форме уравнений Лагранжа, а следовательно, и в форме теоремы минимальности кинетического потенциала»¹.

Однако при изучении общих свойств систем, которые подчинены принципу Гамильтона, «необходимо отбросить старое, более узкое предположение, согласно которому скорости входят только в выражение живой силы и притом в форме однородной функции второй степени; надо исследовать, как будет обстоять дело, если L есть функция любого вида от координат и скоростей»¹.

Таким образом, при исследовании немеханических явлений мы можем руководствоваться принципом Гамильтона, но только необходимо изменить вид входящей в него функции L . Если форма большой группы механических процессов характеризуется тем, что кинетическая энергия есть однородная квадратичная форма скоростей, а потенциальная энергия — функция только координат, то вне пределов механики имеют место и другие соотношения.

По мнению Гельмгольца, «область применения принципа наименьшего действия далеко переросла границы механики весомых тел». Принцип наименьшего действия приобрел универсальный характер, и поэтому он становится важнейшим эвристическим средством. Гельмгольц считал, что этот принцип дает возможность открывать новые законы физических явлений: «Во всяком случае, мне кажется, что всеобщая значимость принципа наименьшего действия настолько не подлежит сомнению, что он может претендовать на большую роль в качестве эвристического принципа и путеводной нити в исканиях формулировок для законов новых классов явлений»².

Таким образом, Гельмгольц провозглашает принцип наименьшего действия наиболее общим законом физики обратимых явлений. Но значение этого принципа не только в этом. Поскольку он применим ко всем изученным обратимым явлениям, он применим и ко всем тем, которые еще предстоит изучить — таков ход рассуждения

¹ Helmholtz H., Die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Wiss. Abh., т. III, Leipzig, 1895, стр. 207; «Сборник», стр. 432.

² Там же, стр. 209.

Гельмгольца. А так как сферы действия закона сохранения и превращения энергии и принципа наименьшего действия не обязательно совпадают и содержание последнего не исчерпывается представлением центральных сил, то принцип наименьшего действия «там, где он применим, выражает какой-то особый характер существующих консервативных сил природы, который не дан через их определение как консервативных сил»¹.

Основная идея Гельмгольца заключалась в том, что он ввел в рассмотрение всех задач скрытые движения. Эти скрытые движения понимались им как движения некоторых масс, которые недоступны нашему наблюдению и потому непосредственно необнаруживаемы.

Гельмгольц выдвинул эту идею под влиянием теорий света с их ненаблюдаемым непосредственно эфиром, а главное, под влиянием теории электрического и магнитного полей Фарадея. Недаром он был пропагандистом идей Фарадея в Германии. Поиски аналогии тепловым движениям в механике привели его к циклическим и скрытым движениям. Значение принципа наименьшего действия и заключается в том, что он дает возможность провести исследование систем со скрытыми движениями. Этот принцип позволяет изучить не только не зависящие от времени силы (в этом случае система консервативна), но и силы, зависящие от времени. Очевидно, что последние вызваны процессами, существенно отличными от процессов, с которыми связаны консервативные силы.

В 1884 г. Гельмгольц опубликовал работу «Studien zur Statik monocyklischer Systeme»², за которой последовал еще ряд статей на ту же тему³. Основная цель его исследований состоит в том, чтобы показать, что существует целая группа механических движений, которые имеют характер, аналогичный тепловым движениям, происходящим согласно второму началу термодинамики. Подробное обоснование изложенной идеи мы находим и у Больцмана, уделившего этому вопросу много внимания.

Глава IV тома II «Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik» Больцмана носит название «Аналогии с физическими, особенно с тепловыми законами» и начинается с «аналога подведенного тепла». Как известно, специфические особенности термодинамических уравнений обусловлены тем обстоятельством, что прирост количества тепла не является полным дифференциалом в отличие от прироста полной энергии δE , который всегда (вернее, во всех склерономных системах) является полным дифференциалом. Поэтому нужно подобрать такую механическую силу, которая по своим свойствам

¹ Helmholtz H., Die physikalische Bedeutung ..., стр. 221—222.

² Helmholtz H., Studien zur Statik monocyklischer Systeme, Wiss. Abh., т. III, Leipzig, 1895, стр. 119—141.

³ Helmholtz H., Prinzipien der Statik monocyklischer Systeme, Wiss. Abh., т. III, Leipzig, 1895, стр. 163—173.

была бы аналогом тепловых систем. Это пытался сделать еще Клаузиус, «рассматривавший системы, в которых встречаются силы, действующие на расстоянии, закон действия которых меняется со временем, так что вместо входящей вообще в силовую функцию U некоторой постоянной появляются очень медленно изменяющиеся со временем параметры...»¹. Так, например, если рассмотреть горячий газ, находящийся в сосуде, закрытом подвижным поршнем, то можно построить следующую картину. Поршень заменяется некоторыми нормальными, извне действующими на молекулы отталкивательными силами, которые при большом приближении к поверхности поршня принимают чрезвычайно большую величину. Тогда медленное отступление поршня может быть рассматриваемо как медленное изменение их силовой функции. Однако при этом представлении Клаузиуса об изменчивости закона действия сил природы возникает одна вычислительная трудность. Дело в том, что силовая функция U этих сил задана с точностью до произвольной постоянной, которую всегда можно определить благодаря тому, что некоторое произвольное положение системы берется за нулевое $U = 0$ (нулевой уровень потенциала). Для обычной механической системы выбор уровня $U = 0$ совершенно произволен. «Если же закон действия силы изменяется со временем, то изменяется также и работа, которая требуется для перевода системы из одного нулевого положения в другое. Значение функции U меняется поэтому различным образом в зависимости от того, какое положение системы принято за нулевое; для того чтобы определить это значение, необходимо указать, какое именно положение принято за нулевое.

Лучше всего в этом случае выбирать всегда то положение, при котором все материальные точки системы так далеко отстоят одна от другой, а также от всех действующих на них прочих точек, что ни на одну из точек системы не действует никакая сколько-нибудь значительная сила»². Это предположение Клаузиуса относительно изменения со временем закона действия сил дает «полную аналогию с уравнениями термодинамики». Но против этого построения, по мнению Больцмана, можно выдвинуть серьезные возражения общего характера. Дело в том, что «в природе мы не замечаем ничего, что указывало бы на изменение закона действия каких-либо определенных сил в зависимости от времени. Более того, всякому физическому исследованию пришел бы конец, если бы мы не были уверены в том, что законы природы, которые мы установили сегодня, остаются в силе и в последующее время»³.

¹ Boltzmann L., Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik, т. 2, Leipzig, 1904, стр. 162; «Сборник», стр. 468.

² Там же, стр. 163.

³ Там же.

Надо указать, что принятие допущения Клаузиуса означало бы установление своеобразной иерархии законов природы: законы физических явлений, законы, по которым изменяются эти законы, и т. д. Хотя возможность изменения законов природы с течением времени (по некоторому закону!) и нельзя считать совершенно исключенной, однако вряд ли это изменение играет существенную роль даже в промежутке времени, равном примерно времени существования солнечной системы.

Это указывает на то, что надо как-то иначе подойти к установлению аналогии. Для этого можно воспользоваться понятием циклических движений, введенным Гельмгольцем. Прежде всего заметим, что одно из важнейших свойств тепловой энергии, в отличие от энергии механического движения, состоит в том, что в нагретом теле, несмотря на очень быстрое движение очень маленьких частиц, составляющих это тело, внешне не замечается никаких изменений состояния. Обратимся к механическим моделям, которые могут иметь подобные свойства. Примером может служить вращение около какой-либо оси абсолютно однородного твердого шара или движение абсолютно однородной несжимаемой жидкости без трения в замкнутом канале с абсолютно твердыми стенками. Подобные движения и называются циклическими. Являются ли молекулярные движения, определяющие тепловое состояние тела, циклическими? Строго говоря, нет. Однако здесь имеется одно весьма важное обстоятельство, а именно, что молекул очень много и движутся они беспорядочно. В силу этого достигается то, что как только какая-либо молекула покидает известное состояние движения, так одна из соседних с нею молекул получает сходное с ней состояние движения, так что внешне мы не замечаем никаких перемен. Это дает возможность применить здесь понятие циклических систем. С точки зрения механики характерной особенностью циклических систем, отличающей их от всех других систем, является зависимость их свойств не от абсолютной величины циклических координат, а только от скорости их изменения. Отсюда ясно, что сами координаты не могут встретиться ни в выражении живой силы, ни в выражении сил, действующих на систему.

Движения, в которых некоторые координаты не входят в выражение живой силы, а входят только соответствующие им скорости, хотя и не имеют того всеобщего значения, которое придавал им Гельмгольц, все же представляют собой довольно значительную группу. Так, циркуляция воды в замкнутой трубе, движение непрерывной цепи, перекинутой через блоки, дают примеры подобных движений. В самом простом случае выражения живой силы в прямоугольных декартовых координатах имеем $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2$, куда сами координаты не входят. Вообще во всех движениях систем, в которых положение некоторой точки сейчас же занимается другой такой же

точкой, имеющей ту же по величине и так же направленную скорость, мы имеем пример рассматриваемых движений. Для этого траектория описываемых движений должна быть замкнутой, т. е. материальные точки должны возвращаться по истечении некоторого времени к первоначальному положению. В этом случае непосредственно ясно, что каково бы ни было положение отдельных точек системы, выражение живых сил от него зависеть не будет. Это объясняется тем, что в любой данный момент в каждой точке замкнутой траектории находится некоторая материальная точка, которая движется со строго определенной скоростью.

При помощи понятия энергии циклическую систему можно определить следующим образом: «Циклической системой называется материальная система, энергия которой с достаточным приближением является однородной квадратичной функцией скоростей изменения ее циклических координат¹. Циклические системы могут быть моноциклическими, бициклическими и т. д., в зависимости от того, сколько существует в системе циклических координат. Если в циклической системе имеются нециклические координаты, то они называются параметрами системы. Легко видеть, что точное выражение энергии циклической системы содержит в себе скорости не только циклических, но и всех прочих координат. Однако некоторые из этих координат могут изменяться достаточно медленно. Если это так, то скоростями их изменения можно пренебречь по сравнению с более значительными скоростями циклических координат, и тогда приведенное выше определение приближенно будет иметь место.

Таким образом, система будет с очень большим приближением циклической тогда, когда либо скорость изменения ее параметров достаточно мала, либо скорость изменения циклических координат достаточно велика.

Если принцип Гамильтона применим к изучаемой системе, то можно найти значение кинетического потенциала и составить тем самым уравнения движения, если только знать полностью зависимость энергии от координат и скоростей. При этом, как мы уже отмечали, кинетическая энергия не обязательно должна входить в выражение кинетического потенциала в форме квадратичной функции скоростей. Больше того, предполагается, что при некотором исключении части координат можно для остающихся координат представить выражение кинетического потенциала в такой форме, в которую соответствующие скорости войдут линейно. Этот род движений систем, в которых кинетический потенциал содержит члены, линейные относительно скоростей, Гельмгольц и называет

¹ Hertz H., Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt, Gesamm. Werke, т. 3, 1910, стр. 235.; Г. Герц, Принципы механики, изложенные в новой связи, изд. АН СССР, М., 1959, стр. 225.

системами со скрытыми движениями. Чтобы изучить такие системы, Гельмгольц воспользовался принципом Гамильтона.

В задачах физики часто встречается тот случай, когда полная сила, действующая на систему, состоит из двух слагаемых, одна из которых имеет силовую функцию U , а другая есть чистая функция времени, так что сила F_h , действующая на координату h , имеет вид

$$F_h = -\frac{\partial U}{\partial q_h} + P_{ht},$$

где P_{ht} — функции времени. Это выражение можно записать и иначе, вводя силовую функцию, зависящую от времени

$$V = U - \sum_h P_{ht} q_h. \quad (37)$$

Гельмгольц нашел такое обобщение принципа Гамильтона, которое охватывает этот случай и поэтому имеет применение за пределами механики. Иначе говоря, Гельмгольц показал, что принцип наименьшего действия и принцип Гамильтона распространяется на неконсервативные системы, не имеющие неинтегрируемых связей, при том условии, что приложенные силы не зависят от скоростей и имеют потенциальную функцию, хотя бы и содержащую явно время¹.

Видоизмененный путем введения члена $\sum_h P_{ht} q_h$ принцип Гамильтона Гельмгольц называет «законом минимума отрицательного кинетического потенциала» (Minimalsatz des negativen kinetischen Potentials)².

Гельмгольц указывает, что принцип наименьшего действия оказался применимым к обратимым тепловым явлениям³ и к электродинамике⁴. Это означает, что область применимости принципа наименьшего действия выходит далеко за пределы механики и что надежды Мопертюи на его универсальную значимость как будто бы близятся к исполнению. Этот принцип есть всеобщий закон обратимых физических процессов. Что же касается необратимых явлений, то «необратимость не лежит в сущности вещей, но покоится только на ограниченности наших средств, которая не позволяет нам вновь упорядочить хаотическое движение атомов, или движение всех атомов, принимающих участие в тепловом движении, заставить

¹ Helmholtz H., Zur Geschichte des Prinzips der kleinsten Action, Gesamm. Abhandl., т. 3, стр. 249—262.

² Helmholtz H., Die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Wiss. Abh., т. III, 1895, Leipzig, J. Barth; «Сборник», стр. 432.

³ Helmholtz H., Studien zur Statik monocyclischer Systeme (1884), Wiss. Abh., т. III, 1895, стр. 119—141.

⁴ Helmholtz H., Das Prinzip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik, Wiss. Abh., т. III, 1895, стр., 476—504; Wied. Ann., Bd. XLVII, 1892, стр. 1—25.

происходить точно в обратном направлении»¹. В работе² Гельмгольц ставит своей задачей сопоставить все имеющиеся данные о физическом значении и области применения принципа Гамильтона.

Работа разбита на пять параграфов. В первом из них Гельмгольц устанавливает минимальный закон для кинетического потенциала, стремясь сделать это с наибольшей широтой, и выводит из него уравнение Лагранжа. Во втором параграфе он выводит закон сохранения энергии из найденной им обобщенной формы принципа Гамильтона и излагает метод определения значения энергии из известного значения кинетического потенциала. Для энергии E он находит

$$E = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i. \quad (38)$$

В этом параграфе Гельмгольц выясняет, что принцип наименьшего действия шире, чем закон сохранения энергии. В параграфе третьем Гельмгольц анализирует обратную задачу, а именно выводит из известного E величину L . Это осуществляется интегрированием уравнения (38), в результате чего появляется произвольная постоянная интегрирования, которая должна быть однородной функцией первого порядка от $\dot{q}_i$. Этот результат имеет большое значение, так как позволяет, если известна энергия в зависимости от координат и скоростей, найти кинетический потенциал и вместе с тем определить, следовательно, все уравнения движения системы, предполагая, что принцип наименьшего действия имеет место. Гельмгольц отмечает, что члены, линейные в $\dot{q}_i$, соответствующие «скрытым движениям», могут быть по большей части определены без затруднений.

В параграфе четвертом рассматриваются взаимные соотношения между силами, одновременно, но по различным направлениям действующими на систему, и соответствующими ускорениями и скоростями. Для иллюстрации этих соотношений Гельмгольц приводит ряд примеров физических явлений: связь между электромагнитным и электродинамическим законом Ампера, с одной стороны, и законом индукции, с другой, ряд термодинамических законов, в том числе отношение возрастания давления газа в ограниченном пространстве при повышении температуры к повышению температуры при сжатии, термоэлектрические и термохимические процессы. Здесь же доказывается, что принцип наименьшего действия применим во всех случаях, когда рассматриваемые соотношения взаимности имеют место.

В пятом параграфе рассматривается теорема Гамильтона и в шестом из нее выводятся теоремы взаимности. Наконец, в седьмом

¹ Helmholtz H., Studien zur Statik..., стр. 210.

² Helmholtz H., Die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Wiss. Abh., т. 3, 1395; «Сборник», стр. 430—459.

параграфе вместо скоростей вводятся импульсы («моменты движения» по терминологии Гельмгольца), что приводит как к видоизмененному выражению вариационной задачи, так и к некоторым новым результатам.

Так как в большинстве физических задач проще определить функцию E , чем общий закон изменения системы, то необходимо исследовать вопрос о получении L из известного значения E . Приняв во внимание, что $E = E(\dot{q}_a, q_a)$, получим из уравнения (38)

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_b} = - \sum_a \left(\dot{q}_a \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \right). \quad (39)$$

Рассмотрим эту задачу в общем виде, предполагая E совершенно произвольной функцией скоростей, удовлетворяющей только условию, что все $\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_a}$ стремятся к нулю, когда $\dot{q}_a \rightarrow 0$. Коэффициенты в (39) должны быть конечны. Введем вместо $\dot{q}_a$

$$\dot{q}_a = x \bar{q}_a,$$

где x —переменный множитель, при изменении которого изменяются абсолютные значения $\dot{q}_a$, но не их взаимные отношения. После такой подстановки обозначим L и E через L' и E' . Тогда

$$\frac{\partial E'}{\partial x} = \sum_a \left(\bar{q}_a \frac{\partial E'}{\partial \bar{q}_a} \right). \quad (40)$$

А так как по (39) все $\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_a} = 0$, когда все $\dot{q}_a = 0$, что по (40) имеет место, когда $x = 0$, то и

$$\frac{\partial E'}{\partial x} = 0. \quad (41)$$

При очень малых x производная $\frac{\partial E}{\partial x}$ будет пропорциональна самому x . Для L' имеем

$$\frac{\partial L'}{\partial x} = \sum_a \left(\bar{q}_a \frac{\partial L'}{\partial \bar{q}_a} \right) \quad (42)$$

и

$$x \frac{\partial L'}{\partial x} = \sum_a \left(\bar{q}_a \frac{\partial L'}{\partial \bar{q}_a} \right) = -E' + L',$$

откуда

$$\frac{\partial E'}{\partial x} = -x \frac{\partial^2 L'}{\partial x^2}.$$

Если для дифференциального уравнения (42) существует еще какое-либо другое решение L'' , то

$$0 = L' - L'' - x \frac{\partial}{\partial x} (L' - L''),$$

т. е.

$$\ln (L' - L'') = \ln x + \ln c$$

или

$$L' - L'' = x c,$$

где c есть однородная и первой степени функция $\tilde{q}_a$.

Найдем теперь частный интеграл уравнения (42). Написав его для $x = 0$, получим

$$E_0 = L_0$$

и после подстановки в (42) найдем

$$(E' - E_0) = (L' - L_0) - x \frac{\partial}{\partial x} (L' - L_0),$$

разделим на x^2 :

$$-\frac{1}{x^2} (E' - E_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{L' - L_0}{x} \right).$$

Так как стоящая слева величина конечна согласно уравнению (41) и при $x = 0$, то, интегрируя в пределах от $x = 0$ до $x = 1$, находим:

$$L' - L_0 = - \int_0^1 \frac{E' - E_0}{x^2} dx + L_1,$$

где постоянная интегрирования L_1 должна быть функцией первой степени от $\tilde{q}_a$.

Таким образом, если E может быть однозначно выведено из (38), то, напротив, вывод L из E приводит к некоторой функции L_1 , которая соответствует «скрытым» движениям и остается неопределенной.

В работе о статике моноциклических систем Гельмгольц показал, что обратимые тепловые процессы могут быть представлены в следующем виде (при соответствующем выборе координат):

$$\left. \begin{aligned} P_a &= - \frac{\partial}{\partial q_a} (F - E_{\text{кин}}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial \dot{q}_a} \right), \\ \frac{dQ}{dt} &= - T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right), \\ E &= F - T \frac{\partial F}{\partial T} + E_{\text{кин}}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где P_a — обобщенная сила, F — свободная энергия как функция координат q_a и абсолютной температуры T , $E_{\text{кин}}$ — кинетическая энергия видимого движения тяжелых масс как функция q_a и $\dot{q}_a$, однородная и второй степени относительно последних и независимая от T , dQ — количество теплоты, которое вводится в тело извне за элемент времени dt , т. е. работа, которая производится над телом силами, действующими только на тепловое движение.

Положим

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S$$

и

$$T \frac{\partial S}{\partial s} = \eta, \quad L = F - T \frac{\partial F}{\partial T} - \eta s, \quad (44)$$

где S — некоторая функция от s . Выразим L и s как функции от q_a и η , тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= T \frac{ds}{dt} = \eta \frac{ds}{dt}, \\ P_a &= -\frac{\partial}{\partial q_a} (L - E_{\text{кин}}) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial \dot{q}_a} \right), \\ E &= L - \eta \frac{\partial L}{\partial \eta} + E_{\text{кин}}. \end{aligned} \right\} \quad (43a)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями для движения моноциклической системы, кинетический потенциал которой есть $(L - E_{\text{кин}})$ и для которой η обозначает скорость, а s есть импульс моноциклического движения.

Обозначим далее через $P_{(\eta)}$ силу, действующую в направлении скорости η , тогда

$$P_{(\eta)} \eta dt = dQ.$$

Аналогия с уравнениями Лагранжа сохранится, как бы ни зависела энтропия S от импульса s моноциклического движения.

Из кинетической теории газов и возможности объединения двух одинаково нагретых систем тел в одну систему следует, что в этом случае можно предположить, что

$$T = s \dot{q}$$

и

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = C \ln s. \quad (45)$$

Отсюда вытекает, что для каждой данной системы тел температура пропорциональна живой силе теплового движения. Этот результат еще до Гельмгольца старались обосновать Клаузиус (см. разд. 2) и Больцман¹.

¹ Boltzmann L., Wiener Sitzungsberichte, XCII, 2 Abt., т. 8, 1885.

Гельмгольц сделал попытку¹ показать, что термодинамику можно охватить вариационным принципом, если рассматривать тепловые процессы как обратимые. Пусть одна из обобщенных координат системы q_r испытывает изменение dq_r , тогда

$$TdS = -P_r dq_r + dU, \quad (46)$$

где TdS — теплота, введенная в систему, S — энтропия, T — абсолютная температура, P_r — обобщенная сила, соответствующая координате q_r , U — внутренняя энергия системы.

Выражение (46) при подстановке η из (44) принимает вид

$$\eta ds = -P_r dq_r + dU \quad (47)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} - \eta \frac{\partial s}{\partial q_r} = P_r, \quad (48)$$

т. е.

$$\frac{\partial F'}{\partial q_r} = P_r. \quad (49)$$

Здесь F' есть функция, равная $U - \eta s$; эта функция при $s = S$ приводится к свободной энергии $U - TS$.

Для полного описания поведения системы надо принять во внимание механические свойства системы, тогда уравнение Лагранжа запишется так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial}{\partial q_r} (E_{\text{кин}} - F') = 0, \quad (50)$$

где $E_{\text{кин}}$ — кинетическая энергия системы. Дифференцируя (46) по η , получим

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} = \eta \frac{\partial s}{\partial \eta} \quad (51)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial F'}{\partial \eta} = -s. \quad (52)$$

Если dQ^* представляет количество тепла, полученное при бесконечно малом преобразовании системы, то из определения энтропии имеем

$$\frac{dQ^*}{dt} = T \frac{dS}{dt} = \eta \frac{ds}{dt} = -\eta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F'}{\partial \eta} \right). \quad (53)$$

¹ Helmholtz H., Die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung..., «Сборник», стр. 420—459.

Полная энергия системы (при $E_{\text{пот}} = 0$) будет

$$E = F' - \eta \frac{\partial F'}{\partial \eta} + E_{\text{кин}}.$$

Гельмгольц рассуждает так: пусть P_η определено уравнением

$$P_\eta \cdot \eta dt = dQ^*.$$

Предположим теперь, что у системы существует дополнительная координата, которой соответствует скорость η и импульс s . Возможность такого допущения вытекает уже из вида уравнения (50), которое аналогично обычному уравнению динамики Лагранжа. Принцип Гамильтона вполне применим здесь, так как член $\sum p_i dq_i$, который возникает в случае независимости сил P_i от координат и скоростей, может быть подчинен вариационному условию.

Однако такая аналогия между термодинамикой и механикой имеет в общем формальный характер. Уравнения, предложенные Гельмгольцем, не могут дать полного описания термодинамических изменений.

Введя наименование «кинетический потенциал» для лагранжевой функции $L = U - F$, Гельмгольц указывает, что кинетический потенциал имеет размерность энергии и в силу того, что в него входит величина U , он определен с точностью до произвольной постоянной.

Для движущейся системы функция L состоит из функции только координат q_a и вычитаемой из нее существенно положительной однородной квадратичной функции скоростей $\dot{q}_a$, коэффициенты которой суть функции только от q_a .

Все значение функции L раскрывается, когда мы выходим за пределы явлений непосредственно наблюдаемого механического движения и рассматриваем законы термодинамики и электродинамики. В этих областях функция L уже не подчинена обязательно условиям, которые имеют место в динамике, а оказывается для каждой области особенной функцией состояния, которую надо отыскивать в каждом отдельном случае. Эта функция состояния зависит от величин $\dot{q}_a$ и q_a , образующих два ряда таких параметров системы, которые отнюдь не соответствуют друг другу; напротив, большей частью приходится рассматривать такие q_a , для которых соответствующие $\dot{q}_a$ отсутствуют, и наоборот.

Гельмгольц рассмотрел вопрос о том, в каких случаях можно получить выражение кинетического потенциала, не связанное теми условиями, которые были наложены на него исходными определениями в динамике.

Необходимо исключить часть скоростей и координат, если, конечно, такое исключение обосновано характером изучаемой задачи. Производимое в механике исключение некоторого количества координат при помощи уравнений связей между ними не дает ничего нового, так как форма U и $E_{\text{кин}}$, а следовательно, и L сохраняется, и они оказываются просто функциями меньшего числа

переменных. Совсем иначе обстоит дело в системе, в которой имеются циклические движения, происходящие равномерно и без возмущений. Представим в качестве примера непрерывный ряд одинаковых частиц, движущихся без просветов по замкнутому пути. Если этой цепочке задано какое-либо определенное движение, то оно будет продолжаться в силу инерции. Это и есть пример циклического движения; другими примерами могут служить вращение волчка, махового колеса и т. п. В этих примерах скорость (или угловая скорость) всех точек одинакова, но легко указать примеры циклического движения, для которых это не имеет места; например, течение массы воды, заключенной в замкнутую кольцевую трубку, — циклическое, но будет происходить с постоянной скоростью только в том случае, если сечение трубки повсюду одинаково. Постоянной остается только масса (количество) воды, протекающей через любое поперечное сечение в единицу времени.

Существенное требование, определяющее циклические движения, — их замкнутость и установившееся состояние на всех участках. При этом, так как любое рассматриваемое сечение или точку пути проходят в различные моменты времени различные частицы, то прослеживание движения каждой из них делается ненужным и полное описание движения получается, когда для всех точек пути известно состояние движения.

Материальные системы, в которых возбуждено такое циклическое движение, Гельмгольц называет моноциклическими. К ним он относит и системы с многими циклическими движениями, из которых одно определяет остальные, например системы из зубчатых колес и т. п. Все остальные системы, в которых имеют место многие независимые циклические движения, он называет полициклическими.

В циклическом движении положение отдельных точек на замкнутом пути, очевидно, не влияет на величину кинетической энергии циклического движения. Точно так же и потенциальная энергия не будет зависеть от положения циркулирующей массы. Следовательно, кинетический потенциал не будет содержать в качестве переменных координат отдельных циркулирующих точек. Обозначим эти отсутствующие координаты через q_b . Если циклическое движение должно быть равномерно, то внешние силы

$$F_b = 0.$$

На весь цикл, конечно, могут влиять внешние силы, но это будут силы F_a , действующие на координаты q_a , определяющие положение и форму пути не отдельных точек, а цикла в целом.

Для индексов b , так как $F_b = 0$, $\frac{\partial L}{\partial q_b} = 0$, уравнения Лагранжа принимают простой вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} = C_b, \quad (54)$$

где C_b — постоянные, представляющие неизменяющиеся импульсы циклического движения.

Так как L содержит в себе $\dot{q}_a$ и $\dot{q}_b$ в виде однородных квадратичных функций, то производные $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}$ будут однородными линейными функциями всех $\dot{q}$, коэффициенты которых зависят только от q_a , ибо q_b не входят в их выражения. Таким образом, из выражения (54) получается система b линейных уравнений, при помощи которых $\dot{q}_b$ можно выразить как линейные функции $\dot{q}_a$. Путем такой подстановки величина $\dot{q}_b$ исключается из выражения для L , в которое входят теперь лишь q_a , $\dot{q}_a$, и постоянные C_b . Полученное таким образом измененное значение лагранжиана L обозначим $\bar{L}$.

Производные $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_a}$ и $\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_a}$ этой функции отличаются от соответствующих производных первоначальных функций, так как $\bar{L}$ содержит $\dot{q}_a$ и q_a , так же как L , но, кроме того, вместо q_b содержит также $\dot{q}_a$ и q_a , через которые они теперь выражены.

Имеем

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_a} = \frac{\partial L}{\partial q_a} + \sum_b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a}$$

и также

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} + \sum_b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial \dot{q}_a}.$$

Введя C_b из выражения (54), получим:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_a} = \frac{\partial}{\partial q_a} \left(\bar{L} - \sum_b C_b \dot{q}_b \right),$$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left(\bar{L} - \sum_b C_b \dot{q}_b \right).$$

Таким образом, производные функции L по координатам и скоростям с индексами a выражены через производные другой функции, в которую входят только q_a и $\dot{q}_a$.

При помощи этой новой функции уравнения Лагранжа принимают вид

$$F_a = - \frac{\partial}{\partial q_a} \left(\bar{L} - \sum_b C_b \dot{q}_b \right) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left(\bar{L} - \sum_b C_b \dot{q}_b \right) \right]. \quad (55)$$

Новый кинетический потенциал $(\bar{L} - \sum_b C_b \dot{q}_b)$ существенно отличается от L . В самом деле, хотя $\bar{L}$, так же как и L , состоит из части, зависящей только от q_a , и из части, являющейся квадратичной

функцией от $\dot{q}_a$, в новое выражение кинетического потенциала входят члены — $\sum C_b \dot{q}_b$, которые после подстановки в них решения для $\dot{q}_b$ содержат скорости $\dot{q}_a$ в первой степени. Такие члены были невозможны в первоначальном выражении кинетического потенциала L .

Появление в выражении для кинетического потенциала линейных членов представляет собой важную особенность циклических систем. Именно эта особенность позволяет перейти при помощи уравнений механики к рассмотрению необратимых термодинамических процессов. Дело в том, что «если ряду изменений состояния системы — процессу — по его окончании дать обратное направление так, чтобы восстановилось вновь начальное состояние, и если для этого переменить на обратные знаки всех скоростей $\dot{q}_a$, то чисто квадратичная функция скоростей останется при этом неизменной, в то время как линейные члены изменяют свои знаки. Для обратного протекания процесса получится, таким образом, другой кинетический потенциал, а следовательно, вместе с тем и другое дифференциальное уравнение. Движение не может происходить в обратном направлении тем же способом, что и в прямом: процесс необратим¹. Таким образом, введение циклических движений позволяет как будто подойти к проблеме необратимости, столь важной в теории теплоты, при помощи видоизмененного принципа Гамильтона.

Однако в наблюдаемых реальных движениях циклические движения имеют место не столь часто, а в тех случаях, когда они встречаются, их все же недостаточно для описания необратимости того или иного движения в целом. Чтобы при помощи циклических движений рассмотреть необратимые процессы, Гельмгольц допускает, что существуют циклические движения, не обнаруживаемые нами непосредственно, т. е. скрытые циклические движения. Он приводит следующий простой пример, иллюстрирующий возможность и смысл скрытых циклических движений. Представим себе быстро вращающийся шар, заключенный в непроницаемую оболочку, которая является также опорой оси вращения. При непосредственном рассмотрении нельзя установить существование этого движения до тех пор, пока это тело в целом находится в покое. Если же оно будет двигаться, то привести его в обратное движение путем обращения наблюдаемой скорости не удастся. Это и есть случай скрытого движения, которому будет соответствовать кинетический потенциал с линейными относительно скорости членами. Впрочем, о природе скрытого движения, как ясно из этой механической аналогии, мы ничего сказать не сможем. Оно даже не должно иметь равномерный, упорядоченный характер циклического движения. Так, в кинетической теории газов предполагается совершенно неупорядоченное движение молекул, которое имеет только то общее с циклическим

¹ H e l m h o l t z H., Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte, Leipzig, 1911, 2 Aufl., стр. 365.

движением, что ему соответствует большая кинетическая энергия, не зависящая от координат отдельных движущихся частей. В силу характера движения молекул процессы, происходящие в достаточно большом объеме, оказываются необратимыми.

Рассматривая далее взаимоотношения между силами, действующими на систему одновременно в различных направлениях и с соответствующими им скоростями и ускорениями, Гельмгольц устанавливает ряд соотношений, получивших название законов взаимности.

Обозначим, как обычно, $L = U - E_{\text{кин}}$ и рассмотрим входящий в уравнение Лагранжа член $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right)$, где $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$ есть, как и L , дифференцируемая функция от $\dot{q}_a$ и q_a . Находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) = \sum_b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \frac{d\dot{q}_b}{dt} + \sum_b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial q_b} \frac{dq_b}{dt}. \quad (56)$$

В первую сумму входит множитель $\frac{d\dot{q}_b}{dt} = \ddot{q}_b$, в силу чего выражение не линейно относительно $\dot{q}_b$ (вторая производная L будет также содержать $\dot{q}_b$). Во вторую сумму входит $\frac{dq_b}{dt} = \dot{q}_b$ как множитель, и она образует линейную функцию, так как $\ddot{q}_b$ больше нигде не входит в это выражение. Силы P_a могут быть представлены как линейные функции этих ускорений:

$$P_a = - \frac{\partial L}{\partial q_a} + \sum_b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \dot{q}_b + \sum_b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial q_b} \ddot{q}_b. \quad (57)$$

Дифференцируя P_a по определенному ускорению $\ddot{q}_c$ получим

$$\frac{\partial P_a}{\partial \ddot{q}_c} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c}.$$

Правая часть симметрична относительно индексов a и c . Поэтому, написав такое же выражение для дифференцирования P_c по $\ddot{q}_a$, получим

$$\frac{\partial P_a}{\partial \ddot{q}_c} = \frac{\partial P_c}{\partial \ddot{q}_a}. \quad (58)$$

Это и будет по Гельмгольцу отношение взаимности между силами и ускорениями, которое может быть словами выражено так: «Если определенное приращение ускорения $\ddot{q}_c$ увеличивает силу P_a , то равное приращение, когда оно имеет место для ускорения $\ddot{q}_a$, должно увеличить силу P_c и в том же размере»¹.

Аналогично этому между силами и скоростями также существует соотношение взаимности. Дифференцируем уравнение (57)

¹ Helmholtz H., Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte, стр. 374.

по некоторой определенной скорости $\dot{q}_c$. Тогда тот член в первой сумме правой части (57), для которого $b = c$, дает два члена в производной, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_c} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c} \dot{q}_c \right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c \partial \dot{q}_c} \dot{q}_c. \quad (59)$$

Все остальные члены дадут только один член. Объединив полученные выражения, найдем:

$$\frac{\partial P_a}{\partial \dot{q}_c} = - \frac{\partial^2 L}{\partial q_a \partial \dot{q}_c} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c} + \sum_b \frac{\partial}{\partial \dot{q}_b} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c} \right) \frac{dq_b}{dt} + \sum_b \frac{\partial}{\partial \dot{q}_b} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c} \right) \frac{dq_b}{dt}.$$

Обе суммы дают полную производную по времени от $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c}$, так что:

$$\frac{\partial P_a}{\partial \dot{q}_c} = - \frac{\partial^2 L}{\partial q_a \partial \dot{q}_c} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_c \partial \dot{q}_a} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c} \right).$$

Переставив индексы a и c , которые были взяты совершенно произвольно, найдем

$$\frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}_a} = - \frac{\partial^2 L}{\partial q_c \partial \dot{q}_a} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_a \partial \dot{q}_c} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c} \right).$$

Сложив эти уравнения, получим

$$\frac{\partial P_a}{\partial \dot{q}_c} + \frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}_a} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c} \right), \quad (60)$$

вычтя второе из первого получим

$$\frac{\partial P_a}{\partial \dot{q}_c} - \frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}_a} = 2 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_c \partial \dot{q}_a} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_a \partial \dot{q}_c} \right). \quad (61)$$

При рассмотрении уравнения (60) заметим, что для очень большого числа случаев величины $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_c}$ являются постоянными или даже равны нулю. Это имеет место всегда, когда L содержит скорости только в виде алгебраических функций первой и второй степени. В этом случае правая часть (60) обращается в нуль и мы получаем соотношение взаимности

$$\frac{\partial P_a}{\partial \dot{q}_c} = - \frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}_a}. \quad (62)$$

Если возрастание скорости $\dot{q}_c$ увеличивает силу P_a , то равное возрастание $\dot{q}_a$ во столько же раз уменьшает силу P_c .

Найдем третий закон взаимности между силами и координатами. Для этого воспользуемся уравнениями Лагранжа; a -тое уравнение продифференцируем по q_c , а c -тое по q_a . Получим:

$$\frac{\partial P_a}{\partial q_c} = - \frac{\partial^2 L}{\partial q_a \partial q_c} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial q_c} \right),$$

$$\frac{\partial P_c}{\partial q_a} = - \frac{\partial^2 L}{\partial q_a \partial q_c} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_c \partial q_a} \right).$$

Вычтем одно из другого:

$$\frac{\partial P_a}{\partial q_c} - \frac{\partial P_c}{\partial q_a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial q_c} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_c \partial q_a} \right).$$

используя (61), получим

$$\frac{\partial P_a}{\partial q_c} - \frac{\partial P_c}{\partial q_a} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_a}{\partial \dot{q}_c} - \frac{\partial P_c}{\partial \dot{q}_a} \right). \quad (63)$$

В случае покоя правая часть равна нулю и отсюда следует общий закон для всех консервативных сил:

$$\frac{\partial P_a}{\partial q_c} = \frac{\partial P_c}{\partial q_a}. \quad (64)$$

Это соотношение выполняется также и для движущихся систем, если производная по времени в правой части уравнения (63) обращается для них в нуль. Это имеет место в тех случаях, когда в системе происходят быстрые циклические движения или вообще скрытые движения, по сравнению с которыми кинетическая энергия, зависящая от изменения параметров q_a , может считаться пренебрежимо малой. Кинетическая энергия тогда зависит только от медленно изменяющихся параметров q_a и от больших циклических скоростей $\dot{q}_b$, причем соответствующие им координаты q_b не входят в выражение этой энергии. Следовательно, закон взаимности (64) можно применить только к координатам q_a .

Применим законы взаимности, считая, что они имеют гораздо более широкую сферу действия, к немеханическим явлениям. Гельмгольц¹ приводит ряд примеров. Вот некоторые из них. Электродинамические законы, вытекающие из выражения (58):

Пусть через два по форме и положению неизменных проводника A и B проходит электрический ток. Если возрастание тока в A вызывает индукционный ток в B , который усиливает протекающий в B ток, то возрастание тока в B произведет индуцированный ток в A , который усилит протекающий в A ток.

Из закона взаимности (62) получаем:

1. Электродинамический закон индукции Ленца: каждое движение двух контуров тока относительно друг друга, которое производится пондеромоторными электродинамическими силами, индуцирует электродвижущие силы, ослабляющие первоначальный ток.

2. Термодинамический закон: если возрастание температуры при постоянном давлении увеличивает давление тела, то сжатие его увеличит температуру.

3. Термоэлектрический закон (эффект Пельтье): если нагревание спая замкнутого проводника вызывает в нем электрический

¹ Helmholtz H., Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte, стр. 379—380.

ток, то электрический ток, протекающий в том же направлении, вызовет охлаждение этого места (если не рассматривать выделения тепла за счет сопротивления проводника).

Все эти законы взаимности носят лишь качественный характер, выражая смысл и связь изменений соответствующих величин. Однако от них возможен переход и к количественным соотношениям.

Итак, интерес этих соотношений состоит не только в их специфически механическом характере, но и в том, что, применяя их к проблемам, не относящимся к собственно механике, Гельмгольц получает важные результаты.

Таким образом, основная идея Гельмгольца состоит в том, чтобы найти такие механические системы, процессы в которых могли бы быть аналогами тепловых явлений. Так как основной, несводимой к обычной механике чертой тепловых процессов является их необратимость, то Гельмгольц ищет такое видоизменение механики, которое позволило бы эти явления интерпретировать механически хотя бы ценой введения ненаблюдаемых, скрытых механических движений.

Рассмотрев поэтому некоторые другие случаи, когда кинетический потенциал выражается в иной, обобщенной форме, Гельмгольц отмечает, что подобные динамические задачи имеют многочисленные аналогии в других физических явлениях, которые нельзя свести к известным движениям тяжелых масс, — термодинамических и электродинамических.

«Именно поэтому в современной теоретической физике наблюдается стремление вывести различные наблюдаемые закономерности из такого общего принципа, который по своей внешней форме согласовывался бы с обобщенным принципом Гамильтона и со следующими из него обобщенными уравнениями Лагранжа, в которых, однако, выражение кинетического потенциала не подчинено первоначальным ограничениям формы, а является для каждой области искомой обобщенной функцией двух рядов переменных q и $\dot{q}$, которые не должны попарно соответствовать друг другу»¹.

Гельмгольц исследовал и вопрос о том, какая форма кинетического потенциала требуется электродинамикой Максвелла². При этом оказалось, что скорости распространения электрического поля входят в выражение кинетического потенциала в виде функции второй степени, но коэффициенты при скоростях не являются постоянными, а представляют собой переменные величины. Кроме того, в случае действия постоянного магнита появляются члены, линейные относительно скоростей.

¹ Helmholtz H., Vorlesungen über die Dynamik..., стр. 368—369.

² Helmholtz H., Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik, Wiss. Abh., т. 3, стр. 476—504. (Написано в 1892.) См. также: Schwarzschild, Zur Elektrodynamik, Nachr. v. d. Königl. Ges. zu Göttingen, 1903, стр. 126—141, 247—278.

Наконец, Гельмгольц отмечает, что все световые явления в основном объясняются, если предположить, что эфир есть среда, свойства которой аналогичны свойствам упругих тел. А если так, то к этим световым явлениям так же применим принцип наименьшего действия, который, таким образом, охватывает значительное количество явлений, не входящих в обычную механику.

Механицизм никогда не был чем-то единым. Не говоря уже о борьбе картезианства и ньютонианства внутри единого механистического (и в основном материалистического) миропонимания по вопросу о конкретном характере выполнения механистической программы, мы находим целый ряд оттенков, обусловленных самыми разнообразными причинами. Если сравнить одинаковые тенденции произведений авторов, принадлежащих к различным школам и странам, то бросается в глаза значительное различие в вопросе о том, как собственно надо понимать задачу построения механической картины мира. Более прямолинейному инженерно-модельному механицизму английских ученых противостоит более гибкий (скрытые движения) механицизм школы Гельмгольца¹. Это течение, основы которого были заложены Гельмгольцем и которое нашло развитие в трудах Больцмана и Герца, представляет собой любопытную разновидность механицизма, интересную еще и в том отношении, что оно резко противопоставило себя энергетизму — одному из имевших место в истории физики учений о науке как о системе «принципиально наблюдаемых величин».

Многое в борьбе Больцмана за атомистику, за право пользоваться в физике понятиями и величинами, относящимися к ненаблюдаемым непосредственно объектам, было подготовлено Гельмгольцем. Гельмгольц сделал смелую попытку завершить физику в том отношении, что он предложил единый универсальный метод объяснения всех известных и неизвестных процессов при помощи скрытых движений скрытых масс. Вместо того, чтобы отыскивать специфичное в явлениях, он разработал такую систему физических понятий, которая, по его мнению, в принципе решала задачу построения механической картины мира. Последним и исходным, не требующим объяснения свойством вещества, в этой картине утверждалось движение в явной и скрытой формах. Механическая и всякая другая сила при такой точке зрения становилась вторичным понятием. В этом и состояло ее положительное содержание.

Гельмгольц широко раздвинул границы применения принципа Гамильтона. Он не только применил его ко всем обратимым явлениям, но пытался при его помощи охватить механистической схемой принцип энтропии без введения каких-либо вероятностных соображений. Принцип Гамильтона оказался для Гельмгольца наиболее

¹ Здесь напрашивается параллель с уровнем промышленного развития Англии и Германии той эпохи.

подходящим средством для разработки того «кинетического» аспекта механицизма, к которому он пришел в 80-х годах XIX в., преодолев «динамические» тенденции, присущие ему в первый период научной деятельности. Гельмгольц применил своеобразный модельный метод, который представляет большой интерес, во-первых, с точки зрения стремления объяснить макроскопические явления скрытыми движениями и, во-вторых, из-за смелого введения в науку не наблюдаемых реальностей (скрытые движения), о существовании которых мы можем заключать только на основе характера их внешнего проявления.

Методологически скрытые движения представляют собой вариант непознаваемых сущностей, отделенных от их наблюдаемых (и измеряемых) проявлений. Отсюда росла иероглифическая теория познания Гельмгольца, и она же питала развитие концепции скрытых движений.

Этот круг идей одного из крупнейших представителей физики XIX в. был воспринят целой группой ученых (Герц и другие). Но уже на следующем этапе развития физики исчезла прежняя твердая уверенность в возможности разрешить задачу механистического сведения не только путем, разработанным Гельмгольцем, но и вообще каким либо путем. Мощное развитие электродинамики, электроники и теории атома непосредственно показало ограниченность и недостаточность прежних представлений.

Направление Гельмгольца не оправдало возлагавшихся на него надежд и оказалось в стороне от главных путей развития физики.

Попытка вывести законы теории теплоты непосредственно из общих принципов механики без привлечения новых, чуждых механике понятий хотя и оказалась формально осуществимой при условии некоторого видоизменения этих принципов, но не привела ни к выяснению сущности необратимых процессов, ни к действительному обогащению физической картины мира. Найденные на основе преобразованных принципов механики аналоги термодинамических законов не принесли сколько-нибудь нового и перспективного понимания сущности тепловых явлений, в то время как статистическая физика вскрыла глубокий смысл необратимости в учении о вероятности состояния системы и флуктуациях, представление о которых глубоко чуждо классической механике.

Хотя рассмотренное направление не решило и не могло решить стоявших перед ним проблем, оно, как это обычно и бывает, дало ряд результатов, которые обогатили физическую науку. К таким результатам должны быть отнесены обобщение Гельмгольцем принципа Гамильтона, представление и математическая теория циклических систем, понятие об обобщенных вариациях и об условнопериодических движениях. В различных отделах классической и новой физики, весьма далеких от той области, в которой эти результаты возникли, они нашли немаловажное применение.

3. Вариационные принципы механики и теория теплоты в работах Больцмана, Дж. Дж. Томсона, Планка

Отношение Больцмана (1844—1906) к проблеме связи или сведения теории теплоты к механике прошло две стадии. На первой стадии подход и направление рассмотрения этой проблемы Больцманом является механико-атомистическим вариантом концепции Гельмгольца и Клаузиуса. Преодолев это направление, Больцман пришел



Л. БОЛЬЦМАН (1844—1906)

к статистически-атомистическому решению задачи. Материалистическое и атомистическое мировоззрение доминирует в творчестве Больцмана. Оно же выдвинуло его на первую линию борьбы с опустошавшим науку махизмом и энергетикой.

Материалист Больцман формулирует строго детерминистическое мировоззрение, причем детерминизм понимается им в смысле характерной для классической механики однозначной определенности следующим образом: «Предварительным условием всякого научного познания является принцип однозначной определенности процессов природы, а в применении к механике — однозначная определенность всех движений. Это означает, что движение тела не происходит

само, чисто случайно то так, то иначе, но что оно однозначно определено обстоятельствами, в которых тело находится. Если бы каждое тело двигалось, как хочет, если бы в одинаковых обстоятельствах в одном случае следовало бы одно, а в другом случае другое движение, то мы могли бы только с любопытством глядеть на ход явлений, но не могли бы исследовать их. Однако в этом утверждении заключается следующая неопределенность: обстоятельства, при которых происходит движение какого-либо тела, строго говоря, охватывают всю вселенную. Одно и то же не находится дважды в одном и том же состоянии. Следовательно, мы должны условие сформулировать таким образом, чтобы во всех случаях, когда среда, расположенная вблизи наблюдаемого тела, находится в некотором одном и том же состоянии, должно было бы возникать одно и то же движение.

Индуктивный метод ставит нас в значительно менее благоприятное положение, чем дедуктивный. Если мы, пользуясь этим последним методом, начинаем перечисление законов действия, не считаясь ни с каким опытом, то от нас самих зависит с самого начала произвольно установить, от каких обстоятельств зависит движение тела и какие обстоятельства не оказывают на него влияния. Пользуясь индуктивным методом мы, наоборот, должны опытным путем определить понятие «расположенной непосредственно вблизи» среды, состояние которой влияет на движение тела. По теории близкодействия только непосредственно прилегающие элементы объема определяют движение какого-либо объема. По этой теории земное притяжение действует не непосредственно на тяжелое тело, а действует только на элементы объема среды, через которую влияние распространяется на тяжелое тело. Но если мы хотим остаться верными принципам настоящего способа изложения, то мы не имеем права в основу всеобщего построения механики полагать теорию близкодействия; скорее мы должны для этого пользоваться только теми законами, которые не содержат в себе ничего произвольного, но однозначно и необходимо навязаны нам опытом. Но теория близкодействия, какой бы вероятной а priori она, быть может, некоторым ни казалась, совершенно выходит за пределы чисто фактического знания и в настоящее время ни в коем случае не может быть разработана в подробностях. Мы бы впали тогда в ту же самую ошибку, которую мы поставили в упрек способу изложения Герца. Мы должны или изобрести совершенно произвольные специальные гипотезы о свойствах и характере близкодействия, или удовольствоваться общими неопределенными представлениями о нем¹.

В этом же курсе механики Больцман помещает специальную главу под названием «Принцип действия как основной принцип

¹ Boltzmann L., Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik II Teil, Leipzig, 1923, стр. 276—278.

естествознания». К этой проблеме он подходит исторически, указывая прежде всего на то, что представление о центральных силах в своем развитии явно или скрыто привело к постепенному развитию механики в ее современной форме. Однако, — отмечает Больцман, — отсюда еще не следует делать вывод, что поэтому представление о центральных силах всегда должно оставаться основанием механики. Случаи, когда положение, которое вначале найдено при определенных ограничивающих условиях, впоследствии оказывается действительным в более общих случаях, встречаются достаточно часто. Такие принципы механики, как принцип виртуальных перемещений или наименьшего действия, могут быть действительны и при условиях, когда задача не сводится к действию центральных сил. Если же взять за основу принцип энергии, то надо принять еще ряд других положений, так как, по мнению Больцмана, принцип энергии гораздо более специален, чем уравнения механики, и вывести всю совокупность опытного материала из единого принципа не удалось бы. Если избрать принцип Гамильтона, то в введении дополнительных положений нет необходимости, так как из этого принципа строго математически следует совокупность уравнений механики.

При этом можно рассматривать даже такой случай, когда состояние системы определяется не теми координатами, которые фиксируют ее положение в трехмерном пространстве, а «координатами» иной физической природы. Так, например, Гиббс, Гельмгольц и другие ученые установили такие фундаментальные соотношения для изменения температуры, электрического состояния и т. п., которые содержат в себе, в качестве частных математических случаев, общие принципы механики и в особенности принцип Гамильтона. «Однако, эти соотношения, — говорит Больцман, — с другой точки зрения, являются гораздо менее общими. Иногда они действительны исключительно для таких состояний, которые лишь бесконечно мало отличаются от состояния равновесия; далее, они содержат в себе неясности, чуждые механике, как например, понятие энтропии, необратимости и многочисленные эмпирически полученные свойства температуры, электричества и т. д., представление о которых отнюдь не является таким простым, как представление о геометрических соотношениях точек»¹.

Все же остается бесспорным тот факт, что в различных областях физики процессы описываются уравнениями, которые аналогичны уравнениям механики. Чем можно объяснить это?

Вот ответ Больцмана: «Появление в теории электричества, в теории теплоты и т. д. уравнений, которые аналогичны уравнениям механики, так же как особые свойства встречающихся в этих

¹ Boltzmann L., Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik, II Teil, Leipzig, 1923, § 35; «Сборник», стр. 466.

теориях величин, можно объяснить тем, что эти явления вызваны скрытым механическим движением. Неясности в отношении понятий, встречающихся в других разделах физики, например энтропии и необратимости, можно выяснить с помощью механических образов, применяя исчисление вероятностей к поведению множества материальных точек.

Когда я говорю, что механические образы могли бы осветить подобные неясности, то этим я не хочу сказать, что простейшие элементы положения и движения материальных точек в пространстве являются чем-то абсолютно объяснимым. Наоборот, объяснить последние элементы нашего познания вообще невозможно, так как объяснить — означает свести к известному, простейшему и поэтому то, к чему все сводится, всегда остается необъясненным. Поэтому если бы все объяснялось основными простейшими понятиями механики, то зато они остались бы навеки такими же необъяснимыми, какими для нас являются понятия учения об электричестве¹.

Таким образом, Больцман приходит к правильному выводу, если только его истолковать исторически. На каждой стадии развития науки существуют предельные понятия, которые входят в физическую науку как последние (на этой стадии), несводимые элементы познания. Все, кроме них, подлежит детерминистическому объяснению, они же остаются необъясненными, и решение задачи объяснения этих предельных понятий и составляет содержание следующего высшего этапа развития науки. Выбор этих «последних» понятий для каждой данной ступени развития науки исключительно важен и образует уже проблему, в известном смысле слова, пограничную между физикой и философией. Во всяком случае для XIX в. — века классической физики — характерно стремление к единой или хотя бы объединенной физической картине мира, сведенной к минимальному числу простейших наглядных, представимых понятий. Это могли быть понятия механики, но не обязательно. Больцман говорит по этому поводу:

«Я не хочу спорить о том, что является более ясным — понятие положения в пространстве или понятие температуры, или электрического заряда — подобный спор был бы беспредметным. Но все же мы сильно выиграли бы в ясности картины, если бы могли посредством представления о движении материальных точек в пространстве, т. е. посредством одного-единственного и единого принципа — объяснить не только все явления движения твердых, жидких и газообразных тел, но и теплоту, свет, электричество, магнетизм, гравитацию. Это было бы яснее, чем употребление для каждой из этих действующих сил природы целого инвентаря таких совершенно необычных понятий, как температура, электрический заряд,

¹ Boltzmann L., Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik, II Teil, Leipzig, 1923, § 39.

потенциал — характеризуем ли мы эти необычные понятия как нечто совершенно самостоятельное или только как разрозненные энергетические факторы, постулируемые для каждой формы энергии отдельно»¹.

Какова же перспектива развития физической науки? На этот вопрос Больцман отвечает блестящим окончанием § 35² своих лекций по механике, которое приводим здесь полностью :

«Если говорить о грядущих столетиях или даже тысячелетиях, то я охотно соглашусь с тем, что было бы смелым надеяться, что современная механическая картина сохранится навеки — даже лишь в своих существеннейших чертах.

Поэтому я очень далек от того, чтобы недооценивать попытки отыскать всеобщие уравнения, частными случаями которых являются механические уравнения. Я был бы удовлетворен результатом этой книги, если бы я, доказав, какой ясной может быть и должна быть картина мира, содействовал бы созданию иной, более объемлющей и ясной картины мира, будь то на основе принципа энергии, или принципа стационарного действия, или прямейшего пути. Я хочу только противодействовать легкомыслию, которое объявляет старую механическую картину мира преодоленной точкой зрения, не дождавшись, пока будет в деталях выработана иная, такого же рода картина мира — начиная с первоосновы и до применения ее к важнейшим явлениям, давно и исчерпывающе описанным старой картиной мира ; легкомыслию, которое даже не представляет себе трудностей создания новой картины мира. Если стремиться избежать картины материальных точек, то нельзя впоследствии вводить в механику материальные точки, а следовало бы исходить из другого рода единичных сущностей или элементов, чьи свойства были бы описаны так же ясно, как свойства материальных точек.

Изложенное выше я написал приблизительно семь лет тому назад. Заключительный абзац представляет собой, следовательно, требование, выставленное мною семь лет назад (таков возраст рукописи настоящей книги). Я преднамеренно опубликовал все это без изменений. То, чего я ожидал через столетия или даже тысячелетия, наполовину свершилось в течение семи лет.

Но луч надежды на немеханическое объяснение природы исходил не от энергетики, не от феноменологии, а от атомной теории, фантастические гипотезы которой так же превосходят старую атомную теорию, как ее элементарные образы по своей малости превосходят старые атомы. Излишне говорить о том, что я имею в виду современную электронную теорию. Она, конечно, не стремится объяснить понятие массы и силы, закон инерции из простейшего,

¹ Boltzmann L., Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik, II Teil, Leipzig, 1923, § 39.

² Там же, «Сборник», стр. 467—468.

легко понимаемого; ее простейшие основные понятия и законы наверно останутся такими же необъяснимыми, как законы механики для механической картины мира. Но преимущество возможности вывести всю механику из других представлений, все равно необходимых для объяснения электромагнетизма, было бы так же велико, как и обратное — механическое объяснение явлений электромагнетизма. Пусть эта первая возможность осуществится, и исполнится мое требование, выдвинутое семь лет назад.

Таким образом, Больцман предчувствовал не только возможность немеханического объяснения явлений природы, но и указывал, что путь к такому объяснению лежит в изучении законов микрокосмоса.

Такая точка зрения сложилась у Больцмана в начале XX в. под влиянием прогресса физики. За сорок лет до этого он еще упорно искал механическое объяснение всех явлений природы и в первую очередь тепловых. При попытке решения этой задачи он исходил из соображений, отчетливо сформулированных Гиббсом, который справедливо заметил, что «если мы желаем найти в рациональной механике априорное обоснование термодинамических принципов, мы должны искать механические определения температуры и энтропии»¹.

Первым исследовал этот вопрос Л. Больцман в 1866 г. в работе «О механическом значении второго начала теории теплоты»².

Отправным пунктом этого исследования Л. Больцмана так же, как работы Клаузиуса³ 1870 г., было рассмотрение среднего значения силовой функции и живой силы системы, в которой движения являются периодическими, и вариаций этих средних значений, когда внешние воздействия на систему изменяются. Получаемые при таком исследовании теоремы принадлежат к той же общей категории, что и принцип наименьшего действия или принцип Гамильтона, который в явной или неявной форме как раз имеет дело с вариациями этих средних значений.

Больцман прежде всего указывает, что давно установлено тождество первого начала теории теплоты и принципа живых сил. Однако для второго начала подобное соотношение найти не удалось. Он ставит себе целью дать доказательство второго начала и связать его с соответствующим законом механики⁴.

При постоянной температуре атомы описывают криволинейные траектории. Для этих траекторий Больцман вводит предположение,

¹ Гиббс Дж. В., Основные принципы статистической механики, излагаемые со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики, Гостехиздат, М.—Л., 1946, гл. XIV, стр. 165.

² Boltzmann L., Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, Sitzungsberichte, Wien, Akad., т. LIII, 1866, стр. 195.

³ Clausius R., Über die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Prinzipien, Pogg. Ann., 142, 1871, стр. 433.

⁴ Boltzmann L., Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, Sitzungsberichte, Wien, Akad., т. LIII, 1866, стр. 195.

что для каждого состояния тела за достаточно большой промежуток времени $t_1 - t_0$ атомы возвращаются в исходное положение с прежней скоростью и направлением движения, т. е. описывают замкнутую кривую и по прошествии этого времени повторяют свое движение, если не полностью, то с достаточно большим приближением. Средняя живая сила в течение времени $t_1 - t_0$ должна рассматриваться как средняя живая сила атома в течение очень долгого времени и поэтому температура каждого атома есть (нестрогость этой записи непосредственно очевидна)

$$\bar{E}_{\text{кин}} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt}{t_1 - t_0}. \quad (65)$$

Обозначим через t'_1, t'_0 моменты времени на траектории, бесконечно близкой к первоначальной, и найдем вариацию интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt = \frac{m}{2} \int_{s_0}^{s_1} v ds,$$

т. е.

$$\delta \frac{m}{2} \int_{s_0}^{s_1} v ds = \frac{m}{2} \int_{s'_0}^{s'_1} v' ds' - \frac{m}{2} \int_{s_0}^{s_1} v ds, \quad (66)$$

где штрихами обозначены величины, относящиеся к измененной (варьированной) кривой. Если принять во внимание вариацию границ, то

$$\frac{m}{2} \delta \int_{s_0}^{s_1} v ds = \frac{m}{2} \int_{s_0}^{s_1} (\delta v ds + v \delta s). \quad (67)$$

Пусть X, Y, Z — компоненты сил, действующих на атом:

$$d \frac{mv^2}{2} = X dx + Y dy + Z dz;$$

$$\begin{aligned} d \delta \frac{mv^2}{2} &= \delta X dx + X \delta dx + \dots = d(X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) + \delta X dx - \\ &\quad - dX \delta x + \delta Y dy - dY \delta y + \delta Z dz - dZ \delta z. \end{aligned}$$

Интегрируя и полагая, что при отсутствии сил $\delta \frac{mv^2}{2} = \epsilon$, где ϵ — некоторая бесконечно малая величина, получим

$$\delta \frac{mv^2}{2} - \epsilon = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z + \int (\delta X dx - dX \delta x + \dots).$$

Отсюда, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{2} \delta \frac{mv^2}{2} &= \frac{t_1 - t_0}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (X \delta x + \dots) dt = \\ &= \frac{t_1 - t_0}{2} \varepsilon + \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \dots \right) dt. \end{aligned} \quad (68)$$

Так как далее $ds = \sqrt{\sum dx_i^2}$, а $v = \frac{ds}{dt}$, то

$$\frac{m}{2} \int_{s_0}^{s_1} v \delta ds = \frac{m}{2} \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{dx}{dt} d \delta x + \dots \right). \quad (69)$$

Подставляя (68) и (69) в (67), получим:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \delta \int_{s_0}^{s_1} v ds &= \frac{t_1 - t_0}{2} \varepsilon + \int_{t_0}^{t_1} d \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) = \\ &= \frac{t_1 - t_0}{2} \varepsilon + \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z \right) \right\} \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned} \quad (70)$$

Если в моменты времени t_0 и t'_0 атом занимает то же положение и имеет ту же скорость, что в моменты t_1 и t'_1 , то последний член справа обращается в нуль и остается

$$\varepsilon = \frac{m \delta \int_{s_0}^{s_1} v ds}{t_1 - t_0} = \frac{2 \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt}{t_1 - t_0};$$

разделив это выражение на температуру T (см. (65)), получим:

$$\frac{\varepsilon}{T} = \frac{2 \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt}{\int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt} = 2 \delta \ln \int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt. \quad (71)$$

Обозначим количество теплоты через δQ , тогда

$$\delta Q = \sum \varepsilon = 2 \sum \frac{\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt}{\int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt}, \quad (72a)$$

$$\frac{\delta Q}{T} = 2 \delta \sum \ln \int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt. \quad (72b)$$

Дадим принципу наименьшего действия форму несколько более общую, чем обычно. «Пусть, — говорит Больцман, — некоторая система точек, находящихся под действием сил, для которых действителен принцип живых сил, претерпевает некоторые произвольные движения, причем каждая точка имеет некоторую бесконечно малую живую силу и все точки вынуждены двигаться по бесконечно близким кривым, тогда $\delta \sum \frac{m}{2} \int v ds$ равна сумме упомянутых живых сил, умноженных на половину времени, в течение которого происходит движение ...»¹. Этот закон при $\varepsilon = 0$ и закрепленных границах приводится к обычной форме принципа наименьшего действия.

Рассмотрим теперь некоторые обобщения основной формулы принципа Гамильтона :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \dot{p}_k \right) \delta q_k + \sum_k \left| p_k \delta q_k \right|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Заметим, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$, а последний член справа равен нулю в силу условия, наложенного на вариации конечных точек.

Если имеет место вариация координат q в начале и конце движения, то

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \sum_k \left| p_k \delta q_k \right|_{t_0}^{t_1}. \quad (73)$$

Если на систему наложены связи вида

$$\varphi_i(x_i, y_i, z_i) = k_i,$$

которые в действительном движении постоянны, но в варьированном также могут быть варьированы, то в этом случае можно рассматривать φ_i как обыкновенные координаты, вводя силы Φ_i так, чтобы сохранить φ_i постоянными и равными k_i при действительном движении системы. Пусть потенциальная энергия, с которой связаны силы Φ_i , будет

$$\bar{V} = \sum_i A_i (\varphi_i - k_i)^2.$$

В качестве общей формы функции Лагранжа можно написать

$$\bar{L} = L - \bar{V},$$

¹ Boltzmann L., Über die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, Sitzungsberichte, Wien, Akad., т. LIII, 1866, стр. 197.

где $L = T - V$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \bar{L} dt = \sum_k \left| p_k \delta q_k \right|_{t_0}^{t_1} + \sum_i \left| \pi_i \delta \varphi_i \right|_{t_0}^{t_1}, \quad (74)$$

где π_i — импульсы, соответствующие координатам φ_i . В действительном движении все π_i равны нулю, так как в этом случае k_i и, следовательно, φ_i постоянны. Последнее слагаемое равенства (74) равно нулю, так как все π_i в начале и конце движения равны нулю. Отсюда находим

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \sum_k \left| p_k \delta q_k \right|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \delta \bar{V} dt,$$

а так как $T + V = E$, то $L = 2T - E$, и подставив, получим

$$2 \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta E + \delta \bar{V}) dt + \sum_k \left| p_k \delta q_k \right|_{t_0}^{t_1}. \quad (75)$$

Рассмотрим теперь вариацию интервала времени, т. е. предположим, что варьированное движение происходит от момента времени $t_0 + \delta t_0$ до $t_1 + \delta t_1$, а действительное — от момента t_0 до t_1 . Как можно показать, это дополнительное варьирование оставит форму выражения (75) неизменной и только добавит δt_0 и δt_1 к пределам интегрирования в правой части этого равенства. Следовательно, в случае вариации времени выражение (75) можно записать так:

$$2\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1} (\delta E + \delta \bar{V}) dt + \sum_k \left| p_k \delta q_k \right|_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1}. \quad (76)$$

С помощью аналогичного уравнения Клаузиус в 1871—1872 гг. впервые получил важные для термодинамики результаты (см. разд. 1); в 1897 г. Больцман вывел их в более общем случае.

Будем рассматривать теплоту как энергию неупорядоченных молекулярных движений, которая не может быть превращена в полезную работу способами, имеющимися в нашем распоряжении. Классический пример газа в цилиндре, закрытом подвижным поршнем, хорошо поясняет суть дела. Для того, чтобы изменить состояние этого газа, можно нагреть стенки цилиндра. Здесь действуют обычные механические силы, так как нагрев стенок цилиндра означает просто сообщение им дополнительной колебательной энергии, в силу чего молекулы газа будут отскакивать от этой стенки с большей кинетической энергией. В этом и состоит механизм

нагревания газа. Этот чисто механический процесс предполагает наличие очень быстрых колебаний, характеризующихся чрезвычайно высокой частотой. Движение описанного типа называется в классической физике теплотой. Механическая же работа, совершаемая при каком-либо термодинамическом изменении, предполагает наличие непрерывно действующих и часто даже не зависящих от времени сил. Представление о некоторой средней силе, обусловленной действием ударяющихся о поршень молекул, требует, чтобы в промежутке времени между столкновениями молекул с поршнем скорость поршня была постоянной и весьма малой.

Рассмотрим механическую систему из большого числа молекул. Пусть q_i — координаты отдельных молекул, называемые микроскопическими координатами. Связи $\varphi_j(q_i) = k_j$ определяются макроскопическими координатами φ (в случае нашего примера наличие связей выражается в том, что молекулы остаются внутри объема цилиндра под поршнем). Особенность этой системы в том, что движение ее зависит от всех микроскопических координат, которые, однако, недоступны непосредственному наблюдению. Единственные величины, которые можно измерить, это макроскопические переменные, соответствующие j связям.

Пусть некоторая траектория, характеризующаяся координатами q_k , изображает данное физическое состояние рассматриваемой системы, а некоторая другая траектория с $q_k + \delta q_k$ изображает другое физическое состояние (с иными V, p, T). Рассмотрим переход системы из какой-либо точки первой траектории в некоторую точку второй. Для этого необходимы силы, которые могут подействовать на все молекулы и произвести работу, эквивалентную теплоте, сообщенной системе.

Если при таком переходе изменится объем газа, то будет произведена внешняя работа

$$\delta A = \delta \bar{V},$$

а так как

$$\delta Q = \delta E + \delta A,$$

где δE — увеличение полной внутренней энергии E , то

$$\delta Q = \delta E + \delta \bar{V},$$

т. е. теплота, сообщенная системе, равна сумме приращения внутренней неупорядоченной энергии и упорядоченной работы, произведенной системой.

Пусть переход совершается непрерывно и постепенно от момента t_0 до момента t_1 . Изменение координат q_k к моменту времени t будет

$$d(\delta q_k) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \delta q_k.$$

Теплота, сообщенная системе за время dt , будет

$$d(\delta Q) = \delta Q \frac{dt}{t_1 - t_0},$$

а работа за тот же промежуток времени

$$d(\delta \bar{V}) = \delta \bar{V} \frac{dt}{t_1 - t_0}.$$

Если к моменту t переход закончится, то общее количество тепла, сообщенного системе за весь переход:

$$\Delta Q = \int_{t_0}^{t_1} d(\delta Q) = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \delta Q dt$$

или

$$\Delta Q = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (\delta E + \delta \bar{V}) dt,$$

где правая часть нам известна из (75). Следовательно,

$$\Delta Q = \frac{1}{t_1 - t_0} \left[2\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt - \sum_k \left| p_k \delta q_k \right|_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1} \right] \quad (77)$$

Это и есть общий вид формулы Больцмана.

Ее легко применить к случаю периодического движения, так как тогда исчезает последний член. В этом случае

$$\int T dt = \bar{T} \tau,$$

где $\bar{T}$ — среднее значение кинетической энергии, τ — период. Таким образом, для периодического движения

$$\Delta Q = \frac{1}{\tau} 2\delta \int T dt = \frac{1}{\tau} 2\delta(\bar{T} \tau). \quad (78)$$

Рассмотрим некоторые применения формулы Больцмана. При адиабатическом изменении $\Delta Q = 0$ и

$$\bar{T} \tau = \text{const},$$

т. е. $\bar{T} \tau$ — адиабатический инвариант¹.

¹ Определение адиабатического инварианта: величина, не меняющаяся при бесконечно медленном изменении параметров системы (например, связей и т. п.).

Для системы, находящейся в гармоническом периодическом движении, имеем, как известно (так как $\overline{\sin^2 \omega t} = \overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$),

$$\bar{V} = \bar{T} = \frac{1}{2} E.$$

Для этого случая уравнение Больцмана дает

$$dQ = \frac{d(\tau E)}{\tau}.$$

Если адиабатическое изменение влияет на период, то можно вычислить среднюю силу, с которой совершающая колебания система действует на параметры, соответствующие связям. В этом случае адиабатический инвариант будет

$$2 \bar{T} \tau = \tau E = \text{const.}$$

В процессе изменения $\frac{d(\tau E)}{\tau} = 0$ и

$$dA = -dE = E \frac{d\tau}{\tau}.$$

Подведем итоги. При выводе уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона для системы, имеющей потенциальную энергию, мы при интегрировании по частям второго члена вариации интеграла действия

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right] dt = 0$$

получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) dt = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt.$$

Первый член справа исчезает в силу условия, что $\delta q_i = 0$ при $t = t_0$ и $t = t_1$. Если отказаться от этого условия, то

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (79)$$

Как уже было отмечено, $\int_{t_0}^{t_1} L dt$ есть среднее по времени от функции L , умноженное на $t_1 - t_0$. Обозначим это среднее по времени через $\bar{L}$; для ансамбля молекул $\bar{L}$ не зависит от координат и скоростей отдельных молекул, если среднее взято за время, которое

велико по сравнению с временными характеристиками движения молекул. Так как среднее время между столкновениями молекул, например, в воздухе (при нормальном давлении и 300°K) равно приблизительно $3 \cdot 10^{-10} \text{ сек}$, то при стационарном состоянии газа можно выбрать без труда достаточно большой измеримый промежуток времени и рассматривать $\bar{L}$ как функцию макроскопических величин, характеризующих состояние газа. Тогда из (79) получим

$$\delta \bar{L} = \frac{\sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1}}{t_1 - t_0}.$$

Выбрав интервал времени $\Delta t = t_1 - t_0$ достаточно большим, можно сделать правую часть этого уравнения произвольно малой, если только числитель не возрастает с ростом интервала. В таком случае для газа получим

$$\delta \bar{L} = 0. \quad (80)$$

Существование такой функции $\bar{L}$, вариация которой исчезает для каждого малого отклонения от равновесия, более строго показал Дж. Дж. Томсон¹ в 1888 г.

Перейдем теперь к построению функции $\bar{L}$. Так как непосредственная подстановка T и V с последующим усреднением представляется сложной и по большей части не достигает цели, то обычно применяется следующий метод.

Согласно уравнению Лагранжа, $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ есть обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q_i . Если q_i — внешняя координата², то $\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i} = F_i$ будет средняя сила, стремящаяся изменить эту координату. Среднее значение функции Лагранжа будет тогда

$$\bar{L} = \sum \int F_i dq_i - f, \quad (81)$$

где член f зависит только от некоторой внутренней структуры и свойств взаимодействующих молекул; это — величина типа потенциальной энергии, а потому должна иметь знак минус.

Проиллюстрируем этот метод на простом примере. Рассмотрим идеальный газ, для которого

$$PV = NkT, \quad (82)$$

где k — постоянная Больцмана, а N — число Авогадро. Поместим его в цилиндр, закрытый подвижным поршнем, который находится

¹ Thomson J. J., Applications of Dynamics to Physics and Chemistry, London, 1888, стр. 140.

² Внешней координатой мы называем здесь любой параметр, характеризующий состояние ансамбля молекул как целого.

на расстоянии x от дна цилиндра. Обозначив через s площадь поверхности поршня, напомним

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x} = sP.$$

Так как $s = \frac{\partial V}{\partial x}$, то, выражая P по уравнению (82), получим

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial x} = \frac{NkT}{V} \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (83)$$

Проинтегрировав это уравнение, найдем ту часть $\bar{L}$, которая зависит от внешней координаты V . К этой части надо прибавить $-f$.

Интегрируя уравнение (83), найдем

$$\bar{L} = NkT \ln \frac{V}{V_0} + F(T) - f, \quad (84)$$

где V_0 — произвольная постоянная, а $F(T)$ — неизвестная функция температуры. Пусть имеем, например, двухатомный газ с энергией диссоциации, равной ϵ , и примем состояние полной диссоциации на атомы за нуль потенциальной энергии. Тогда в нашем случае потенциальная энергия будет $-N\epsilon$ и тогда уравнение (84) будет иметь вид

$$\bar{L} = NkT \ln \frac{V}{V_0} + F(T) + N\epsilon. \quad (85)$$

Таким образом, чтобы построить $\bar{L}$, мы были вынуждены прибегнуть к закону Бойля—Мариотта и рассматривать только среднюю величину, отказавшись от рассмотрения мгновенных состояний системы. В силу этого метод, строго говоря, стал статистическим и наименование его динамическим надо принимать с большими ограничениями. По существу, мы имеем лишь формальную аналогию со строгим динамическим методом, изложенным в гл. II и III.

Уравнение $\delta \bar{L} = 0$ представляет собой аналогию термодинамического соотношения для энтропии $\delta S = 0$. Существование такой функции представляет собой основное утверждение второго начала термодинамики. С другой стороны, налицо полная аналогия между выражением (85) для $\bar{L}$ и обычным выражением для энтропии идеального газа. Пренебрегая последним членом в уравнении (85), получим

$$S = \frac{\bar{L}}{T}. \quad (86)$$

Таким образом, пока газ находится в устойчивом состоянии $T = \text{const}$, выражения (86) и (80) эквивалентны. Эта эквивалентность некоторым образом оправдывает применение уравнения (80) к задаче идеального газа. Распространение найденной таким

образом для частного случая аналогии представляется мало полезным из-за неизбежности привлечения чуждых механике понятий. Многочисленные попытки получить второе начало как следствие какого-либо вариационного принципа механики, сделанные во второй половине XIX в., показали, что это неосуществимо без дополнительных эмпирических или математических допущений. Поэтому укрепилось воззрение на второе начало как на независимый принцип, представляющий собой обобщение многочисленных экспериментальных данных и наблюдений, а объяснение физического смысла его было найдено независимо от лагранжевой функции в статистической трактовке.

Больцман пошел по пути введения новых, не сводимых к механике понятий (вероятность состояния системы), по пути исследования закономерности не динамического, а статистического типа (разработка статистической механики). Отметим здесь только основную идею статистической механики в интересующем нас аспекте.

В работе 1871 г. Больцман уже ясно сознает связь второго начала с теорией вероятностей и не пытается вывести этот закон для отдельных точек. Он говорит: «Для случая замкнутых путей всех атомов я уже в 1866 г. нашел величину, дифференциал которой есть $\frac{dQ}{T}$.

Но если траектории атомов не замкнуты, то, пока вероятности различных положений атомов не определены, могут быть найдены и такие частные случаи, когда $\frac{dQ}{T}$ не есть полный дифференциал. Следовательно, строгое распространение доказательства на этот случай возможно лишь при рассмотрении этих вероятностей»¹.

Больцман, таким образом, пришел к выводу, что применение средних величин, столь характерное для изложенного толкования второго начала термодинамики, имеет не случайный, а принципиальный характер. Использование средних величин для характеристики макросостояний и их связь с массами, координатами и скоростями отдельных атомов и молекул в исследуемой совокупности, необходимость применения статистических методов, внутренне связанных с законом больших чисел, отражали специфику проблемы и являлись основой разработки новых максвелл-больцмановских методов выяснения сущности и физического смысла не только второго начала термодинамики, но и закономерностей теплового движения в целом².

¹ Boltzmann L., Analytischer Beweis des 2. Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über d. Gleichgewicht d. lebendiger Kraft, Sitzungsber. d. Wien. Akad., т. 63, Mai, 1871, стр. 719.

² Важные работы по обоснованию второго начала термодинамики принадлежат также русскому ученому Н. Н. Пирогову. Он пришел к выводу о необходимости статистической трактовки второго начала термодинамики. Данный им анализ начал термодинамики представляет большой интерес для истории второго начала.

В статистической механике Гиббса фундаментальное значение имеет гипотеза о том, что все механические системы, входящие в один и тот же ансамбль, будут иметь одни и те же динамические свойства. Иначе говоря, предполагается, что для всех систем одного и того же ансамбля энергия будет одинаково зависеть от координат и обобщенных импульсов системы, и что, следовательно, для всех систем внешние силы и положения тел, окружающих систему, одни и те же. В этом смысле нет индивидуальных различий между системами; существует лишь различие их внутренних координат и импульсов.

Гиббсово построение статистической механики исходит из канонических уравнений и функции Гамильтона. Он рассматривает общий случай, когда силы, действующие на систему, не являются консервативными, т. е. для них не существует потенциальной функции. Кроме того, Гиббс рассматривает случай, когда потенциал существует, но потенциальная энергия зависит (кроме других переменных) еще от внешних координат.

Введем в рассмотрение, кроме координат q_i системы, также еще координаты внешних тел a_i .

Основной с точки зрения механики факт, установленный Гиббсом, состоит в том, что динамическая природа системы определяется функциями, которые выражают кинетическую энергию через обобщенные импульсы и координаты p и q , а силы — через q и a . Этот результат непосредственно следует из уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial E_{\text{кин}}}{\partial q_i} + F_i,$$

так как согласно этим уравнениям каждая последующая фаза может быть выведена из заданной начальной фазы. Само понятие фазового объема, являющегося центральным понятием статистической механики Гиббса, представляет собой произведение вида $(dp dq)^n$ и имеет размерность энергии, умноженной на время в n -й степени. Другими словами, — говорит Гиббс, — он обладает размерностью n -й степени действия в том смысле, в каком этот термин употребляется в „принципе наименьшего действия”¹.

Так как в основе статистической механики Гиббса лежит принцип сохранения фазового объема

$$\int \dots \int dp_1 \dots dp_n dq_1 \dots dq_n = \int \dots \int dp'_1 \dots dp'_n dq'_1 \dots dq'_n,$$

где штрихами обозначены величины, относящиеся к моменту времени t' , то этим определяется значение величины размерности n -й степени действия (смысл которого задается принципом наименьшего действия) для статистической механики.

¹ Г и б б с Дж. В., Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, 1946, стр. 26.

Глубокая разработка статистической физики в работах Больцмана и Гиббса изменила классическую картину мира механистической физики и, что может быть не менее важно, создала предпосылки для последующей ломки основных концепций физики XVIII и XIX вв.

Трудности, возникшие перед тем направлением в физике, которое стремилось объяснить физические явления путем сведения их к механическому движению видимых и ненаблюдаемых непосредственно масс, послужили одной из причин назревавшего кризиса физики, выразившегося, между прочим, и в появлении направлений, проповедующих отказ от объяснения явлений, переход к чистому их описанию.

Идея отказа от объяснения нашла, в частности, свое выражение в целом течении в физике конца XIX в. — так называемом энергетизме.

Энергетики считали, что задачей науки является математическое выражение данных непосредственно в опыте отношений. Такая наука должна отказаться от гипотез, модельных представлений, от всякого объяснения явлений. Для нас это течение интересно прежде всего тем, что и оно воспользовалось для реализации своей концепции принципом Гамильтона. Характеристику некоторых тенденций этого направления мы находим у Больцмана.

Общую оценку энергетизма Больцман дает в следующих весьма ярких словах: «... кроме того обнаружилось, что уравнения аналогичной формы действительны для превращения иных форм энергии — электрической, магнитной, лучистой и т. д. одна в другую и что именно поэтому всюду с одинаковым результатом может быть произведено разложение энергии на два множителя. Это так воодушевило ряд исследователей, которые сами себя называют энергетиками, что они проповедовали необходимость разрыва со всеми до сих пор существовавшими воззрениями, против которых они выставляли тот довод, что заключение об идентичности эквивалента тепла и живой силы является ошибочным, как будто в пользу этой идентичности говорит только тезис об эквивалентности, а не многое другое.

Новое учение считает единственно правильной исходной точкой для исследования природы понятие энергии, а разложение ее на два множителя и связанный с ним вариационный закон — основным законом природы. Они считают излишними и даже вредными всякие попытки с механической наглядностью показать, почему энергия принимает именно эти странные формы и в каждой из этих форм следует сходным, но опять-таки существенно различным законам. Вся физика, да и все естествознание будущего для них не что иное, как описание действия энергии; однако, если под энергией понимать вообще всё действующее, то это становится плеоназмом.

Несомненно, аналогии в проявлениях различных форм энергии являются исключительно важными и интересными и можно сказать, что стремление проследить их всесторонне является одной из прекраснейших задач физики. Конечно, важность понятия энергии оправдывает попытку избрать это понятие в качестве исходной точки. Кроме того, надо признать, что направление исследований, которое я назвал классической теоретической физикой, то и дело приводило к порокам, реакция против которых была необходима. Первый встречный чувствовал себя призванным к тому, чтобы придумать построение из атомов, из их соединений и кружений, и считал, что при этом он подсматривает у Господа Бога его план.

Я знаю, что взяться за проблему с различных сторон — значит содействовать ее развитию, и у меня лежит сердце ко всякой оригинальной, вдохновенной научной работе. Поэтому я пожимаю руку отступникам. Но мне казалось, что энергетика часто обманывала себя поверхностными, чисто формальными аналогиями, что ее законам недоставало отчетливого и ясного изложения, обычного для классической физики, ее заключениям — выработанной классической физикой строгости, что она отбросила из старого многое хорошее и даже необходимое для науки. Мне казалось также, что спор о том, что является существующим — материя или энергия — является рецидивом старой, казавшейся преодоленной метафизики, ошибкой, непризнанием того, что все теоретические понятия являются представлениями. Откровенно высказывая свои убеждения по всем этим вопросам, я думал этим документально доказать свой интерес к дальнейшему развитию учения об энергии, доказать документально, способом более полезным, чем похвала. В учении о том, что общую физику можно вывести из двух множителей энергии и упомянутого вариационного закона так же, как в механике Герца, я могу усмотреть только идеал для далекого будущего. Только будущее сможет дать ответ на вопрос, который сегодня еще является совсем нерешенным — будет ли такая картина мира лишь лучше, чем прежняя, или она будет наилучшей¹.

В статье «Математика об энергетике»² Л. Больцман показывает, что глава энергетической школы Оствальд, пытаясь вывести основные уравнения механики из принципов энергетики, допускает совершенно явные ошибки. Как известно,

$$\delta \int_0^t \left(\frac{mv^2}{2} - c + j \frac{Mm}{r} \right) dt = 0, \quad (87)$$

¹ Boltzmann L., Populäre Schriften, 2 Aufl., Leipzig, 1925, стр. 217—219.

² Больцман Л., Очерки методологии физики, пер. под ред. С. Ф. Васильева, Изд. Тимирязевского научно-иссл. ин-та (статья «Математика об энергетике»), 1929, стр. 61—69.

где в случае центрального движения $\frac{mv^2}{2}$ — живая сила движущегося по орбите спутника, $j \frac{Mm}{r}$ — потенциальная энергия, так как в случае притяжения центрального тела $j \frac{Mm}{r^2}$ — сила. Здесь τ — постоянно, а конечные и начальный пункты движения неизменны. Однако это условие излишне, когда и первоначальная и варьированная орбита замкнуты. Для бесконечно малой орбиты будем иметь

$$\delta \left[\tau \left(\frac{mv^2}{2} - c + j \frac{Mm}{r} \right) \right] = 0,$$

и если $\tau = \frac{2\pi r}{v}$ постоянно, то

$$j \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Напротив, Оствальд (1853—1932) заключает из принципа виртуальных энергий¹, что должно иметь место

$$d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = d \left(c - j \frac{Mm}{r} \right). \quad (88)$$

Больцман замечает: «В других случаях (например, при равновесии рычага или равновесии между весом поршня и объемной энергией газа) должна исчезнуть сумма изменений всех энергий, а в этом случае — разность. Основание этого ясно при применении принципа Гамильтона. Я не сомневаюсь в том, что г. Оствальд позднее найдет какое-либо *ad hoc* придуманное основание для такой трактовки вопроса, но я не вижу в принципах его теории никаких указаний ни за, ни против того, что для уравнения (88) как раз должно иметь место условие $\tau = \frac{2\pi r}{v} = \text{const.}^2$ ».

Попытки энергетического обоснования механики сводятся к получению дифференциальных уравнений движения из закона сохранения энергии

$$T + V = h.$$

Для свободной системы, подверженной действию сил, имеющих потенциал, как известно

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2.$$

Предположим заранее, что $\ddot{x}_i$ должны быть независимы от скоростей и постоянной h , тогда

$$\sum m_i \dot{x}_i \ddot{x}_i + \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0.$$

¹ Ostwald W., Lehrbuch der allgemeinen Chemie, т. 2, стр. 26.

² Больцман Л., Очерки методологии физики, стр. 66.

Если это уравнение должно выполняться для всех значений $\dot{x}_i$, то действительно получается

$$m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \text{ и т. д.}$$

Однако такое заключение нельзя делать уже в том случае, когда между x_i имеются уравнения связей, как это заметил Р. Липшиц¹. Хельм (1851—1923) пытался спасти положение с помощью вариационного метода, придав закону сохранения энергии следующий вид: изменение полной энергии в каждом возможном направлении равно нулю². Однако под таким изменением можно понимать только приращение энергии, которое соответствует вариации δx_i каждой из координат x_i . При этом, конечно,

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Однако изменение T будет

$$\sum m_i x_i \frac{\delta dx_i}{dt} = d \sum m_i x_i \frac{dx}{dt} - \sum m_i \dot{x}_i \delta x_i,$$

что никоим образом не равно

$$\sum m_i \ddot{x}_i \delta x_i.$$

Если же определить, как это делали энергетики, изменение энергии последним выражением, то это будет произвольным формализмом, не имеющим физического смысла.

Необходимо отметить, что борьбу Больцмана с махизмом положительно оценил В. И. Ленин. Он пишет: «Из немецких физиков систематически боролся против махистского течения умерший в 1906 году Людвиг Больцман. Мы уже указывали, что „увлечению новыми гносеологическими догмами“ он противопоставлял простое и ясное сведение махизма к солипсизму ... Больцман, конечно, боится называть себя материалистом и даже специально оговаривается, что он вовсе не против бытия божия. Но его теория познания по существу дела материалистическая и выражает она ... мнение большинства естествоиспытателей»³.

В физической картине мира Больцмана механическое движение атомов играло основную роль. Естественно, что в концепции такого рода понятие потенциальной энергии не только не могло быть самостоятельным понятием, но и должно было быть объяснено с

¹ Lipschitz, R., Journal Crelle, т. 74, 1871.

² Helm G., Die Energetik nach ihrer geschichtlichen Entwicklung, Leipzig, 1898.

³ Ленин В. И., Материализм и эмпириокритицизм, Соч., т. 14, 1947, стр. 274; в этой книге Ленин, в частности, разгромил «философскую» концепцию энергетизма.

помощью механического движения элементарных для того времени частиц.

В XIX в. многие физики склонялись к тому убеждению, что наиболее правильный способ употребления понятия потенциальной энергии — это устранение его из физики. Одним из стимулов для такой точки зрения послужило изучение волчков и гироскопов в механике. Если они приводятся в быстрое вращение, то, как известно, система ведет себя так, как если бы она находилась под действием сил, производимых каким-то незримым источником. Математическая теория этого движения была развита в 1877 г. Раусом, который показал, что во всех таких системах (получивших название систем с игнорируемыми — исключенными координатами) кинетическая энергия вращения производит точно такие же эффекты, какие должна была вызвать дополнительная потенциальная энергия. В 1886—1888 г. Дж. Дж. Томсон (1856—1940) использовал результаты Рауса для того, чтобы показать, что различные виды потенциальной энергии, наблюдаемые в природе, могут рассматриваться как наблюдаемый эффект скрытых движений: кинетическая энергия их не воспринимается нами прямо, но ее существование приходится постулировать, причем она такова, что потенциальная энергия, соответствующая ей согласно теории Рауса, совпадает с действительно наблюдаемой потенциальной энергией¹. Дж. Дж. Томсон рассмотрел с помощью этого метода следующие физические задачи: действие температуры на свойства тел, электродвижущая сила, вызванная разностью температур, испарение, свойства разведенных растворов, диссоциация, общий случай химического равновесия, действия, производимые изменением физических условий на коэффициент химической связи, изменение состояния из твердого в жидкое, связь между электродвижущей силой и химическим изменением, необратимые эффекты.

Многообразие различных химических, термодинамических, электрических задач Дж. Дж. Томсон пытается рассмотреть с помощью единого метода составления лагранжевой функции. Отметим, что Дж. Дж. Томсон не применяет этот метод к силовым полям, т. е. не рассматривает наиболее плодотворного применения лагранжевой функции в виде интеграла принципа Гамильтона.

Книга¹ представляет собой изданные отдельно его кэвендишские лекции, прочитанные в 1886 г. Подводя итоги предшествующих пятидесяти лет развития физики, Дж. Дж. Томсон говорит, что рассмотрение закона сохранения энергии, развитие кинетической теории газов, открытие электромагнитной индукции имели своим результатом «усиление веры в то, что все физические явления могут быть объяснены динамическими принципами».

¹ Thomson J. J., Applications of Dynamics to Physics and Chemistry, Macmillan, London, 1888, стр. 1.

Эта вера есть «аксиома, на которой основана вся новая физика». Важнейшую роль в проблемах физики играет, по мнению Дж. Дж. Томсона, превращение тепла в другие формы энергии и обратно. Дело в том, что для описания этих процессов оказалось недостаточным только одно первое начало термодинамики, а потребовалось еще введение второго независимого начала, которое выведено как



ДЖ. ДЖ. ТОМСОН (1856—1940)

обобщение опыта и не является, по мнению Дж. Дж. Томсона, чистым динамическим принципом. Можно было ожидать а priori, что закон сохранения энергии окажется недостаточным для того, чтобы вывести все наблюдаемые явления. Этот принцип скорее результат, чем метод, и в общем он не позволяет полностью решать даже динамические проблемы, тем более, что в него не входит время. Однако ресурсы динамики этим отнюдь не истощены, так как у нее есть еще принцип Гамильтона и уравнения Лагранжа. Дж. Дж. Томсон ставит перед собой задачу исследовать, какие результаты могут быть получены с помощью чисто динамических принципов без применения второго начала термодинамики. Преимущество такого метода состоит в его более фундаментальном характере, в том, что вместо двух начал требуется только одно и, наконец,

в том, что он пригоден и для чисто механических задач, в которых не имеет места превращение механической энергии в другие формы. Недостатком этого метода является то, что результаты его применения выражаются в механических величинах (энергия, скорость, моменты), и требуется дальнейшее исследование, чтобы знать, как перевести их на язык физических величин, которые мы измеряем, как например, интенсивность потока, температура и т. д. Знанием такого перевода мы во многих случаях не обладаем.

Основная методологическая идея Дж. Дж. Томсона выражена им следующим образом: «Так как мы не знаем природы механизма физических систем, действия которых мы хотим исследовать, то все, что мы можем получить от применения динамических принципов, — это отношения между различными свойствами тел. И чтобы получить эти отношения, мы можем применять только динамические методы, не требующие детального знания системы, к которой они прилагаются. Методы, введенные Гамильтоном и Лагранжем, обладают этим преимуществом и, так как каждый из них представляет поведение системы зависящим только от свойств одной-единственной функции, то они сводят задачу к определению этой функции»¹. Дж. Дж. Томсон развивает кинетическую концепцию силы, используя уравнения Лагранжа. Пусть в T некоторые координаты q_j входят только в виде $\dot{q}_j$, и нет выражений, имеющих вид произведений $\dot{q}_i \dot{q}_j$; тогда для $s = i$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0,$$

а для $s = j$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = c_j.$$

Исключим теперь $\dot{q}_j$. Этот важный шаг был первоначально сделан Раусом² (см. гл. III, разд. 8). Координаты q_j Дж. Дж. Томсон назвал киностеническими, У. Томсон и П. Тэт — «игнорируемыми координатами»³, позднее Гельмгольц дал движениям с такими координатами наименование скрытых движений⁴. По исключении $\dot{q}_j$ величина T перейдет в $\tilde{T}$ и лагранжево уравнение для $\tilde{T}$ будет

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \sum c_j \dot{q}_j, \quad (89)$$

¹ Thomson J. J., Applications of Dynamics to Physics and Chemistry, Macmillan, London, 1888, стр. 8.

² Routh E. J., A treatise of stability of a given state of motion, London, 1877.

³ Thomson W. and Tait P., A treatise on Natural Philosophy, 1879, т. 1, стр. 318.

Хотя некоторые авторы различают понятие циклической и игнорируемой координаты, понимая под первой координату, которая не входит в кинетическую энергию, а под второй такую, которая не входит в лагранжиан, однако мы считаем эти понятия эквивалентными и употребляем их во втором смысле.

⁴ Helmholtz H., Journ. of Mathem., 100, 1887.

где правая часть есть функция только q_i . Если теперь рассматривать правую часть как силовую функцию U , то можно с помощью киностенических координат q_j объяснить появление силовой функции чисто кинетическим образом и свести таким образом потенциальную энергию к кинетической энергии «игнорируемых» масс.

«... С этой точки зрения вся энергия — кинетическая и все члены в уравнениях Лагранжа выражают кинетическую энергию¹, причем один только вопрос подлежит выяснению — это вопрос о том, принадлежит ли эта кинетическая энергия движению игнорируемых или обычных координат. Если вся энергия — кинетическая, то ее величина остается постоянной согласно закону сохранения энергии, а принцип наименьшего действия принимает очень простую форму: при заданном количестве энергии какая-либо материальная система будет перемещаться в случае свободного движения по пути, который приведет ее из начальной конфигурации в конечную в наименьшее возможное время, и это вполне аналогично тому, что утверждается принципом Ферма для распространения света.

С точки зрения Дж. Дж. Томсона представление потенциальной энергии как кинетической имеет то преимущество, что «оно выдвигает на первый план идею, что одна из задач физической науки состоит в том, чтобы объяснить естественные явления посредством свойств материи в движении. Если мы сделали это, то мы дали полное физическое объяснение какого-либо явления, и всякое дальнейшее объяснение будет скорее метафизическим, чем физическим. В том же случае, однако, когда мы объясняем явления изменением потенциальной энергии системы это не имеет места, ибо о потенциальной энергии не может быть сказано, в точном смысле слова, что она объясняет что-либо. Она дает только воплощение результатов экспериментов в форме, удобной для математических исследований². Идея объяснения всех явлений свойствами материи в движении — очень глубокая и прогрессивная, но у Дж. Дж. Томсона она ограничена представлением о том, что это движение является механическим, и именно к нему сводятся все другие виды наблюдаемых изменений.

При рассмотрении с помощью принципов динамики физических явлений необходимо исследовать три рода явлений: обратимые, описываемые векторами, обратимые, описываемые скалярами, и необратимые явления.

Для изучения этих задач надо ввести основные уравнения динамики и соответственным образом выбранные координаты. У. Томсон (1824—1907) и П. Тэт (1831—1901) показали³, что мы можем

¹ Thomson J. J., Applications of Dynamics..., стр. 14.

² Там же, стр. 15.

³ Thomson W. and Tait P., A treatise on Natural Philosophy, 1879, т. 1, стр. 320.

«игнорировать» координаты, когда кинетическая энергия может быть выражена без них и что можно рассматривать систему так, как если бы она была полностью определена координатами, через производные которых явно выражена кинетическая энергия системы.

Лармор¹ доказал, что если L' есть видоизмененная Раусом функция Лагранжа, $q_1, q_2, \dots$ — координаты положения, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — игнорируемые координаты, $Q_1, Q_2, \dots, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ — импульсы, сопоставленные соответственно этим координатам, и если

$$L' = \frac{1}{2} \{ \sum Q \dot{q} - \sum \Phi \dot{\varphi} \} - V, \quad (90)$$

то

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L' dt = 0.$$

Согласно правилам вариационного исчисления отсюда следует, что если L' выражено через q и $\dot{q}$ (какой бы смысл эти величины ни имели), то будет иметь место ряд уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = 0.$$

Таким образом, можно рассматривать любые переменные величины как координаты, если видоизмененную лагранжеву функцию возможно выразить через них и их первые производные. Это положение и является определением координаты по Дж. Дж. Томсону.

Когда мы вводим какой-либо символ для того, чтобы выразить некоторую физическую величину, мы не можем с первого взгляда быть уверенными в том, является ли он координатой или производной координаты по времени. Так, например, является ли координатой или ее производной символ, представляющий интенсивность тока?

На этот вопрос отвечают простейшие динамические соображения. Если не имеет места рассеяние энергии необратимыми процессами, величина, представленная тем или иным символом, остается постоянной под действием постоянной силы, стремящейся изменить ее значение, и энергия также остается постоянной, тогда символ есть координата. Если же величина, представленная символом, остается постоянной и не равной нулю, когда на нее не действует никакая сила, отсутствует рассеяние и энергия постоянна, то символ есть скорость.

Так, например, сила тока, текущего через идеальный проводник (без рассеяния энергии), удовлетворяет второму условию, но не первому, а следовательно, представляет собой производную координаты, а не самое координату.

¹ L a r m o r J., Proceedings of London Mathematical Society, XV; Math. and Phys. Papers, Cambridge, 1929.

Координаты могут фиксировать: геометрическую конфигурацию системы, напряжения в системе, электрическую конфигурацию системы, магнитную конфигурацию системы.

Применяя изложенный метод, Дж. Дж. Томсон решает ряд задач для различных областей физики. Смысл этих решений, приводящих к хорошо известным, полученным другими способами результатам, состоит в следующем. Во-первых, с помощью понятия «исключенных или игнорируемых координат» осуществляется сведение различных видов так называемой потенциальной энергии к энергии кинетической — энергии движения скрытых масс. Тем самым, поскольку понятие потенциальной энергии в каждом отдельном случае заменяется представлением о движении, полная энергия системы оказывается равной суммарной энергии видимых и скрытых масс и, следовательно, однородной квадратичной функцией скоростей с коэффициентами, зависящими только от произведений координат. Кинетическая картина всех процессов реализуется как возможная универсальная физическая картина мира.

Принцип наименьшего действия в той новой, по существу, форме, которая была дана ему Гамильтоном и Гельмгольцем, стал важнейшим законом физики, о котором говорил М. Планк (1858—1947) в своих лекциях по теоретической физике: «Все обратимые процессы, будь они по природе механического, электро-динамического или термического характера, — все они подчинены одному и тому же принципу, дающему однозначный ответ на все вопросы, касающиеся хода процесса. Этот закон не есть принцип сохранения энергии, который хотя и приложим ко всем явлениям, но определяет их ход не однозначно: это — принцип более общий — принцип наименьшего действия»¹.

Распространение вариационных принципов механики на немеханические (тепловые и электромагнитные) явления естественно привело к попыткам утвердить эти принципы в качестве основных общих законов всей физики.

Планк считал, что решение проблемы обобщения всех явлений природы в одном простом принципе являлось высшей целью, мерцавшей перед физикой со дня ее возникновения. Среди законов физики принцип наименьшего действия ближе всего подошел, по его мнению, к этой цели теоретического исследования, ибо он во всех областях физики позволяет определить ход физических процессов в пространстве и времени, если известны все условия.

Для Планка речь идет прежде всего о единой физической картине мира. Он хочет выяснить, каковы должны быть ее характерные черты, какие фундаментальные идеи лежат в ее основе, как

¹ Планк М., Теоретическая физика, VII лекция, Общая динамика. Принцип наименьшего действия, пер. И. М. Занчевского, 1911, стр. 120; «Сборник», стр. 572.

решаются конкретные проблемы физики различных форм движения, которые должны быть объединены общим началом.

Для того чтобы яснее изложить свою концепцию, Планк начинает с рассмотрения взглядов Герца, который также стремился построить единую и при этом объясняющую картину мира. Планк



М. ПЛАНК (1858—1947)

указывает, что Герц... «просто отвергает различие между кинетической и потенциальной энергией, а вместе с тем и все проблемы, которые встречает исследование специальных видов энергии. Согласно Герцу имеется не только один-единственный вид материи — материальная точка, но и только один-единственный вид энергии — кинетическая. Все остальные виды энергии, которые мы, например, обозначаем как энергию потенциальную, электромагнитную, химическую, тепловую, в действительности представляют кинетическую энергию движущихся материальных точек; и единственно только постоянные связи, существующие в природе между положением и скоростями этих материальных точек, делают действие всех видов

ее столь различным. Все движения в природе в последнем счете покоятся, таким образом, по Герцу, исключительно на инертности материи¹.

Однако, как замечает Планк, «при ближайшем рассмотрении оказалось, что затруднения не преодолены, но только обойдены, а именно, отодвинуты в почти недоступную, для экспериментального исследования область»². Поэтому Планк снова вернулся к рассмотрению принципа Гамильтона.

«Наиболее важный закон, венец всей системы, представляет, по крайней мере по моему разумению, принцип наименьшего действия, который совершенно симметрично заключает в себе четыре мировые координаты»³.

В примечании к цитированным словам Планк говорит: «Так как принцип наименьшего действия обычно выражается посредством интеграла, то на первый взгляд в этом сказывается преимущественное значение времени. Эта односторонность на самом деле только кажущаяся и обуславливается способом обозначения. Потому что „количество действия“ (величина, вариация которой исчезает) каково-нибудь физического явления инвариантно при всех лоренцевских преобразованиях»⁴.

Принцип наименьшего действия, — указывает Планк, — вырос на почве механики. Перед другими принципами механики принцип наименьшего действия имеет то преимущество, что он связывает в одном соотношении пространство, время и потенциал, которые имеют непосредственное значение не только для механики, но и для электродинамики и термодинамики. Так как Планк ставит своей задачей «объединение системы теоретической физики и наиболее общее представление физических закономерностей»⁴, то принцип наименьшего действия должен играть главную роль.

Планк прежде всего рассмотрел тот случай, когда конфигурация определяется конечным числом координат. Пусть q_i — координаты, тогда внешняя работа

$$A = \sum \Phi_i \delta q_i = \delta E, \quad (91)$$

где Φ_i — составляющие внешних сил по соответствующим координатам, E — энергия системы.

В этом случае принцип Гамильтона запишется так:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \Phi_i \delta q_i \right) = 0, \quad (92)$$

¹ Планк М., Отношение новейшей физики к механическому мировоззрению, Книгоизд. Физика, Спб., 1911, стр. 15.

² Там же, стр. 16.

³ Там же, стр. 36—37.

⁴ Планк М., Теоретическая физика, 8 лекций, пер. Н. М. Занчевского, Изд. Образование, Спб., 1911, стр. 121; «Сборник», стр. 572.

и уравнения движения

$$\Phi_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

С точки зрения термодинамики две переменные можно выбрать совершенно произвольно (любые две из p , V , T , S (энтропия)), остальные же выразить как функции этих двух. Для принципа наименьшего действия это не имеет места, так как надо знать изменение энергии или полную работу A :

$$A = -p \delta V + T \delta S.$$

Так как это выражение надо сопоставить общему выражению

$$A = \Phi_1 q_1 + \Phi_2 q_2,$$

то удобнее взять за общие координаты состояния V и S ; тогда p и T будут как бы составляющие сил Φ_1 и Φ_2 . Если принять во внимание, что каждое термодинамическое обратимое изменение состояния протекает бесконечно медленно, то $\dot{V}$ и $\dot{S}$ и остальные производные по времени можно положить равными нулю и тогда принцип Гамильтона приведет к простому уравнению

$$\Phi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

или

$$-p + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{V}} \right)_S = 0, \quad T + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{S}} \right)_V = 0.$$

Из выражения (92) получим

$$E = -L.$$

Собственно говоря, написанные уравнения представляют собой измененную запись известного уравнения

$$dS = \frac{dE + p dV}{T}. \quad (93)$$

Совершенно иной смысл имеет метод исследования термодинамических явлений Гельмгольца. У него координата V сохраняется, а вместо S вводится некоторая циклическая координата ϵ , входящая в выражение L только в виде $\dot{\epsilon}$ (эта производная представляет температуру T). Следовательно,

$$L = L(V, T).$$

Тогда

$$A = -p \delta V + E \delta \epsilon.$$

Для того чтобы это уравнение совпадало с термодинамическим уравнением, нужно положить

$$E \delta \varepsilon = T \delta S,$$

$$E d\varepsilon = T dS,$$

$$E dt = dS.$$

Уравнения, получаемые на основе принципа наименьшего действия, будут

$$-p + \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)_T = 0, \quad E - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_v = 0$$

или

$$d \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_v = E dt = dS$$

и

$$\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_v = S,$$

где произвольная постоянная положена равной нулю.

Из выражения (92) получим

$$E = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial \varepsilon} - L = T \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_v - L.$$

Отсюда

$$L = -(E - TS). \quad (94)$$

Мы видим, что L противоположна по знаку свободной энергии системы.

С принципиальной точки зрения позиция Гельмгольца имеет то преимущество, что у него тепловая энергия сведена к движению, а это представляет такой же шаг вперед, как сведение световых волн к электромагнитным¹.

Однако для необратимых процессов и теория Гельмгольца оказалась недостаточной.

4. Заключительные замечания

Термодинамика может быть сформулирована способом, который представляет собой близкую аналогию теории преобразований в механике.

Пусть

$$T = T(V, P) \quad (95)$$

¹ Планк М., Теоретическая физика, 8 лекций . . . , стр. 129.

— уравнение состояния системы, где T, V, P — температура, объем и давление. Для совокупности N молекул без взаимодействия (идеальный газ) имеем

$$T = \frac{PV}{Nk},$$

где k — постоянная Больцмана.

Уравнение (95) хотя и относится только к состояниям равновесия системы, однако имеет тот же вид, что и уравнения движения механической системы с одной степенью свободы.

Обозначим: U — внутренняя энергия, A — свободная энергия, H — теплосодержание или энтальпия, F — термодинамический потенциал Гиббса, S — энтропия.

Сопоставим выражения для этих величин с соответственными выражениями классической механики;

$$\left. \begin{aligned} A &= U - TS, & \psi &= \varphi - p_i q_i, \\ H &= U + PV, & \psi' &= \varphi + \bar{p}_i \bar{q}_i, \\ F &= U + PV - TS, & \varphi' &= \varphi + \bar{p}_i \bar{q}_i - p_i q_i, \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

где p_i, q_i — исходные, а $\bar{p}_i, \bar{q}_i$ — преобразованные обобщенные импульсы и координаты;

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\bar{q}_i, p_i, t), & \psi' &= \psi'(q_i, \bar{p}_i, t), \\ \varphi' &= \varphi'(p_i, \bar{p}_i, t) \end{aligned}$$

— производящие функции касательного преобразования.

Поразительное сходство этих уравнений позволяет использовать результаты, полученные в механике, при рассмотрении проблем термодинамики, если установить следующее соответствие:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow T, & \varphi &\rightarrow U, \\ q &\rightarrow S, & \psi &\rightarrow A, \\ \bar{p} &\rightarrow P, & \psi' &\rightarrow H, \\ \bar{q} &\rightarrow V, & \varphi' &\rightarrow F. \end{aligned}$$

Тогда любая из обычных термодинамических функций

$$\begin{aligned} U &= U(S, V); & A &= A(T, V); \\ H &= H(S, P); & F &= F(T, P) \end{aligned}$$

может рассматриваться как производящая для преобразования от переменных T, S к V, P , а эти же функции, взятые со знаком минус, определяют преобразование от V, P к T, S . Отсюда, продолжая

аналогию с механикой (см. гл. II, разд. 6), найдем :

$$dU = TdS - PdV, \quad T = \frac{\partial U}{\partial S}, \quad P = -\frac{\partial U}{\partial V},$$

$$dA = -SdT - PdV, \quad S = -\frac{\partial A}{\partial T}, \quad P = -\frac{\partial A}{\partial V},$$

$$dH = TdS + VdP, \quad T = \frac{\partial H}{\partial S}, \quad V = \frac{\partial H}{\partial P},$$

$$dF = -SdT + VdP, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad V = \frac{\partial F}{\partial P}.$$

Далее можно получить уравнения Гиббса—Гельмгольца, Клаузиуса—Клапейрона и т. д., на чем мы не останавливаемся.

Заметим только, что объем играет роль координаты, сопряженной с давлением, а энтропия — координаты, сопряженной с температурой; давление и температура в термодинамике являются аналогами обобщенных импульсов в классической механике. Диаграмма (P, V) соответствует фазовому пространству $(\bar{p}, \bar{q})$, диаграмма (T, S) может также рассматриваться как фазовое пространство для системы.

Рассматриваемая аналогия допускает обобщение на системы со многими степенями свободы, различными компонентами и различными действующими силами и напряжениями. В этом случае массы изменяющихся компонентов становятся дополнительными координатами, которые вместе с координатами, соответствующими «напряжениям», определяют систему, а химические потенциалы являются «импульсами», сопряженными с «массовыми» координатами.

Итак, несмотря на все усилия замечательных ученых, второе начало термодинамики и законы молекулярного движения не удалось подчинить единому принципу классической механики. Иначе говоря, не удалось объяснить, исходя только из *классической механики*, тот круг явлений, который для своего движения потребовал создания *статистической механики*. Это было первое большое поражение механистической концепции, за которым скоро последовали и другие.

Рассмотренные в этой главе в целом неудачные попытки кажутся нам теперь во многом наивными, хотя ясно, что на уровне физики середины XIX в. они были необходимы. Эти попытки, как это часто бывает в истории науки, хотя и не вошли в главное в классическую теоретическую физику, все же дали науке ряд методов и идей, нашедших продуктивное применение в совершенно других областях физики.

ГЛАВА VI

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ И РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Вариационные принципы механики и уравнения электромагнитного поля в исследованиях Лармора и Лоренца

Развитие электродинамики в XIX в. поставило перед механистической концепцией физики, может быть, еще более трудную проблему, чем развитие теории теплоты.

Существенно и притом принципиально новый момент состоял во введении понятия физического поля, процессы в котором и структура которого подлежали выяснению и связи с наблюдаемыми экспериментально закономерностями. Так как поле, носитель электрических и магнитных явлений, пытались рассматривать как некоторую среду — эфир, — наделенную определенными механическими свойствами, вводимыми по аналогии с наблюдаемыми явлениями, то проблема эфира во второй половине XIX в. стала одной из кардинальных проблем физической науки. Она стала особенно актуальной после торжества электромагнитной теории света. Перед научным миром, казалось, открылся путь к разрешению давно мучившей физиков задачи построения единой картины мира, в которой все было бы сведено к изменениям, происходящим в эфире. Это значило прежде всего, что надо объединить механику и электродинамику. С формально логической точки зрения это объединение могло быть достигнуто путем сведения либо электродинамики к механике, либо, наоборот, механики к электродинамике. Ортодоксальный механицизм избрал первый путь. Тупик, к которому он пришел, вызвал ряд попыток создания, так сказать, электромагнитного варианта механистической картины мира. Однако свести механику к электродинамике, не преобразуя ни той, ни другой, не удалось. Развитие науки, накопление новых экспериментальных данных (главным образом в области электродинамики движущихся тел) показало ограниченность и односторонность классического миропонимания и привело к новому синтезу по-новому переработанных и обогащенных физических представлений.

Невозможность найти адекватный механизм всех явлений, исходя из механических понятий, была одной из причин, приведших к кризису механистической физики. Ограниченность буржуазного (а в особенности традиционного английского) мышления привела к тому, что, не желая отказаться от привычной схемы понятий и категорий, некоторые ученые постепенно переходили к феноменологическому описанию, сдавая тем самым всевозможным идеалистическим течениям одну из основных своих позиций. Механистический материализм являлся наиболее ярким выражением идеологии буржуазии времени ее подъема, роста ее технических и идеологических средств. В области естествознания в этот период в основном господствовал стихийный материализм. Позднее этот стихийный материализм естествоиспытателей испытывает все усиливающийся натиск со стороны всевозможных идеалистических течений, играющих на затруднениях, вставших перед механистической наукой. В частности, в области физической теории начинается усиленная пропаганда идеализма, производится ряд попыток «примирить» идеализм с материалистическим по своей тенденции естествознанием, идеалистически истолковав последнее. Общее усиление реакционных тенденций в капиталистическом обществе сказывается и в естествознании. «Стыдливый» характер материализма большинства буржуазных ученых, для понимания которого нельзя забывать «... очень важных житейских соображений, которые заставляют английских профессоров называть себя „агностиками”»¹, с одной стороны, и место их в системе капиталистического общества, с другой, мешает им развивать материалистические взгляды. Вместо этого их миропонимание часто становится все более эклектичным и путанным.

По такому пути идет и выдающийся английский физик Лармор (1847—1942), взгляды которого во многом типичны для определенной и значительной группы ученых конца XIX — начала XX столетия.

Продолжая классическую традицию английских физиков — В. Томсона, Фарадея, Мак-Куллоха, Максвелла, которые разрабатывали физические модели на основе аналогии (вспомним хотя бы слова В. Томсона «объяснить — это значит построить механическую модель»), Лармор² является в известном смысле одним из последних могикан английского механицизма. Он стоит на материалистической

¹ Ленин В. И., Материализм и эмпириокритицизм, Соч., т. 14, изд. 4, стр. 264.

² В настоящей работе мы совершенно не останавливаемся на ценных результатах, полученных Лармором в области построения теории электронов. Точно также нами не затрагиваются те главы (X, XI) работы Лармора «Aether and Matter», в которых он подошел к некоторым формулам, вошедшим впоследствии в специальную теорию относительности. Не ставя перед собой задачу охарактеризовать полностью научную фигуру Лармора и разнообразное содержание его книги, мы рассматриваем некоторые идеи, заключенные в ней, в аспекте, интересующем нас, что и определяет выбор материала.

позиции, но его материализм — механистический. При этом Лармор стоит на той ступени развития механицизма, когда неудачи построения единой механической картины мира, которая объясняла бы, а не только описывала явления, привели к тому, что механицизм переходил по существу к своеобразному «описанию» явлений.

Лармор, как и его предшественники, декларирует, что «конечной целью теоретической физики является сведение законов изменений в физическом мире к *динамическим принципам*»¹.

Прислушиваясь к критике идеалистов и энергетиков, он сам считает нужным обосновать свой научный метод. Попытку принципиального обоснования своих теоретических рассуждений Лармор и делает в главе «О научной полезности гипотез» книги «Эфир и материя». По его мнению, «разработка априорных физических теорий абстрактного характера есть дело не только философской спекуляции. Их практическая необходимость для научного прогресса так же, как и некоторая ненадежность, присущая им»², играют важную роль в развитии науки.

По мнению Лармора, наше познание не всегда является адекватной картиной явлений природы. Он считает, что «единообразия (uniformity), которые принято называть законами природы, суть часто не что иное, как законы мышления; они оформляют выражение взаимных связей между мышлением и материей, посредством которых материальные явления постигаются умом. Простое усилие мышления, стремящееся к более широкому выражению этих взаимных связей, не будет целиком случайно и бесполезно, даже если оно временно приведет к заблуждению, ибо это усилие само по себе является последовательным развитием имеющих место в космосе взаимодействий мышления и материи...»³ Формальные аналогии между математическими теориями различных ветвей физики возникли, может быть, как из природы необходимого процесса мышления, так и из природы внешних вещей.

Рассмотрение физической сущности этих аналогий приводит Лармора к вопросу об эфире.

«Изучение этой всепроникающей субстанции (эфира. — Л. П.), — говорит Дж. Томсон, — является, быть может, наиболее интересной и важной задачей»⁴. Этот принципиальный вывод, как считает Дж. Томсон, необходимо было сделать на уровне, достигнутом

¹ Лармор Дж., Приложение 2 к русскому переводу книги Максвелла «Материя и движение», под ред. проф. Андреева, ГИЗ, 1924.

² L a r m o r J., Aether and Matter, A development of the dynamical relations of the aether to material systems on the basis of the atomic constitution of matter including a discussion of the influence of the earth's motion on optical phenomena, Cambridge, 1900, стр. 68.

³ Там же, стр. 70.

⁴ Т о м с о н Дж., Материя, энергия, эфир, Сб. «Философия науки», ч. 1, под ред. Тимирязева, Госиздат, М.—Л., 1923—1924, стр. 186.

физикой к концу XIX в. Он должен был указать направление дальнейшего развития физической теории. «Настало время, — если теоретическая физика не собирается остаться лишь систематическим описанием явлений, — когда некоторая определенная идея о связи между эфиром и материей делается существенной для ее прогресса»¹.

Вся работа Лармора и посвящена «развитию следствий из подобной мысли». Впрочем, Лармор отнюдь не убежден, что он нашел правильное решение проблемы. Он полагает лишь, что обсуждение такой идеи, даже если она неверна, принесет большую пользу. Ибо здесь придется иметь дело с целым рядом понятий, которые относятся к первичной элементарной деятельности молекул вещества и эфира. Если же мы хотим построить науку, которая имела бы объясняющий характер, то необходимо по-новому рассмотреть ряд основных понятий.

«Общая концепция кинетической молекулярной структуры материи требует реконструкции теоретического базиса обычной механики»². Ведь обычное развитие идей теоретической динамики основывается на понятии сил, действующих между частицами, причем закон их действия выражен в трех аксиомах (или законах) Ньютона. Чем является при этом частица вещества? «Единственно, что здесь можно понимать под такой частицей, это неизменный элемент массы, объем которого достаточно велик, чтобы вмещать в себе значительное количество молекул»³. Настоящим же фундаментом общей механики является «принцип действия в его общей форме, принятой как описательная аналитическая формулировка протекания явлений»⁴.

Если же к этому принципу действия подойти с молекулярной точки зрения, то здесь он должен найти обоснование, в то время как в механике он был лишь описательной формулой. Это значит, что принцип действия должен с необходимостью вытекать из свойств эфира, хотя бы они и оставались скрытыми от нас. Таким образом, «этот общий динамический принцип должен рассматриваться как прямое следствие схемы свойств, приписываемых свободному эфиру»⁵. При этом, конечно, эта связь принципа действия с свойствами эфира имеет место всегда и не зависит от какой бы то ни было нашей гипотезы. Отсюда ясно, что опираясь на принцип действия, можно рассуждать, так сказать, от обратного и исследовать природу взаимодействия, которое имеет место между материальными атомами.

Принцип наименьшего действия — основное в общей динамике. Благодаря своей вариационной форме этот принцип нашел чрезвычайно широкое применение, так как почти всякую физическую

¹ Larmor J., *Aether and Matter*, стр. X.

² Там же, стр. XI.

³ Там же, стр. XII. Мы не приводим аналогичных мест из работ Лармора, помещенных в его «*Mathematical and Physical papers*», т. 1, 2, так как их основные идеи развиты в книге «*Aether and Matter*».

проблему можно выразить «как вариационную задачу для того, чтобы облегчить сведение к динамике таких физических теорий, в которых внутренний динамический механизм более или менее скрыт от непосредственного наблюдения»¹. Роль принципа наименьшего действия состоит в том, что если законы какого-либо из отделов физики сформулированы в виде вариационной теоремы, то проблема фактически сводится к динамическому типу, исследование которого исчерпывает описание данного физического явления.

Вопросу о значении и применении принципа наименьшего действия в электродинамике Гельмгольц посвятил в 1892 г. специальную работу «Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik»².

Задача состоит в том, чтобы представить уравнения Максвелла (которые он считает эмпирически найденными законами электродинамики) в виде вариационного принципа, не пользуясь известным из механики соотношением, связывающим полную энергию E с лагранжевой функцией L , и тем самым исследовать, будет ли форма этого принципа для электродинамики аналогична его форме для механики. Итак, Гельмгольц рассматривает два вопроса: 1) возможно ли представить уравнения Максвелла в виде некоторого вариационного принципа, 2) будет ли этот принцип иметь форму, аналогичную той, которую он имеет в механике. На оба вопроса Гельмгольц отвечает положительно. Постановка им задачи применения вариационного принципа явно предвосхищает современную. В итоге построения электродинамика сводится к выбору функции Лагранжа, а оправдание этого выбора будет в совпадении «уравнений движения», полученных из нее, с экспериментальными данными.

Еще в 1884 г. Лармор опубликовал две статьи, посвященные принципу наименьшего действия³. Он отметил, что различные области математической физики так тесно связаны между собою, что решение вопроса в одной из них оказывается возможным перенести в другую область и тем самым решить в ней соответствующую задачу. Он указал также на очевидное преимущество использования в этих целях вариационных принципов; преимущество это состоит в том, что рассмотрение задач с их помощью не зависит от случайного выбора системы координат. Он рассмотрел аналогии между движениями

¹ Лармор Дж., Приложение к книге Максвелла «Материя и движение» ГИЗ, 1924.

² Helmholtz H., Das Princip der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik, Wied. Ann., т. XLVII, 1892, стр. 1—26; Wiss. Abh., т. III, 1895, стр. 476—504.

³ Larmor J., On the immediate Application of the Principle of Least Action to Dynamics of a Particle, Catenaries, and the other related Problems, Proc. of the London Math. Soc., т. XV, 1884, стр. 158—170; On the direct Application of the Principle of Least Action to the Dynamics of Solid and Fluid systems and analogous elastic Problems, Proc. of the London Math. Soc., т. XV, 1884, стр. 170—184.

частиц и формами систем лучей и цепных линий, которые вытекают из вариационного принципа. Во второй статье он рассматривал применение этого принципа к задачам динамики системы. Здесь он следует Раусу, анализируя случай систем с циклическими координатами. Он исследовал таким образом аналогию Кирхгофа между формой упругой нити и движением твердого тела вокруг закрепленной точки, движение жидкости через отверстия в твердом теле и т. п.

Лармор вводит допущение, что «материальная молекула имеет исключительно эфирное строение», а источником деятельности в динамических процессах является всепроникающий эфир¹. Тогда из вариации интеграла действия $\delta \int (T - U) dt = 0$, который, по гипотезе Лармора, определяет последовательность состояний этой среды, легко выводится, что $T + U = \text{const}$ для всякой области, которая не находится под внешними воздействиями.

Таким образом, каждая область эфира является носителем некоторой энергии.

Рассматриваемая эфирная энергия может быть преобразована в механическую энергию материальной системы в целом, в несогласованное хаотическое движение молекул — тепловую энергию, химическую или лучистую энергию каждой молекулы — это создает основание для принципа превращения и сохранения энергии. Такая формулировка динамики является «идеальной рамкой», применимой к устойчивым консервативным молекулярным системам; в этом случае система всегда может быть возвращена в первоначальное состояние путем применения исключительно механических средств. В других случаях эта схема теряет свой строгий характер, и потому оказывается необходимым вводить в нее различные дополнения и исправления, которые, однако, не лишают ее смысла. Таким образом, представление о том, что «полное распутывание общих динамических и физических отношений материи основывается на том факте, что материя состоит из дискретных молекулярных совокупностей, существующих в эфире»², должно быть руководящим в физическом исследовании.

Итак, Лармор строит динамическую схему для свободного эфира (обычный подход для физики фарадей-максвелловского близкодействия). Эфир — упругая среда. Это утверждение не вызывает

¹ Современная физика отказалась от механического эфира и сначала рассматривала межзвездное пространство как некоторый вакуум, обладающий лишь тем свойством, что в нем могут распространяться электромагнитные волны. Однако с развитием квантовой электродинамики вакуум стал рассматриваться как место нулевых колебаний электромагнитного поля, нулевых флуктуаций заряда и тока и поляризации, соответствующей отличной от нуля диэлектрической постоянной. Вряд ли целесообразно называть «нечто», имеющее столько свойств, вакуумом. Возможно, что имело бы смысл использовать для «вакуума» условное название «эфир», имеющее уже большую историю.

² Larmor J., *Aether and Matter*, стр. 78.

никаких сомнений у Лармора, он прямо пишет: «Это есть, конечно, упругая среда». Далее Лармор предполагает, что эфир находится (по крайней мере, практически) в покое. На основании этих положений, применяя принцип Гамильтона, Лармор выводит уравнения электромагнитного поля Максвелла. Для этого, конечно, необходимо предварительно соответственным образом определить T и U .

В 1900 г. Лармор указал, что уравнения Максвелла могут быть выведены из вариационного принципа¹.

Пусть вектор (ξ, η, ζ) представляет упругие и любые другие смещения эфира, рассматриваемого как упругая среда в точке (x, y, z) ; эти смещения вызваны напряжением в этой точке. Предположим, согласно Лармору, что кинетическая энергия T и потенциальная энергия V выражаются в виде

$$T = \frac{1}{2} A \int (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) d\tau, \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} B \int (f^2 + g^2 + h^2) d\tau, \quad (2)$$

где A — постоянная, характеризующая инерцию, B — модуль упругости, $d\tau$ — элемент объема, а (f, g, h) — вектор, производные компонентов которого по времени имеют вид

$$(\dot{f}, \dot{g}, \dot{h}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z}, \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial x}, \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Эти определения выбираются произвольно в том смысле слова, что их введение будет оправдано лишь последующим анализом. Легко видеть, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

так что (f, g, h) есть вектор потока.

Найдем отдельно вариации T и V в принципе Гамильтона:

$$\begin{aligned} \delta \int T dt &= A \int dt \int (\dot{\xi} \delta \dot{\xi} + \dot{\eta} \delta \dot{\eta} + \dot{\zeta} \delta \dot{\zeta}) d\tau = \\ &= A \left[\int (\dot{\xi} \delta \xi + \dot{\eta} \delta \eta + \dot{\zeta} \delta \zeta) d\tau \Big|_{t_1}^{t_2} - A \int dt \int (\xi \delta \xi + \dot{\eta} \delta \eta + \dot{\zeta} \delta \zeta) d\tau, \right. \\ \delta V &= \frac{B}{4\pi} \int \left\{ f \left(\frac{d \delta \xi}{dy} - \frac{d \delta \eta}{dz} \right) + g \left(\frac{d \delta \xi}{dz} - \frac{d \delta \zeta}{dx} \right) + h \left(\frac{d \delta \eta}{dx} - \frac{d \delta \xi}{dy} \right) \right\} d\tau = \\ &= \frac{B}{4\pi} \int \left\{ (ng - mh) \delta \xi + (lh - nf) \delta \eta + (mf - lg) \delta \zeta \right\} dS + \\ &+ \frac{B}{4\pi} \int \left\{ \left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz} \right) \delta \xi + \left(\frac{df}{dz} - \frac{dh}{dx} \right) \delta \eta + \left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy} \right) \delta \zeta \right\} d\tau, \end{aligned}$$

¹ L a r m o r J. L., Aether and Matter, стр. 83 и след.

где (l, m, n) — вектор нормали элемента граничной поверхности δS .

Цель произведенного интегрирования по частям, как обычно, состоит в том, чтобы выразить зависимые переменные $\left(\delta\dot{\xi}, \frac{d\delta\xi}{dy} \text{ и т. п.}\right)$ через независимые переменные $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$. Это требует введения интегралов по поверхности. О них Лармор делает следующее замечание, важное для любой теории поля: «если рассматриваемая область есть бесконечное пространство, и все причины возмущений эфира находятся на конечном расстоянии от их источника, то эти интегралы по бесконечно удаленной границе не могут *по самой природе вещей* (курсив мой. — Л. П.) влиять на состояние системы на конечном расстоянии, и, на самом деле, можно проверить, что они дают нулевое воздействие; в других случаях они, конечно, должны быть приняты во внимание»¹.

Подставив в принцип Гамильтона найденные выражения для вариаций и приняв во внимание, что коэффициенты при $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ должны обращаться в нуль независимо друг от друга как в объемном, так и в поверхностном интеграле, так как $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ — совершенно независимы и произвольны в каждом элементе объема $\delta\tau$ и на каждом элементе поверхности δS , получим, очевидно, из объемного интеграла уравнение

$$\frac{B}{4\pi} \left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}, \frac{df}{dz} - \frac{dh}{dx}, \frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy} \right) = -A(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}). \quad (5)$$

Система уравнений (3) и (5) оказывается тождественной с уравнениями Максвелла, «которые выражают электростатическую и электромагнитную работу свободного эфира»², если ξ, η, ζ представляет магнитную индукцию, а (f, g, h) — смещение эфира; скорость распространения будет

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{так что} \quad \frac{B}{A} = 16\pi^2 c^2,$$

где c — скорость света.

Рассмотрим теперь задачу об эфире, содержащем систему электронов или дискретные электрические заряды. Каждый из таких точечных зарядов вызывает определенное напряжение в эфире и создает определенные силы. Далее Лармор говорит: «мы, таким образом, рассматриваем электрон или точечный заряд силы e как свободную, подвижную особую точку в исследуемом напряжении эфира (f, g, h) — такую, что очень близко от нее вектор (f, g, h) предполагается имеющим форму $-\frac{e}{4\pi} \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right) \frac{1}{r}$. Мы можем избежать абсолютно бесконечных значений в начале расстояний r , рассматривая ядро

¹ Larmor J. L., Aether and Matter, стр. 83 исслед.

² Там же, стр. 86.

постоянных напряжений не как точку, но как очень маленькую область: это аналитическое ухищрение сохранит конечными все элементы интеграла в нашем анализе и в то же время не окажет действия на физические приложения, в которых электрон рассматривается просто как локальный заряд электричества определенной величины¹.

Таким образом, мы находим у Лармора все исходные идеи построения полевых теорий на базе вариационных принципов, за исключением фундаментальной идеи инвариантности лагранжевой функции. У Лармора в той или иной степени отчетливо выражены, кроме идеи аналогии с механикой, идея о подборе лагранжевой функции в виде $(E^2 - H^2)$, идея получения отсюда уравнений поля с помощью разбиения его на малые ячейки, и, наконец, столь существенная для современной физики мысль (конечно, в весьма элементарной форме) о том, как избежать расходимости в заряде.

Лармор допускает далее даже, что «ядра поля» могут иметь инерцию и собственное взаимодействие, независимое от эфира (т. е. от электромагнитного поля), и что поэтому, кроме непрерывных уравнений движения эфира, будут иметь место динамические уравнения движения каждой «деформированной формы», которые могут действовать друг на друга. Задача тогда примет гораздо более сложную форму; другими словами, функция полной энергии, используемая при формировании принципа наименьшего действия, должна будет заключать в себе также другие физические действия, если они существуют. Несмотря на архаическую форму, это заявление звучит вполне современно и сейчас, в пятидесятых годах XX в. «Однако, — говорит Лармор, — для изучения электромагнитного поля, которое мы знаем из экспериментов, полный атомистический анализ такого рода, как указано выше, бесполезен (если даже он возможен)»².

Таковы основы концепции Лармора, лежащие у истоков методов, развившихся в современных теориях полей (классических и квантовых).

Приведем вывод Лармора в современном виде. Пусть компоненты смещения эфира q_i ($i = 1, 2, 3$), а компоненты вихря его w_i , тогда потенциальная энергия единицы объема

$$E_{\text{пот}} = \frac{a^2}{2} \sum_i w_i^2,$$

а кинетическая

$$E_{\text{кин}} = \frac{\sigma}{2} \sum_i \dot{q}_i^2,$$

где σ — плотность, a — постоянная.

¹ Larmor J. L., *Aether and Matter*, стр. 87.

² Там же.

Положив $\frac{a^2}{2} = c^2$, где c — скорость света, а $\frac{\sigma}{2} = 1$ (для упрощения записи), получим

$$\delta \int dx dy dz dt [\sum \dot{q}_i^2 - c^2 \sum w_i^2] = 0. \quad (6)$$

Отсюда находим уравнения движения

$$\frac{1}{c^2} \ddot{q}_1 = \frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z} \text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{1}{c^2} \ddot{q}_1 = \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z} \right) \text{ и т. д. ,}$$

которые при выборе подходящих начальных условий движения дают:

$$\operatorname{div} (q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_3}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

и уравнения движения примут вид

$$\frac{\ddot{q}_1}{c^2} = \Delta q_1 \quad \text{и т. д.}$$

Можно придать этим рассуждениям еще более изящную форму, введя некоторые новые определения, а именно

$$\tilde{q}_i = c \int w_i dt;$$

в таком случае вариационный принцип принимает особенно симметричную форму

$$\delta \int dx dy dz dt [\sum \dot{q}_i^2 - \sum \dot{\tilde{q}}_i^2] = 0, \quad (8)$$

и непосредственно находятся две группы по три уравнения

$$\frac{1}{c} (\dot{\tilde{q}}_i) = - \operatorname{rot} (q_i), \quad (9)$$

$$\frac{1}{c} (\dot{q}_i) = \operatorname{rot} (\tilde{q}_i), \quad (10)$$

причем каждую из этих групп можно взять в качестве дополнительного условия к вариационному принципу, чтобы получить другую.

Если добавить сюда два соотношения

$$\operatorname{div} (q_i) = 0, \quad \operatorname{div} (\tilde{q}_i) = 0, \quad (11)$$

то получим уравнения Максвелла для свободного эфира. О полной симметричности найденных соотношений говорит и вид подынтегрального выражения в вариационном принципе. Здесь, таким образом, устанавливается связь с идеей об условности различия между потенциальной и кинетической энергией, рассмотренной нами в гл. V, разд. 3.

Следующий шаг был сделан великим творцом электронной теории Г. Лоренцем. Он связывает применение вариационных принципов с развитой им физической картиной и математическим выражением электронной теории.

В большой работе Лоренца, опубликованной в 1903 г., «Contributions to the Theory of Electrons»¹, находим главу, носящую



Г. ЛОРЕНЦ (1853—1928)

характерное название «Theorems corresponding to the Principle of D'Alembert and that of Least Action».

Лоренц прежде всего отмечает, что те физики, которые пытались с помощью какой-либо гипотезы о механизме электромагнитных явлений вывести основные уравнения этих явлений из принципов динамики, столкнулись со значительными, принципиальными

¹Lorentz H. A., Proc. Acad. Amsterdam, т. 5, 1903, стр. 608 ; см. также Lorentz H. A., Collected Papers, т. 3, 1936, стр. 132—154.

трудностями. Поэтому, естественно, возникала мысль взять уравнения электронной теории (в какой-либо форме, описывающей движение заряженной частицы в электромагнитном поле) за исходный пункт как «простейшее выражение, которое мы можем найти для законов электромагнетизма»¹.

Однако, даже если стоять на этой точке зрения, все же можно преобразовать основные уравнения так, чтобы прийти к теоремам, имеющим ту же математическую форму, что и общие принципы динамики. Чтобы показать это, Лоренц рассматривает систему, состоящую из движущихся электронов и бесконечно протяженного эфира. Рассматривая состояния этой системы, мы можем перейти от одного из них к другому, бесконечно мало отличающемуся от первого. Это состояние Лоренц называет варьированным состоянием. Вариация (или виртуальное изменение) будет состоять из бесконечно малого смещения точек-электронов, сопровождаемого бесконечно малыми изменениями диэлектрического смещения.

Если для системы в целом можно определить полную электрическую энергию U , то можно определить разность ее значений в исходном (или действительном) и варьированном состоянии, и т. д.

Движение электрона тоже может быть описано методами аналитической механики. Оно определяется электрическими силами, работу которых обозначим δE , вместе с любыми другими действующими на него силами. Пусть эти последние силы имеют потенциальную функцию δU_1 — так ограничивает Лоренц, стоящую перед ним задачу. Тогда полная виртуальная работа всех сил, действующих на электрон, будет $\delta E - \delta U_1$. Электрону надо также приписать кинетическую энергию T_1 , которую он имеет, если у него есть масса в обычном механическом смысле слова (не полевая); если же эта масса не существует, то надо просто положить $T = 0$. Если обозначить

$$T = \int \frac{H^2}{2} dV, \quad U = \int \frac{F^2}{2} dV,$$

то легко получить для движения электрона в электрическом поле следующее выражение принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \{ (T + T_1) - (U + U_1) \} dt = 0. \quad (12)$$

В случае отсутствия неполевой массы и незлектрических сил это выражение перейдет в обычный принцип Гамильтона с лагранжианом свободного электромагнитного поля.

Переходя к выводу уравнений поля, надо прежде всего отметить фундаментальную разницу между этим случаем и рассмотрен-

¹ Lorentz H. A., Proc. Acad. Amsterdam, т. 5, 1903, стр. 608; см. также Lorentz H. A., Collected Papers, т. 3, 1936, стр. 136.

ными ранее в динамике системы материальных точек. Дело в том, что там мы рассматривали одну независимую переменную t и несколько зависимых переменных q_r , в то время как здесь все q_r и t являются независимыми переменными, а зависимыми переменными являются величины, характеризующие поле.

Вопрос о соотношении принципа Гамильтона для динамики системы с подобным же принципом для поля возникает в силу того, что в последнем случае мы имеем дело с бесконечным множеством непрерывных переменных, так как поля определены бесконечным числом координат $\varphi(x, y, z, t)$ в каждой точке пространства-времени.

Возможен ряд способов преодоления этой трудности, но все они имеют то общее, что в них бесконечное множество непрерывных координат заменяется бесконечным, но уже дискретным множеством. Одним из таких способов является фурье-анализ или в более общем случае разложение поля в ряд по ортогональной системе функций. Хорошо известно, что посредством преобразования Фурье динамическое описание поля можно свести к динамическому описанию бесконечного набора гармонических осцилляторов¹.

Другим способом является разбиение непрерывного трехмерного пространства на ячейки столь малые, что изменение физических величин внутри такой ячейки можно считать пренебрежимо малым.

Предположим, что мы имеем поле (необязательно электромагнитное), определенное величиной $f_r(x_1, x_2, x_3, t)$. Требуется найти L' , которая будет функцией от $f_r, \frac{\partial f_r}{\partial x_i}$ и $\dot{f}_r$, выбранных так, чтобы дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L'}{\partial \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_i} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L'}{\partial \left(\frac{\partial f_r}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial L'}{\partial x_i} = 0, \quad (13)$$

являющиеся условием стационарности интеграла

$$\int L' dx_1 dx_2 dx_3 dt,$$

были уравнениями поля.

Этот вариационный принцип может быть приведен к виду гамильтонова принципа, если разделить пространство x_1, x_2, x_3 на большое число маленьких ячеек $\delta\tau$ и предположить, что поле определено значениями f_r в одной произвольно выбранной точке z в каждой ячейке (см. также стр. 355). Эти величины обозначим f_{rz} . Новая функция Лагранжа будет

$$L = \sum L_z \delta\tau,$$

в которой производные в L_z заменены конечными разностями.

¹ Fermi E., Rev. Mod. Phys., т. 4, 1932, стр. 87.

Принцип Гамильтона

$$\delta \int L dt = 0,$$

когда объемы этих ячеек стремятся к нулю, будет тождествен с выражением

$$\delta \int L' dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0 \quad (dx_4 = dt). \quad (14)$$

Обычные уравнения Лагранжа для L и уравнение (13) для L' эквивалентны и ведут к одному и тому же вариационному принципу¹.

Определим обобщенный импульс, соответствующий «координате» t_{rz} поля, уравнением

$$p_{rz} = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}_{rz}} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{t}_{rz}} \delta \tau = P_{rz} \delta \tau,$$

где

$$P_{rz} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{t}_{rz}},$$

а функцию Гамильтона H выразим, как и прежде,

$$H = \sum_{r,z} p_{rz} \dot{t}_{rz} - L = \sum_z \left(\sum_r p_{rz} \dot{t}_{rz} - L'_z \right) \delta \tau = \sum_z \tilde{H}_z \delta \tau, \quad (15)$$

причем

$$\tilde{H} = \sum_r p_r \dot{t}_r - L'.$$

В пределе для бесконечно малых ячеек уравнение (15) перейдет в

$$H = \int \tilde{H} d\tau.$$

Теперь выразим изменение поля со временем посредством канонических уравнений Гамильтона. Подставив $\dot{t}_{rz}$ и p_{rz} вместо p_r и q_r , в канонические уравнения, получим

$$\dot{t}_{rz} = \frac{\partial H}{\partial p_{rz}}, \quad \dot{p}_{rz} = - \frac{\partial H}{\partial t_{rz}}. \quad (16)$$

При введении $\tilde{H}$ они преобразуются так:

$$\begin{aligned} \dot{t}_r &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_r}, \\ p_r &= - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t_r} + \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \left(\frac{\partial t_r}{\partial x_s} \right)} \right). \end{aligned} \quad (16a)$$

¹ Ср. Зоммерфельд А., Электродинамика, пер. под ред. С. А. Элькинда, ИЛ, М., 1958.

Уравнения (16а) представляют собой условия для того, чтобы интеграл

$$\int \left\{ \sum_r p_r \dot{f}_r - \tilde{H} \left(f_r, \frac{\partial f_r}{\partial x_s}, p_r \right) \right\} d\tau dt$$

имел стационарное значение, причем p и f , как обычно, рассматриваются как совершенно независимые друг от друга.

Всегда возможно описать поле и его изменение посредством новых переменных p'_s, f'_s , которые будут функциями группы прерывных или непрерывных переменных k_i . При введении этих новых переменных будем иметь

$$\int \sum_r p_r \dot{f}_r dt = \int \left(\sum_s p'_s \dot{f}'_s - \frac{dF}{dt} \right) dk_1 dk_2,$$

где F любая функция $f'_s, \frac{\partial f'_s}{\partial k_i}$ и p' . В случае, если k_i дискретные переменные, будем иметь

$$\int \sum_r p_r \dot{f}_r d\tau = \sum_{s, k_i} \{ (p_s)_{k_i} (\dot{f}_s)_{k_i} \} - \frac{dF}{dt}.$$

Переход к этим новым переменным есть каноническое преобразование.

Исследуем, применима ли эта общая теория к тому случаю, когда существует такое L , для которого уравнения (13) суть уравнения поля. Найдем эту функцию для случая электромагнитного поля в вакууме. В этом случае f_r будут вектор-потенциал A и скалярный потенциал φ , и уравнения поля имеют форму

$$\Delta^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (17a)$$

$$\Delta^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (17b)$$

Потенциалы подчинены условию

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (17c)$$

Лагранжева функция, приводящая к уравнениям (17), будет

$$L' = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2), \quad (18)$$

где множитель $1/8\pi$ произволен и введен для упрощения вычислений в дальнейшем.

Выразим $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ через потенциалы, т. е.

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{8\pi} \left\{ \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left\{ \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial t} \right)^2 + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_2}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_3}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right)^2 - \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L'}{\partial \left(\frac{\partial A_1}{\partial t} \right)} \right) + \sum_r \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial L'}{\partial \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_r} \right)} \right) \right\} - \frac{\partial L'}{\partial A_1} &= \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \right\} = \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\Delta^2 A_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} = \\ = -\frac{1}{4\pi} \left(\Delta^2 A_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \right) \quad (19) \end{aligned}$$

и аналогично для A_2 и A_3 . Для φ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L'}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \right) + \sum_r \left\{ \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial L'}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \right)} \right) \right\} - \frac{\partial L'}{\partial \varphi} &= \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_2}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_3}{\partial t} \right) \right\} = \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \Delta^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right\} = \\ = \frac{1}{4\pi} \left(\Delta^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Таким образом, лагранжева функция (18) привела к правильным уравнениям поля, т. е. электродинамика вакуума может быть рассмотрена с помощью вариационных принципов гамильтоновой механики.

Далее надо рассмотреть взаимодействие поля и заряженных тел. В этом случае лагранжиан будет иметь вид

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{8\pi} \left\{ \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right\} + e \left(\mathbf{A} \frac{\mathbf{v}}{c} - \varphi \right) \quad (21) \end{aligned}$$

и приведет к уравнениям

$$\Delta^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -4\pi \rho \frac{v}{c}, \quad (22)$$

$$\Delta^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (23)$$

Этот лагранжиан является обобщением выражения (18) для случая, когда условие (17с) не выполняется, и наряду с полем в рассмотрение введен заряд с плотностью ρ , движущийся со скоростью v .

В выражении (21) последний член характеризует взаимодействие и зависит от переменных поля и координат динамической системы. В таком случае лагранжева функция для динамической системы и поля будет

$$L = T + \int \left[\frac{1}{8\pi} \left\{ \left(-\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \right)^2 - (\text{rot } A)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\text{div } A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right\} + \rho \left(A \frac{v}{c} - \varphi \right) \right] d\tau. \quad (24)$$

Применив принцип Гамильтона к этой функции, мы охватим как динамическую систему, так и уравнения электромагнитного поля.

Заменив непрерывные переменные поля группами дискретных переменных, найдем, что уравнения Лагранжа для этой функции L эквивалентны как уравнениям динамики, так и уравнениям электромагнитного поля.

Итак, эта задача тоже подчиняется гамильтоновой механике; иначе говоря, поле и заряженные тела образуют систему, подчиняющуюся гамильтоновой механике.

Заметим, что этот вывод мог иметь место только тогда, когда было внесено совершенно внешнее и чуждое принципу Гамильтона определение кинетической и потенциальной энергии для данной задачи¹.

Это еще раз указывает на то, что разделение на кинетическую и потенциальную энергию вне классической механики не имеет смысла, а речь может идти о лагранжевой функции, зависящей от координат, их первых производных и времени. Возможность расщепления лагранжевой функции на две функции $T = T(q, \dot{q})$ и $V = V(q, t)$ отнюдь не является существенной и не имеет общего значения в физике.

Лармор пытался использовать принцип Гамильтона, чтобы сохранить единую механистическую схему. Для этого ему многим пришлось

¹ Не говоря уже об известном произволе в аналогии, проводимой между электрической и магнитной энергией, с одной стороны, и кинетической и потенциальной — с другой.

пожертвовать в механистических воззрениях. В конечном счете он чрезвычайно близко подошел к концепции описания, хотя все его стремления были направлены к построению объясняющей физики.

Трудности, которые встали перед Лармором, теперь, в свете развития физики в первой половине XX века, представляются исторически необходимыми. Эти трудности объяснялись также и тем, что механистическая методология, в основном исчерпывавшаяся рассмотрением явлений при помощи математической разработки конструируемых механических моделей и утверждавшая о тождестве сущности явлений на основе аналогии их форм проявления, эта методология, бывшая в довольно широких пределах прогрессивной, в значительной мере исчерпала себя.

Однако рассмотренные выше тенденции во взглядах физиков-материалистов, не могущих подняться до материализма диалектического, были настолько сильны, что имели место и после того, как наметились новые пути развития физики. Известная коррелятивность электромеханической картины мира с электромеханической техникой; идеалистическая свистопляска, поднявшаяся вокруг новых теорий; формалистические тенденции последних и, наконец, стремление сохранить старые схемы в условиях происходящей ломки традиционных физических воззрений — все это обусловило живучесть того направления, одним из выразителей которого был Лармор. Нельзя забывать и того, что, какие бы выводы ни делались в области высоких теорий о механическом эфире, физик до сих пор вынужден пользоваться «эфиром» при изложении конкретных результатов классической физики, пользоваться хотя бы как некоторой аналогией, позволяющей в известной мере физически осознать какие-то особенности и отношения изучаемых явлений природы.

2. Электродинамика Г. Ми

Даже после возникновения теории квантов и теории относительности появляется ряд работ, в которых пытаются новыми методами, заимствованными, в частности, из той же теории относительности, построить, по существу, старую картину мира классической физики. В этом отношении интересны принципиальные установки одной из работ Густава Ми (1868—1957). Хронологически работы Г. Ми, в которых был сформулирован исторически первый вариант нелинейной электродинамики, появились после рассматриваемого ниже исследования М. Планка. Однако по своему физическому направлению они настолько тесно примыкают к идеям Лармора и настолько «классически» используют идеи специальной теории относительности, что мы сочли возможным поместить их непосредственно после рассмотрения работ Лармора и Лоренца.

В 1912 г. Г. Ми опубликовал в *Annalen der Physik* (т. 37) первое

сообщение из большой работы, которая занимает 132 страницы (т. 39 и 40 того же журнала). Эта работа носит очень общее и очень обязывающее название: «Grundlagen einer Theorie der Materie» (Основы теории материи); она является первой попыткой построения теории, объясняющей существование элементарных частиц.

Ми указывает, что имеющиеся опытные данные в основном всегда говорят о строении атома в смысле отрицательного определения. Это значит, что опыт не говорит, чем может быть атом, он только определяет, чем атом быть не может. Другими словами, экспериментатор пробует применить к атому различные известные представления и законы, а опыт указывает на их недействительность в области атомных явлений. Таким непосредственным выводом опыта является, например, положение о том, что внутри атома «законы механики и уравнения Максвелла не могут быть действительны»¹.

На вопрос же о том, что надлежит поставить на место этих уравнений, чтобы «совместно обозреть с единой точки зрения» удивительные факты, связанные с квантом действия, законы атомных спектров и т. д., на этот вопрос эксперимент ничего не отвечает. Здесь должна прийти на помощь теория, так как, по мнению Ми, от одного эксперимента нельзя ожидать ответа на поставленный выше вопрос. Для дальнейшего прогресса нашего познания совершенно необходимо заложить новые основы теории материи. Эту задачу и ставит перед собой Ми. Цель его работы «объяснить существование неделимого электрона и рассмотреть явления гравитации в необходимой связи с существованием материи». Он считает, что «электрические и гравитационные действия суть непосредственные проявления сил, на которых вообще основывается существование материи. Было бы бессмысленно представлять себе материю, мельчайшие частицы которой не имели бы электрического заряда, так же как бессмысленна материя без тяжести». Итак, по мнению Ми, в основе существования материи лежат силы электрические и гравитационные. Несмотря на некоторую расплывчатость формулировки, эта точка зрения есть, конечно, последовательный динамизм — динамизм, понятый в смысле установления сущности материи через силы и в самих силах. Однако для того, чтобы от общей установки перейти к конкретному исследованию отдельных проблем, необходимы какие-то дополнительные физические предпосылки. Эти предпосылки должны дать возможность математически рассмотреть поставленную проблему теории материи. В силу чрезвычайно общей постановки вопроса иной путь восхождения от постулируемой сущности материи к отдельным конкретным явлениям невозможен. Каковы же эти основные предпосылки? Ми выдвигает в качестве основной предпосылки положение,

¹ Mie G., Grundlagen einer Theorie der Materie, Erste Mitteilung, Annalen der Physik, т. 37, 1912, стр. 511.

что «внутри электрона имеется электрическое и магнитное поле. Электроны и вместе с тем вообще мельчайшие частицы материи, по этому воззрению, не являются существенно отличными от мирового эфира», они не являются чуждыми эфиру телами, как думали многие раньше, «они есть только места, где эфир имеет совершенно особое состояние, которое мы обозначаем при помощи термина — электрический заряд»¹. Это утверждение Ми близко к взглядам Лармора и восходит к Лоренцу, который строил свою теорию электронов на допущении, что «эфир не только занимает все пространства между молекулами, атомами или электронами, но и проникает все эти частички»². Так как, кроме того, согласно Лоренцу эфир всегда остается в покое, то необходимо «мыслить частички материи как некоторые местные модификации в состоянии эфира»³. Но если внутри электронов имеется эфир, то там может существовать и электромагнитное поле. Поэтому физика превращается в физику эфира, изучающую последний как там, где есть заряд, так и там, где его нет. В предисловии к своему «Курсу электричества и магнетизма», имеющему характерный подзаголовок «Экспериментальная физика мирового эфира для физиков, химиков и электротехников», Ми говорит: «Моя терминология характеризуется тем, что я не боюсь употребления слова эфир или мировой эфир, но определяю учение об электричестве как физику эфира или, *cum grano salis*, даже как механику эфира»⁴. Однако это не означает простого сведения законов электромагнитных явлений к законам механики. Дело обстоит, скорее всего, как раз наоборот. «Прежде всего следует обратить внимание на то, что понятия механики, если исключить весьма поучительные, по моему мнению, „анalogии“, не должны быть прилагаемы к эфиру; как это следует из опытных данных, эти понятия и не могут вообще к нему прилагаться. Это — альфа и омега современных взглядов на электромагнитные явления в той форме, которую этим взглядам придал Лоренц. Постепенное развитие нашего знания все более и более стремится к тому, чтобы рассматривать атомы и молекулы как особенные области эфира, а не эфир—как особый род материи. Иными словами — нашей целью является сведение механики к электромагнитным явлениям и законам, а не сведение электромагнетизма к механическим явлениям»⁵. Итак, задача сформулирована ясно. Попытаемся выяснить, что нового дает такая постановка вопроса по сравнению с обычной механистической концепцией?

¹ Mie G., Grundlagen einer Theorie der Materie, Erste Mitteilung, Annalen der Physik, т. 37, 1912, стр. 511.

² Лоренц Г. А., Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, пер. Савостьяновой, ОНТИ, 1934, стр. 25—26.

³ Там же.

⁴ Ми Г., Курс электричества и магнетизма, пер. Соколова, Изд. «Mathesis», Одесса, 1912, стр. IX.

⁵ Там же.

Прежде всего трактовка Ми вводит в физику, следуя воззрениям целой плеяды ученых XIX в., эфир как основной элемент физической картины мира. Эфир играл важную роль и в том аспекте классической механистической физики, который развился под влиянием оптических и электромагнитных открытий и теорий XIX в. Но эфир эфиру рознь. Эфир физики XIX в. — это, как правило, среда, обладающая определенными чисто механическими свойствами, объединяющими ее с вещественными частицами, и сама могущая состоять из частиц. Другими словами, это есть среда, свойства которой аналогичны свойствам непосредственно воспринимаемых тел. Эти попытки наглядной механической характеристики свойств эфира окончились, как известно, неудачей, что дало повод английскому государственному деятелю лорду Сольсбэри, избранному президентом британского общества содействия развитию наук, в своей вступительной речи еще в конце XIX в. остроумно заметить, что «главная, если не единственная, функция эфира, как кажется, состоит в том, чтобы быть подлежащим к глаголу колебаться». Другое дело — понятие эфира, развиваемое Ми. Этот эфир имеет своеобразный характер: «он не только совершенно неосязаем, но вообще сам по себе невоспринимаем... Его физические свойства абсолютно неизменны, и в силу этого мы никогда не можем воспринять какого-либо изменения его состояния». Эта точка зрения приводит к выводу, что «все явления в эфире могут быть изучаемы лишь по их действиям на материальные тела»¹. Этот вывод полностью совпадает со взглядами Дж. Дж. Томсона, считающего, что «невидимая вселенная — эфир — играет существенную роль как мастерская материальной вселенной и что наблюдаемые нами явления представляют собой ткань, которая создана на ткацком станке этой невидимой вселенной»². Но есть между ними и существенное различие, состоящее в том, что эфир Томсона имеет определенно механический характер, а эфир у Ми настолько отличается от обычного вещества, что, может быть, лучше было бы «вместо термина „эфир“ употреблять слова вакуум или пустота»³. Такое словоупотребление уже само по себе отражает опустошенность механистического понятия «эфир» на данной ступени развития физической науки.

Такая терминология, по мнению Ми, была бы подходящей, так как она до известной степени исключает могущие иметь место в связи со словом «эфир» недоразумения механического характера. Однако у этой терминологии есть тот недостаток, что она заставляет нас думать об эфире, как о чем-то совершенно не имеющем положи-

¹ Ми Г. Курс электричества и магнетизма, пер. Соколова, Изд. «Mathesis», Одесса, 1912, стр. X.

² Томсон Дж. Дж., Материя и эфир, Напечатано в книге: Дж. Дж. Томсон, Электричество и материя, пер. Давыдова и Лихтгейма, ГИЗ, 1928, стр. 112.

³ Ми Г., Курс электричества и магнетизма, стр. X.

тельного содержания. На самом же деле об этой субстанции можно все же высказать несколько весьма общих положений. «Вся эта субстанция совершенно однообразна и неизменна; ее поведение подчиняется весьма простым и ясным закономерным зависимостям, которые, по-видимому, совершенно точно выражаются простыми математическими формулами — уравнениями Максвелла»¹.

Вообще вся развитая Ми концепция имеет своим источником взгляды Лоренца. Излагая общие принципы своей теории электромагнитного поля и электронов, Лоренц указывает, что, исходя из электродинамики Максвелла, мы обращаем главное внимание на состояние некоторой среды, заполняющей поле. Однако, по его мнению, хотя мы все время интересуемся этим «состоянием», нам вовсе не надо пытаться его себе как-нибудь наглядно представлять². Это не значит, конечно, что нельзя вообразить себе какой-либо механизм процессов, совершающихся в этой среде — эфире. Наоборот, можно строить самые различные механизмы, но реальной необходимости в этом нет, так как можно весьма широко развить общую схему теории, характеризовать целый ряд явлений, «не прибегая к умозрительным представлениям такого рода». Громадные трудности, которые встали на пути модельного метода, вызвали, как осторожно выражается Г. Лоренц, тенденцию «избегать их (моделей — Л. П.) вовсе и строить теорию на небольшом числе предположений более общего характера»³. Это оказывается возможным, если феноменологически определить электрическую и магнитную силы. Взяв за исходный пункт эти две величины, физика пытается выразить их связи и соотношения посредством системы уравнений, имеющих весьма широкую сферу применения. «Таким образом, математические соотношения приобретают исключительное значение; Герц шел весьма далеко, утверждая даже, что теорию Максвелла лучше всего определить как систему уравнений Максвелла»⁴.

Сам Максвелл, основываясь на аналогии между явлениями самоиндукции и явлениями инерции, первоначально доказывал возможность механического объяснения электромагнитных явлений, так как уравнения индуцированных токов могут быть облечены в форму, совершенно сходную с уравнениями механики Лагранжа. Как известно, многочисленные попытки разрешения задачи, выдвинутой Максвеллом, не удались. В итоге «пришлось обратить задачу, поставленную Максвеллом, и попытаться построить электромагнитную динамику, по сравнению с которой обыкновенная динамика была бы только приближением...»⁵.

¹ Ми Г., Курс электричества и магнетизма, стр. X.

² Лоренц Г. А., Теория электронов, стр. 14.

³ Там же, стр. 14.

⁴ Там же, стр. 14—15.

⁵ Ланжевен П., Физика за последние двадцать лет, пер. Курбатовой, НХТИ, Ленинград, 1928, стр. 92.

Таким образом, Лоренц и Ми пришли по вопросу о соотношении механики и электродинамики к выводу, несколько отличному от позиции Лармора. Они считают, что задача сведения всех известных форм движения к механической оказалась неразрешимой. Поэтому необходимо обратить задачу и попытаться электродинамически истолковать механику, так сказать, построить электромагнитную картину мира. Лармор же продолжает считать возможным разрешение задачи построения механической картины мира, хотя эта картина и принимает у него уже феноменологический характер. Однако различие во взглядах ученых, при всей важности вытекающих из него конкретных выводов, не является принципиальным с философской точки зрения. Основной идеей классического механицизма является сведение всех форм движения к одной, механической форме. Сторонники сведения к электромагнитной форме движения отнюдь не отказываются от основной установки, состоящей в сведении многообразия форм движения к одной из них. Только место несколько скомпрометированного в этом смысле механического движения занимают электромагнитные процессы. Общая же тенденция остается: единая картина мира мыслится как картина одной формы движения.

Изложив модельные предпосылки своей полевой теории, в которой электрон и вообще частицы материи суть лишь места особого состояния эфира, Ми заключает, что для получения математической схемы для этой концепции надо задаться еще двумя предположениями. Это прежде всего предположение, очевидность которого, по его мнению, не вызывает сомнения, о всеобщей действительности принципа относительности и затем предположение, что «известные до настоящего времени (т. е. до 1912 г. — Л. П.) состояния эфира, а именно электрическое поле, магнитное поле, электрический заряд, электрический ток совершенно достаточны для того, чтобы описать все явления в материальном мире»¹. Впрочем, он чувствует сомнительность второго допущения и сам отмечает, что его надо сначала испробовать, и если оно не подтвердится, изменить систему фундаментальных величин. Кроме того, им предполагается, конечно, сохранение и локализуемость энергии.

Ми сначала записывает свои нелинейные уравнения поля, а затем, задав лагранжеву функцию в форме, явно зависящей от потенциалов поля, он показывает, что его уравнения суть лагранжевы уравнения этой задачи. Таким образом, проблема единой теории материи сводится к задаче отыскания универсального лагранжиана

$$L = L(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \varrho, \mathbf{v}), \quad (25)$$

где ϱ — заряд, а $\mathbf{v}$ — вектор тока. Тогда

$$\delta \int L(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \varrho, \mathbf{v}) dx dy dz dt = 0; \quad (26)$$

¹ Mie G., Grundlagen einer Theorie der Materie, стр. 513.

интеграл этот должен быть лоренц-инвариантен, т. е. L должен быть четырехмерным скаляром, образованным из $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, ρ , $\mathbf{v}$. Можно образовать лишь четыре подобные величины, являющиеся независимыми друг от друга. Вот они согласно Ми:

1) абсолютное значение 4-вектора $P(\mathbf{v}, i\rho)$

$$\sqrt{\rho^2 - v^2},$$

2) абсолютное значение 6-вектора F , для которого мы берем квадрат

$$E^2 - H^2,$$

3) скалярное произведение 6-вектора F на дуальный к нему вектор F^*

$$(\mathbf{E}\mathbf{H})^1,$$

4) инвариант, получающийся в результате умножения 4-вектора P на 6-вектор F и на дуальный к нему вектор F^*

$$(\rho\mathbf{H} - [\mathbf{v}\mathbf{E}])^2 - (\mathbf{v}\mathbf{H})^2.$$

В тензорном исчислении доказывается, что в рассматриваемом случае не может быть больше никаких инвариантов.

В рассматриваемой работе Ми впервые указал на возможность нелинейной электродинамики. Его теория страдала тем недостатком, что она не была калибровочно инвариантной², так как в его уравнения входили в явном виде электромагнитные потенциалы. Однако у него мы находим две важные идеи, которые сыграли существенную роль в развитии общей теории относительности и теории квантованных полей. Это, во-первых, идея построения новой обобщенной электродинамики путем использования различных инвариантов поля и, во-вторых, отчетливо выраженная идея единой теории поля, в которой характеристики частиц должны были получаться из полевой картины.

Сама по себе схема Ми, конечно, не могла решить проблемы поля и структуры электрона, так как она была предложена до квантовой механики, до открытия спина и других свойств электрона. Попытка свести все вещество к электромагнитному полю окончилась неудачей, хотя развитая при этом Ми идея нелинейного обобщения сыграла существенную роль в последующем развитии науки.

¹ Это — псевдоинвариант; инвариантом будет только его квадрат.

² Как известно, при заданном электромагнитном поле мировой вектор потенциала φ_i определяется неоднозначно, так как к нему можно прибавить произвольное градиентное поле Φ без того, чтобы нарушились уравнения поля. Это преобразование мирового вектора потенциала путем прибавления градиента является калибровочным преобразованием (иногда называемым градиентным преобразованием). Это преобразование, конечно, не имеет ничего общего с преобразованием координат. Отсюда требование калибровочной инвариантности.

3. Вариационные принципы и уравнения электромагнитного поля у М. Планка

В 1908 г. М. Планк рассмотрел применение принципа наименьшего действия в электродинамике. Он исследовал этот вопрос как естественное обобщение вариационных принципов на упругие и электродинамические явления, т. е. на те случаи, когда обобщенные координаты состояния системы представляют собой непрерывное многообразие. Рассмотрим в качестве простейшего примера бесконечно малую деформацию абсолютно упругого тела. За координаты возьмем q_i — слагающие перемещения точки из ее положения равновесия (x_i) как функции x_i . Тогда

$$A = \int d\sigma \sum \Phi_{v_i} \delta q_i, \quad (27)$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности, v — внутренняя нормаль. Кинетическая энергия будет

$$T = \int \frac{d\tau}{2} k \sum (\dot{q}_i)^2, \quad (28)$$

где $d\tau$ — элемент объема, k — объемная плотность.

Потенциальная энергия V есть также объемный интеграл от некоторой однородной функции f второй степени, представляющей потенциальную энергию элемента объема. Она зависит только от шести величин деформации:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} = x_x, \quad \frac{\partial q_2}{\partial y} = y_y, \quad \frac{\partial q_3}{\partial z} = z_z, \quad (29)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial z} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = y_z = z_y, \quad \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial z} = z_x = x_z,$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = x_y = y_x. \quad (30)$$

В общем случае в f входит 21 независимая произвольная постоянная, характеризующая упругое состояние вещества. Для изотропных тел это число в силу симметрии сводится к двум.

Подставив в принцип Гамильтона, выражения A , T , f , получим

$$\int dt \left[\int d\tau k \sum \dot{q}_i \delta \dot{q}_i - \int d\tau \left(\frac{\partial f}{\partial x_x} \delta x_x + \frac{\partial f}{\partial x_y} \delta x_y + \dots \right) + \int d\sigma \sum \Phi_{v_i} \delta q_i \right] = 0. \quad (31)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f}{\partial x_x} &= X_x, & -\frac{\partial f}{\partial y_y} &= Y_y, & -\frac{\partial f}{\partial z_z} &= Z_z, \\ -\frac{\partial f}{\partial y_z} &= Y_z = Z_y, & -\frac{\partial f}{\partial z_x} &= Z_x = X_z, & -\frac{\partial f}{\partial x_y} &= X_y = Y_x \end{aligned}$$

и с помощью интегрирования по частям, приведя $\delta \dot{q}_i$ и $\delta x_x, \dots$ к δq_i , найдем внутри тела

$$k\ddot{q}_i + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0 \quad (32)$$

и на поверхности

$$X_\nu = X_x \cos \nu x + X_y \cos \nu y + X_z \cos \nu z \quad (33)$$

.....,

как это известно из теории упругости.

Рассмотрим теперь электродинамические явления в покоем однородном диэлектрике, например, пустоте¹. Приложение принципа Гамильтона к этой задаче мало чем отличается от только что рассмотренного, за исключением того, что V зависит от q_i несколько иначе, чем для упругой среды. Имеем

$$\left. \begin{aligned} A &= \int d\sigma \sum \Phi_{\nu i} \delta q_i, \\ H &= T - V, \\ T &= \int d\tau \frac{k}{2} \dot{q}^2. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Для V напомним

$$V = \int d\tau \frac{h}{2} (\text{rot } q)^2. \quad (35)$$

Введенные выражения определяют не только уравнения движения, но и граничные условия. В самом деле, принцип Гамильтона дает

$$\int dt \left[\int d\tau \cdot k (\dot{q} \delta \dot{q}) - \int d\tau \cdot h (\text{rot}_x q \cdot \delta \text{rot}_x q + \dots) + \int d\sigma \sum \Phi_{\nu i} \delta q_i \right] = 0. \quad (36)$$

Отсюда найдем аналогично способу, развитому в задаче теории упругости,

$$k\ddot{q}_i = h \left(\frac{\partial \text{rot}_y q}{\partial z} - \frac{\partial \text{rot}_z q}{\partial y} \right)$$

.....

или короче

$$k\ddot{q} = -h \text{rot rot } q \quad (37)$$

и для поверхности

$$\Phi_{\nu i} = h (\text{rot}_z q \cdot \cos \nu y - \text{rot}_y q \cdot \cos \nu z) \quad (38)$$

.....

¹Ср. Synge J. L., Relativity: The special Theory, Amsterdam, 1958.

Если теперь положить T равным электрической, а V — магнитной энергии (или наоборот), то эти уравнения совпадут с уравнениями электродинамики.

Пусть

$$T = \frac{1}{8\pi} \int d\tau \cdot \epsilon E^2, \quad V = \frac{1}{8\pi} \int d\tau \cdot \mu H^2, \quad (39)$$

где E и H — силы поля, ϵ — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость.

Сравним эти выражения T и V с написанными выше. Получим

$$\dot{q} = -E \sqrt{\frac{\epsilon}{4\pi k}}, \quad \text{rot } q = H \sqrt{\frac{\mu}{4\pi k}}.$$

Исключим q ; тогда

$$\dot{H} = - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu} \frac{h}{k}} \text{rot } E.$$

Далее, из уравнения (37)

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{h}{k}} \text{rot } H.$$

Сравнивая эти выражения с уравнениями электродинамики

$$\dot{H} = -\frac{c}{\mu} \text{rot } E, \quad \dot{E} = \frac{c}{\epsilon} \text{rot } H,$$

где c — скорость света в пустоте, видим, что для их тождественности надо положить

$$\frac{c}{\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu} \frac{h}{k}} \quad \text{и} \quad \frac{c}{\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} \frac{h}{k}}$$

или

$$\frac{h}{k} = \frac{c^2}{\mu\epsilon}.$$

Из выражений для A , X , q , $\text{rot } q$ легко получить вектор Умова—Пойнтинга для потока энергии.

Таким образом, при надлежащем выборе выражения для L мы получили уравнения Максвелла.

Теперь Планк ставит перед собой фундаментальный вопрос: «Но сведены ли таким образом электродинамические явления к механическим? Нисколько, ибо вектор q , которым мы пользовались, не представляет величины механической. Невозможно также вообще толковать q механически, например, q — как перемещение, $\dot{q}$ — как скорость, $\text{rot } q$ — как вращение; ибо в электрическом поле $\dot{q}$ — постоянно, между тем q растет неопределенно со временем; таким образом, $\text{rot } q$ нельзя толковать как вращение.

Хотя, таким образом, вышеприведенные соображения не доказали возможности механического толкования электрических явлений,

но, с другой стороны, из них несомненно вытекает, что значение принципа наименьшего действия распространяется далеко за пределы механики в узком смысле слова и что, так как этот принцип охватывает собою все обратимые процессы, то он может быть принят в основание общей динамики¹.

Такова точка зрения Планка, основной методологической идеей которого была идея единой физической картины мира. В начале XX в. единственной реальной возможностью не дать физической картине мира распасться на отдельные внутренне разобщенные элементы было использование принципа наименьшего действия или принципа Гамильтона в качестве объединяющего начала. Именно эта роль отводится ему Планком.

Существенно отметить разницу в подходе Ми и Планка к программе единой (или, точнее говоря, объединенной) физической картины мира. У Планка схемы отдельных частей ее строятся по аналогии, ограниченность которой он ясно видит. Ми все еще стремится лишь к видоизменению модельной схемы, оставляя принципиальную концепцию единообразного сведения нетронутой.

Итак, применяя динамическую схему, основанную на вариационных принципах, к явлениям электродинамики, мы не объясняем их природу с помощью понятий механики, а выясняем лишь, что при соответствующем изменении и обобщении математические выражения законов механики, которые заключают в себе детерминизм и обратимость, позволяют описать некоторые черты и особенности электродинамических процессов.

Исторически Максвелл сначала нашел уравнения, названные его именем, а затем Лармор, Лоренц и другие показали, что, задавшись соответственным видом лагранжевой функции и, явно или неявно, наложив на нее условия лоренц-инвариантности и калибровочной инвариантности, можно получить эти уравнения.

В квантовой электродинамике и квантовой теории полей широко применяется обратный ход идей. Прежде всего вводят (обычно неявную) предпосылку, что законы этих областей физики могут быть также, как и законы классической физики, выражены в форме вариационного принципа. Затем предполагают возможный тип полей (скалярное, псевдоскалярное, векторное и т. п.) и те или иные требования инвариантности (являющиеся обобщением и распространением итога развития экспериментальной и теоретической физики). Записав лагранжеву функцию (или ее плотность), удовлетворяющую перечисленным условиям, получают возможность построить схему законов тех или иных квантованных (свободных или взаимодействующих) полей, аналогичную схеме классической физики.

¹ Планк М., Теоретическая физика, пер. Занчевского, 1910, стр. 136; «Сборник», стр. 571—579.

4. Вариационные принципы механики в специальной теории относительности¹

Мы уже имели случай отметить, что принцип Гамильтона нельзя рассматривать как общий принцип в духе картезианства или в духе знаменитого уравнения Лапласа. Он не представляет собой такого общего начала, из которого можно дедуктивным путем вывести законы частных явлений. Специфика явлений должна быть некоторым образом подсказана экспериментом или какими-либо независимыми от принципа обобщениями физики. Непосредственно или посредством обобщения, научной абстракции эксперимент дает возможность придать определенность величинам, входящим в принцип Гамильтона.

Таким обобщением, заключающим в себе комплекс существенно новых физических представлений, было выдвинутое специальной теорией относительности требование лоренц-инвариантности наших формулировок законов природы. Чрезвычайно важно то, что из всех основных законов классической механики релятивистски инвариантными оказались лишь вариационные принципы.

Так как в теории относительности кинетическая энергия имеет вид

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right),$$

а с помощью этого выражения нельзя определить L , то в этой теории роль «кинетической» части принципа наименьшего действия играет

$$- m_0 c^2 \int \sqrt{1 - \beta^2} dt. \quad (40)$$

Эйлерова производная этого выражения дает непосредственно релятивистский импульс, а следовательно, также закон зависимости массы (в частности, массы электрона) от скорости.

Величина, стоящая под знаком интеграла (40), является элементом собственного времени², который был признан Минковским про-

¹ Число статей и книг по теории относительности огромно. Здесь в качестве примеров рассмотрено лишь несколько статей с интересующей нас точки зрения. Большую библиографию см. Lecat M., *Bibliographie de la relativité* Bruxelles, 1924; А. Эддингтон, *Теория относительности*, ГТТИ, 1934, список литературы.

² Квадрат интервала собственного времени определяется так:

$$\tau_{12}^2 = (t_2 - t_1)^2 - \frac{1}{c^2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2],$$

где (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) — пространственные и временные координаты двух событий. Если существует система отсчета, по отношению к которой оба события происходят в одной и той же точке пространства, то τ_{12} (положительный корень из τ_{12}^2) представляет собой время между этими событиями, регистрируемое часами, находящимися в покое относительно этой системы отсчета.

стейшим инвариантом специальной теории относительности и введен Эйнштейном в качестве элемента мировой линии в общую теорию относительности. Таким образом, принцип Гамильтона в форме (40) автоматически удовлетворяет требованию инвариантности теории относительности. В этом Планк видит наиболее блестящий успех, достигнутый принципом наименьшего действия¹.

Что же касается уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

взятых в обобщенных координатах, то их наиболее замечательное свойство состоит в том, что они ковариантны относительно любых преобразований координат. Аналогично выражение вида $\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r$ инвариантно по отношению к таким преобразованиям координат, которые не включают время. В самом деле,

$$\begin{aligned} \sum_s \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_s} \dot{Q}_s &= \sum_s \left\{ \left(\sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial q_r}{\partial Q_s} \right) \left(\sum_u \frac{\partial Q_s}{\partial q_u} \dot{q}_u \right) \right\} = \sum_r \sum_u \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_u \left(\sum_s \frac{\partial q_r}{\partial Q_s} \frac{\partial Q_s}{\partial q_u} \right) = \\ &= \sum_r \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_u \frac{\partial q_r}{\partial q_u} = \sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r, \end{aligned} \quad (41)$$

так как

$$\sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r = 2T = \sum_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r;$$

если $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r} = 0$, то без труда получим закон сохранения энергии:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (T + V) &= \frac{d}{dt} (2T - L) = \frac{d(2T)}{dt} - \sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r - \sum_r \frac{\partial L}{\partial q_r} \ddot{q}_r = \\ &= \frac{d(2T)}{dt} - \sum_r \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) \dot{q}_r - \sum_r \frac{\partial L}{\partial q_r} \ddot{q}_r = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r \right) - \frac{d}{dt} \left(\sum_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r \right) = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

т. е. $T + V$ остается постоянным в течение движения.

Лагранжевы уравнения остаются истинными и в теории относительности, хотя и только для одной частицы, движущейся в поле сил, имеющих потенциал.

Уравнения Эйлера—Лагранжа для вариационной задачи совпадают с уравнениями движения Лагранжа, которые ковариантны не только относительно ортогональных преобразований простран-

¹ P l a n c k M., Die Kultur der Gegenwart, т. III, Abt. III, 2, Leipzig, 1915, стр. 701.

ственных координат, но и относительно произвольных преобразований n координат, соответствующих n степеням свободы системы.

Рассмотрим $(n + 1)$ -мерное пространство с координатами x_i и t и криволинейный интеграл

$$I = \int_{P_1}^{P_2} L dt, \quad (43)$$

где $L = L(x_i, \dot{x}_i, t)$. Условиями экстремума будут уравнения движения Лагранжа, а определив импульсы как $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ и образовав функцию Гамильтона $H = -L + p_i \dot{x}_i$, получим канонические уравнения, которые ковариантны относительно общих преобразований трех пространственных координат.

Рассмотрим релятивистскую механику точки, не подверженной действию сил. Для импульсов, канонически сопряженных координатам x_i , имеем

$$p_i = \frac{m_i \dot{x}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (44)$$

а четвертая компонента импульса, канонически сопряженная времени, будет равна

$$p_4 = L^{(t)} - p_i \dot{x}_i, \quad (45)$$

где $L^{(t)}$ — лагранжиан, соответствующий t . Так как

$$\frac{\partial L^{(t)}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad v^2 = (\dot{x}_i)^2, \quad (46)$$

то

$$L^{(t)} = mc^2 (k - \sqrt{1 - v^2/c^2}),$$

где k — постоянная интегрирования, а интеграл I принимает следующее значение

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L^{(t)} dt = mc^2 [k(t_2 - t_1) - \tau(P_2, P_1)], \quad (47)$$

где $\tau(P_2, P_1)$ — собственное время вдоль пути интегрирования между двумя конечными точками P_1 и P_2 . Этот интеграл лоренц-инвариантен, если $k = 0$. Выражение $mc^2 k (t_2 - t_1)$ не зависит от пути интегрирования, и поэтому может быть отброшено при образовании вариации δI , если пределы интеграла не варьируются. При переходе к четырехмерному представлению этот член как неинвариантный может быть опущен.

Разрешим уравнение (44) относительно $\dot{x}_i$; найдем

$$\dot{x}_i = \frac{p_i/m}{\sqrt{1 + p^2/m^2 c^2}},$$

тогда гамильтониан будет

$$H^{(1)} = mc^2 (\sqrt{1 + p^2/m^2 c^2} - k) = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - k \right). \quad (48)$$

При $k = 1$ $H^{(1)}$ равен релятивистской кинетической энергии, а при $k = 0$ — полной энергии. Уравнения Гамильтона будут:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i/m}{\sqrt{1 + p^2/m^2 c^2}}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = 0. \quad (49)$$

При $k = 0$ интеграл (47) равен длине дуги мировой линии в пространстве Минковского, а уравнения Эйлера—Лагранжа совпадают с дифференциальными уравнениями геодезических линий.

Дифференциальные уравнения геодезических линий можно получить варьированием интеграла

$$I = \int_{P_1}^{P_2} \psi \left(g_{ik}, \frac{d\xi^i}{ds}, \frac{d\xi^k}{ds} \right) ds, \quad (50)$$

где ξ^k — произвольные недекартовы координаты; g_{ik} — метрический тензор — является выражением вида

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi^l} \frac{\partial x_i}{\partial \xi^k},$$

которое при переходе от одной системы ξ^k к другой ξ'^m преобразуется как тензор, т. е. g_{ik} есть ковариантный симметричный тензор второго ранга. Он входит в выражение квадрата элемента расстояния (меропределения)

$$ds^2 = g_{ik} d\xi^i d\xi^k.$$

Пусть s — длина дуги, A и B — фиксированные начальная и конечная точки, λ — любой параметр.

Тогда для геодезической линии должно быть

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B \sqrt{g_{ik} \frac{d\xi^i}{d\lambda} \frac{d\xi^k}{d\lambda}} d\lambda = 0, \quad (51)$$

где варьируются функции $\xi^k = \xi^k(\lambda)$. Выберем параметр λ так чтобы на экстремалих он совпадал с длиной дуги s и пробегал ту же область значений. Тогда в окончательных дифференциальных уравнениях можно будет заменить λ на s .

Проведем над выражением (51) преобразование, соответствующее в механике переходу от принципа наименьшего действия в форме Якоби к принципу Гамильтона¹. Пусть

$$L = \frac{1}{2} g_{ik} \frac{d\xi^i}{d\lambda} \frac{d\xi^k}{d\lambda},$$

¹ У о с с А., Encycl. d. Math. Wiss., Art. IV, 1, стр. 96.

тогда

$$\delta \int_A^B ds = \int_A^B \frac{\delta L d\lambda}{\sqrt{g_{ik} \frac{d\xi^i}{d\lambda} \frac{d\xi^k}{d\lambda}}} \quad (52)$$

и так как значение корня для экстремали равно 1, то вместо уравнения (51) можно просто написать

$$\int_A^B \delta L d\lambda = \delta \int_A^B L d\lambda = 0. \quad (53)$$

Мы получили полную аналогию с принципом Гамильтона, если рассматривать L как функцию Лагранжа. Отсюда без труда находится дифференциальное уравнение геодезической линии¹.

В обычной механике уравнения Лагранжа получаются, если для пространственных координат допустить все возможные точечные преобразования. Изложенный ход идей показывает, что та же форма уравнений сохраняется и в том случае, если произвольным способом изменять также время, однако в этом случае независимой переменной будет s , а не t ².

При попытках вывести уравнение релятивистской электродинамики из вариационного принципа исходным пунктом явилась работа Шварцшильда 1903 года³.

Шварцшильд сначала образовал функцию Лагранжа с помощью интегрирования по объему:

$$\frac{1}{2} \int (E^2 - H^2) dV + \int e \left\{ \varphi - \frac{1}{c} (A u) \right\} dV.$$

Затем, интегрируя по времени, он получил интеграл действия. Введение четырехкратного интеграла позволило далее Пуанкаре объединить интегрирование по пространству и времени.

Пусть L — инвариант

$$L = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = H^2 - E^2;$$

тогда принцип действия можно записать в виде

$$\delta I = \delta \int (L - 2 \varphi_i s^i) dV_{(4)} = 0 \quad (54)$$

при следующих условиях: во-первых, независимыми переменными являются компоненты четырехмерного потенциала φ_i , во-вторых, четырехмерный ток s^i , т. е. мировые линии электрических зарядов

¹ Геодезические линии могут быть определены и с помощью принципа Гамильтона, так как они эквивалентны экстремалиям, для которых вариация интеграла длины кривой равна нулю. (Kneser A., *Encycl. d. Math. Wiss.*, Art. II, 8, стр. 597—600.)

² Levi-Civita T., *L'enseignement mathem.*, т. 21, 1920.

³ Schwarzschild K., *Gött. Nachr., Math.-phys. Kl.*, 1903, стр. 125

и величина зарядов не варьируются. Из выражения (54) следуют уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} = e \frac{\mathbf{u}}{c}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = e.$$

Что же касается двух других уравнений Максвелла

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

то их существование уже предположено при написании выражения (54), так как введен четырехмерный вектор-потенциал; функция поля φ , есть определенная функция координат четырехмерного мира и она не варьируется, а мировые линии материи должны варьироваться.

После того как Пуанкаре¹ убедился в инвариантности интеграла действия в форме, приданной ему Шварцшильдом относительно преобразования Лоренца, М. Борн² применил четырехмерную векторную форму записи принципа действия.

Перелом в использовании вариационных принципов для построения теории полей произошел тогда, когда благодаря теории относительности выяснилось, что из всех возможных видов лагранжевой функции для того или иного поля надо выбирать функцию, удовлетворяющую определенным требованиям инвариантности и, в первую очередь, лоренц-инвариантности (см. гл. IV и VIII).

Уже в первой классической работе А. Пуанкаре мы находим многие из черт, характерных для последующего развития физической теории. Прежде всего, введя в рассмотрение преобразование Лоренца³, он в параграфе втором рассматривает принцип наименьшего действия, т. е., собственно говоря, принцип Гамильтона. Пуанкаре исходит из выражения

$$I = \int dt d\tau \left[\frac{\sum E^2}{2} - \frac{\sum H^2}{2} \right], \quad (55)$$

где $d\tau = dx dy dz$. Используя известный прием интегрирования по частям и неизменяемость заряда при вариации (выразив его с помощью уравнения непрерывности), Пуанкаре находит уравнения Лоренца.

После этого Пуанкаре в параграфе третьем, названном им «преобразование Лоренца и принцип наименьшего действия», рассма-

¹ Poincaré H., Rend. Pal., т. 21, 1906, стр. 129, Sur la dynamique de l'électron, Русский перевод в книге «Принцип относительности», Сб. работ классиков релятивизма, под ред. В. К. Фредерикса и Д. Д. Иваненко, ОНТИ, 1936, стр. 51.

² Born M., Ann. d. Phys., т. 28, 1909, стр. 571.

³ Надо отметить, что Лоренц не первый указал формулы преобразования, носящие его имя. Еще в 1900 г. Лармор приводит их в своей книге «Aether and Matter» стр. 167, 174, 176—177.

тривает вопрос, не указывает ли принцип наименьшего действия на причину успеха преобразований Лоренца¹. Для этого нужно определить, как изменится в результате этого преобразования интеграл (55). Обозначая преобразованный интеграл через I' , найдем

$$I' = I.$$

Для того, чтобы это равенство имело место, достаточно, чтобы пределы интегрирования в обоих случаях были одни и те же: x, y, z, t изменяются от $-\infty$ до $+\infty$.

Итак, в результате преобразования Лоренца выражение

$$\sum E^2 - \sum H^2$$

осталось неизменным с точностью до постоянного множителя; очень важно отметить, что этого нельзя сказать о выражении

$$\sum E^2 + \sum H^2,$$

входящем в энергию. Введя затем понятие о непрерывной группе Лоренца, Пуанкаре при рассмотрении проблемы тяготения (§ 9) ставит перед собой задачу отыскания инвариантов группы Лоренца. Такое рассмотрение проблемы во многом превосходит современные методы исследования теории квантованных полей и делает особенно интересной эту классическую работу Пуанкаре.

Итак, принцип Гамильтона есть релятивистский инвариант. Так как для электромагнитного поля лоренц-инвариантна величина

$$\mathbf{H} + i\mathbf{E},$$

то, отделяя вещественную и мнимую части, разобьем этот инвариант на два

$$H^2 - E^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{H}\mathbf{E}.$$

Лоренц-инвариантность величин $H^2 - E^2$ и $\mathbf{H}\mathbf{E}$ показывает, что характерные свойства свободного электромагнитного поля, а именно равенство и ортогональность электрической и магнитной составляющих поля, остаются неизменными во всех инерциальных системах.

К уравнениям Максвелла и Лоренца приводит только инвариант Лармора

$$L = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2). \quad (56)$$

Другие основные инвариантные комбинации, составленные из функций поля, как, например $(\mathbf{E}\mathbf{H})^2$ или $\varphi^2 - A^2$, приводят в первом случае к нелинейным уравнениям, а во втором — к уравнениям,

¹ Poincaré Н., Сб. «Принцип относительности», стр. 75.

зависящим явно от потенциалов, т. е. не удовлетворяющим требованию калибровочной инвариантности.

Принцип Гамильтона в виде, данном ему для электродинамики Шварцшильдом, в четырехмерной форме можно записать так:

$$\delta I = \delta \int \left[A_k j_k - \frac{1}{16\pi} \sum_k \sum_l \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_k} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0. \quad (57)$$

Из него можно получить уравнения электромагнитного поля, если



Г. МИНКОВСКИЙ (1834—1909)

считать четырехмерный потенциал (A_k) неизвестной функцией координат и времени, а компоненты тока (j_k) — известными величинами. Из этого же принципа можно вывести уравнения движения электрона в заданном внешнем электромагнитном поле, характеризуемом компонентами потенциала A_k , если считать эти компоненты известными функциями координат и времени, а плотность тока (j_k) — искомой функцией, соответствующей движению электрона.

Обе группы основных уравнений электродинамики, из которых одна определяет электромагнитное поле движущегося электрона, а другая — движение электрона в заданном внешнем электромагнитном поле, могут быть, следовательно, сведены к одному уравнению принципа Гамильтона

$$\delta I = 0.$$

Однако это сведение не является логически безупречным, так как при выводе уравнений поля мы рассматриваем полное поле, а при выводе уравнений движения — внешнее поле.

В работе, опубликованной в 1908 г., «Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern»¹ Минковский сформулировал как одну из трех основных аксиом этой проблемы аксиому, требующую лоренц-инвариантности уравнений электромагнитных явлений. Исходя из этих аксиом, Минковский в § 13 находит инвариантную лагранжеву функцию в виде (с точностью до множителя $1/4\pi$)

$$L = -\frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \quad (58)$$

и естественно приходит далее к уравнениям электродинамики Максвелла, а при соответствующем обобщении к уравнениям Лоренца.

Мы не можем непосредственно измерять электромагнитные поля, а наблюдаем только ускорения, приобретаемые в них заряженными частицами. Связь уравнений поля с непосредственными физическими наблюдениями дается с помощью законов, определяющих действие поля на частицу. Классический закон, определяющий силу Лоренца, имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = e \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right], \quad (59)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость частицы, $\times$ — знак векторного произведения.

В трехмерных компонентах записем

$$m\dot{x}_i = e \left[E_i + \frac{1}{c} \dot{x}_i H_{ik} \right]. \quad (60)$$

Уравнения (59) и (60) являются уравнениями Эйлера — Лагранжа вариационного принципа

$$\delta \int L dt = 0, \quad L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - e\varphi + \frac{e}{c} \dot{x}_i A_i. \quad (61)$$

¹ Minkowski H., Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-Physik. Kl., 1908, стр. 53—111; Gesamm. Abhandl., т. 2, Teubner, 1911, стр. 352—404.

Импульсы, канонически сопряженные координатам, равны

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + \frac{e}{c} A_i,$$

а гамильтониан

$$H = -L + \dot{x}_i p_i = \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2 + e\varphi = \frac{m\dot{x}^2}{2} + e\varphi. \quad (62)$$

Выражение $\varphi - \frac{1}{c} \dot{x}_i A_i$ в уравнении (61) отличается от лоренц-инвариантного скаляра только множителем $1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, а первый член в выражении (61) должен быть в релятивистской механике заменен выражением

$$L^{(1)} = m_0 c^2 \left(k - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$$

(k — произвольная постоянная), которое при $k = 0$ также отличается от скаляра на тот же множитель. Следовательно, как первый, так и второй и третий члены в уравнении (61) преобразуются одинаковым образом. Поэтому интеграл

$$I = \int_{P_1}^{P_2} \left\{ -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} \dot{x}_i A_i \right\} dt \quad (63)$$

будет лоренц-инвариантным.

Соответствующие ему уравнения Эйлера—Лагранжа также будут лоренц-ковариантны. Если взять в качестве параметра собственное время τ и ввести его вместо t , то вариация полученного таким образом интеграла будет, как не трудно показать, калибровочно-инвариантна.

При построении релятивистской механики необходимо решить две проблемы. Прежде всего уравнения классической механики ковариантны относительно преобразований Галилея, но не являются лоренц-ковариантными. Кроме того «дальноедействие» не совместимо с теорией относительности.

Релятивистские законы преобразования должны иметь такие же свойства относительно преобразования пространственных координат, как и классические законы, т. е. это должны быть: векторный закон для импульса и скалярный — для энергии. Этим обстоятельством в значительной степени определяется форма релятивистских законов.

Как отметил впервые М. Планк¹, уравнения движения релятивистской механики можно получить из вариационного принципа. Введя функцию Лагранжа

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

¹ P l a n c k M., Verhandl. d. deutsch. phys. Gesellsch., Bd. 4, 1906, стр. 136.

легко получить

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta L + k \delta r) dt = 0, \quad (64)$$

где k — четырехмерная сила Минковского; в выражении (64), так же как в классической механике, t_1 , t_0 и конечные точки пути заданы.

Так как для интеграла действия имеем

$$\int L dt = -m_0 c^2 \int d\tau,$$

где τ — собственное время, то он инвариантен относительно группы Лоренца. Тогда вариационный принцип (64) можно записать в форме

$$m_0 \delta \int d\tau + \int k_i \delta x^i = 0. \quad (65)$$

Если, кроме того, ввести для исчезающих на границах области интегрирования вариаций δx^i дополнительное условие

$$k_i v^i = 0,$$

то получим просто

$$\delta \int d\tau = 0. \quad (66)$$

Эта формулировка вариационного принципа была дана Минковским¹ в 1908 г.

Уравнения движения релятивистской механики можно записать и в гамильтоновой форме. Введем импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}},$$

и аналогично для p_y и p_z , и образуем функцию Гамильтона:

$$H = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_{\text{кин}} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\sum p_i^2}{m_0^2 c^2}}, \quad (67)$$

тогда получим

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \dots, \dot{p}_x = k_x, \dots$$

Приведение уравнений движения к канонической форме затрудняется тем, что в релятивистской механике нельзя ввести потенциальную энергию, зависящую только от координат, так как взаимодействия не могут распространяться со скоростью, большей скорости света.

¹ M i n k o w s k i H., Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Gött. Nachr., 1908, стр. 53—111, Anhang; Cesam. Abh., т. 2, 1911, стр. 392 и сл.

В некоторых случаях такую потенциальную энергию оказывается полезным ввести, как например, при рассмотрении движения материальной точки в постоянном во времени силовом поле. В этом случае

$$-\mathbf{k} = \text{grad } E_{\text{пот}},$$

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - E_{\text{пот}},$$

$$\delta \int L dt = 0,$$

$$H(p_x, \dots, x, \dots) = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dots - L$$

и

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, \dots \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

т. е. уравнения движения приведены к канонической форме. Не представляет больших трудностей ввести также обобщенные координаты и импульсы.

Надо лишь отметить, что эти уравнения согласно самому их выводу справедливы лишь в одной системе координат, определяемой характером задачи¹.

Изменения, которые внесла специальная теория относительности в классическую механику, менее существенны, чем изменения, требуемые квантовой механикой.

Основное требование, которое налагает специальная теория относительности, состоит в добавлении к обычному требованию того, чтобы законы физики были инвариантны относительно поворота системы координат, т. е. относительно ортогональных преобразований пространства, требования инвариантности относительно преобразований Лоренца. Из условия инвариантности вытекает требование, чтобы обе части равенств, выражающих законы физики, преобразовывались одинаковым образом, т. е. были ковариантны. Инвариантность физического закона относительно поворота пространственной системы координат требует ковариантности выражающего его уравнения.

Как известно, преобразование Лоренца можно рассматривать как ортогональное преобразование в четырехмерном пространстве

¹ Паули В., Теория относительности, Гостехиздат, М.—Л., 1947, стр. 178.

Минковского¹. Тогда инвариантность какого-либо физического закона относительно преобразования Лоренца можно выявить, если выразить этот закон в ковариантной форме. Тем самым решится вопрос о релятивистской правильности рассматриваемого закона. При построении релятивистской механики можно исходить из принципа Гамильтона и искать такой лагранжиан, для которого уравнения Эйлера—Лагранжа совпадут с известными релятивистскими уравнениями движения². Такую функцию для точки, находящейся в поле консервативной силы, можно взять в виде

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - V,$$

где V — потенциал, зависящий только от положения точки. Эта функция удовлетворяет уравнению Лагранжа. В самом деле, так как

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

то уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i.$$

Уже в этом случае лагранжиан не равен обычному для нерелятивистской механики $T - V$, тем не менее его производная по скорости равна импульсу. Благодаря этому и возможно удовлетворить уравнениям Лагранжа.

На этом примере можно видеть всю важность вопроса о ковариантной форме уравнений. Введенный выше лагранжиан хотя и приводит к правильным уравнениям движения, однако в нашем рассмотрении время t и пространственные координаты x_1, x_2, x_3 не являлись равноправными, хотя в пространстве Минковского

¹ Пространство Минковского представляет собой четырехмерный континуум, образованный трехмерным пространством и временем. Разница между четырехмерным евклидовым пространством и миром Минковского заключается в том, что в последнем инвариант ds^2 не является положительно определенной формой.

В пространстве Минковского время t является координатой, равноправной с пространственными координатами x_1, x_2, x_3 :

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = ict.$$

Мнимость $x_4 = ict$ тесно связана с принципом причинности. Хотя промежуток времени между двумя определенными событиями не является инвариантом, однако последовательность этих событий, если только они связаны между собой причинной зависимостью, не должна зависеть от точки зрения. Если бы x_4 было вещественно, то при достаточно большой относительной скорости двух инерциальных систем можно было бы «обратить» последовательность любой пары событий, что приводит к абсурду.

² Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, М., 1955.

они должны быть совершенно равноправными. Следовательно, во-первых, надо вместо времени ввести собственное время τ , являющееся инвариантным, а во-вторых, лагранжиан должен быть некоторым скаляром, инвариантным относительно преобразований Лоренца. Значит, ковариантная форма принципа Гамильтона будет такова:

$$\delta I = \delta \int L'(x_i, u_i, \tau) d\tau = 0, \quad (69)$$

где I и ковариантный лагранжиан L суть два инвариантных скаляра, а $u_i = \frac{dx_i}{d\tau}$.

Однако добиться такого ковариантного построения можно не в каждой задаче механики. Дело в том, что, поскольку потенциал системы определяется характером действующих сил, а не всякие силы допускают ковариантную форму, постольку не всегда можно придать лагранжиану такую форму. Хорошим примером силы, не удовлетворяющей требованию ковариантности, является сила тяжести. Напротив, электромагнитные силы удовлетворяют этому требованию теории относительности.

Действие S системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, должно состоять из суммы трех членов¹:

$$S = S_{\text{п}} + S_{\text{ч}} + S_{\text{п.ч}}, \quad (70)$$

где $S_{\text{п}}$ — часть действия, зависящая только от свойств поля, $S_{\text{ч}}$ — часть действия, зависящая только от свойств самих частиц, $S_{\text{п.ч}}$ — часть действия, образуемая взаимодействием между частицами и полем. Окончательное выражение S зависит лишь от произвольных постоянных, умножаемых на отдельные слагаемые, входящие в S .

Постоянная в $S_{\text{ч}}$ есть масса покоя частицы (значение ее берется из эксперимента), постоянная в $S_{\text{п}}$ есть множитель нормировки, определяющий выбор единиц (например, гауссовых), постоянная в $S_{\text{п.ч}}$ есть коэффициент связи заряженной частицы с полем (электрический или какой-либо иной заряд).

Для нахождения вида $S_{\text{п}}$ надо исходить из экспериментально обоснованного положения, что электромагнитное поле подчиняется принципу суперпозиции, согласно которому два поля, создаваемых

¹ Ландау Л. и Лившиц Е., Теория поля, изд. 2, ГТТИ, М.—Л., 1948, § 26—29; см. также Иваненко Д. и Соколов А., Классическая теория поля (новые проблемы), ГТТИ, М.—Л., 1949.

Вообще говоря, представление лагранжиана взаимодействующих полей в виде суммы

$$L_{\text{своб}} + L_{\text{взаим}}$$

имеет своим истоком написание функции действия для классической задачи возмущенного движения в виде

$$S_0 + S_1 + \dots$$

двумя различными зарядами, просто складываются. Сумма любых таких полей также должна быть полем, т. е. удовлетворять уравнениям поля. Отсюда ясно, что уравнения поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями (так как сумма любых их решений есть также решение). Следовательно, S_n должно быть квадратично по полю, так как уравнения поля только в этом случае будут линейными, потому что они получаются варьированием действия, а при варьировании степень подынтегрального выражения понижается на единицу.

Вне механики координатами являются любые переменные, по которым производится варьирование в принципе Гамильтона. Поэтому подынтегральная функция в S_n не должна содержать производных от тензора электромагнитного поля F_{ik} ¹, так как функция Лагранжа может содержать только координаты и их первые производные по времени, а роль координат в случае проблемы электромагнитного поля играют потенциалы A_k поля.

Действие для электромагнитного поля вместе с находящимися в нем зарядами имеет вид

$$S = - \sum mc ds + \frac{i}{16\pi c} \int F_{ik}^2 dV_{(4)} + \sum \int \frac{e}{c} A_k dx_k, \quad (71)$$

где $dV_{(4)} = dx dy dz d\tau$ (τ — собственное время). Заметим, что в трехмерном виде

$$S_n = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 - H^2) dV_{(3)} dt, \quad (72)$$

где $dV_{(3)}$ — элемент объема.

¹ Как известно, антисимметричный тензор электромагнитного поля F_{ik} характеризуется всего двумя инвариантами:

$$F_{ik}^2 = H^2 - E^2, \quad e_{iklm} F_{ik} F_{lm} = \mathbf{E}\mathbf{H},$$

которые являются единственно независимыми, а любой другой инвариант может быть представлен как функция этих двух инвариантов; здесь e_{iklm} совершенно антисимметричный единичный тензор четвертого ранга. Строго говоря, вторая из написанных величин не является скаляром, а представляет собой псевдоскаляр (произведение тензора F_{ik} , который в развернутой форме записывается так:

$$F_{ik} = \begin{vmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{vmatrix},$$

где $E_x, \dots$ и $H_x, \dots$ — компоненты напряженностей электрического и магнитного полей, на дуальный ему тензор). Только $(\mathbf{E}\mathbf{H})^2$ есть истинный скаляр. (Псевдотензоры любого ранга, в частности, псевдоскаляры ведут себя как тензоры при всех преобразованиях координат, за исключением тех, которые не могут быть сведены к поворотам, т. е. за исключением отражений — изменений знаков координат, не сводимых к вращениям.) Заметим, что объединение $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ в один антисимметричный мировой тензор второго ранга образует основу релятивистской электродинамики.

Если ввести в выражение (71) четырехмерный вектор тока, то получим, как известно, вместо третьего члена справа следующее выражение :

$$-\frac{i}{c^2} \int A_i j_i dV_{(4)},$$

где j_i — составляющие 4-вектора $\mathbf{j}$.

Тогда действие S принимает вид

$$S = - \sum \int mc ds + \frac{1}{16\pi c} \int F_{ik}^2 dV_{(4)} - \frac{1}{c^2} \int A_i j_i dV_{(4)}. \quad (73)$$

Для нахождения уравнений поля с помощью принципа Гамильтона мы должны считать заданным движение зарядов и варьировать только поле, т. е. потенциалы, а при нахождении уравнений движения, напротив, надо варьировать траекторию частицы, а поле считать заданным.

Поэтому при отыскании уравнений поля вариация первого члена в выражении действия (73) равна нулю, а во втором члене ток j_i не варьируется. Выполнив варьирование и заметив, что $F_{ik} = -F_{ki}$, а $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, получим

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left(\frac{1}{c} j_i \delta A_i + \frac{1}{4\pi} F_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \delta A_i \right) dV_{(4)}. \quad (74)$$

Взяв второй интеграл по частям (т. е. применив теорему Гаусса) найдем

$$\delta S = \frac{1}{ic} \int \left(\frac{1}{c} j_i - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} \right) \delta A_i dV_{(4)} + \frac{1}{4\pi ic} \int F_{ik} \delta A_i ds_k. \quad (75)$$

Второй член равен нулю, так как пределами интегрирования по координатам является бесконечность, где поле равно нулю, а по времени в конечный и начальный момент времени вариация потенциала равна нулю, как того требует условие принципа Гамильтона. Так как вариации δA_i произвольны, то, как обычно,

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i. \quad (76)$$

Эти уравнения ($i = 1, 2, 3, 4$) и есть вторая пара уравнений Максвелла. Действительно, воспользовавшись значениями F_{ik} и записав уравнения (76) в трехмерном виде, получим

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (77)$$

для $i = 1, 2, 3$ и

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho$$

для $i = 4$.

Вместе с первой парой уравнений $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, $\text{div } \mathbf{H} = 0$ они полностью определяют электромагнитное поле, являясь основными уравнениями классической электродинамики.

Отметим в заключение, что в теории относительности законы движения тел, рассматриваемых как особые точки поля, вытекают только из уравнений поля. В этом состоит важное отличие теории относительности от электродинамики Лоренца, в которой закон движения является дополнительным постулатом, логически независимым от уравнений Максвелла.

В 1934 г. М. Борн¹ разработал релятивистский вариант нелинейной теории поля, являющийся развитием идей, изложенных в 1912 г. Г. Ми (см. стр. 463), в новой «квантовой обстановке».

Разница между теорией Ми и теорией Борна состоит в том, что Ми предположил, что L есть также функция потенциалов поля Φ_k . Поэтому он определил плотности заряда и тока как производные функции L по Φ_k . Однако это допущение приводит к серьезным трудностям, так как физически невозможно, чтобы законы поля зависели от абсолютного значения потенциалов. Борн в своей теории преодолел эту трудность.

Напомним, что непосредственный физический смысл в классической электродинамике имеют лишь напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, так как именно они определяют энергию поля, пондеромоторные силы и т. д. (если ϵ и μ заданы), а скалярный и векторный потенциалы φ и $\mathbf{A}$ являются вспомогательными понятиями.

Физически два поля, описываемые равными $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, тождественны, хотя бы потенциалы φ и $\mathbf{A}$ были различны. Рассмотрев этот вопрос несколько ближе, мы придем к понятию калибровочной инвариантности. Пусть φ и $\mathbf{A}$ выражаются, как обычно :

$$\mu \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi.$$

Прибавим к $\mathbf{A}$ градиент произвольного скаляра ψ , получим

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \psi,$$

а так как $\text{rot grad } \psi = 0$, то

$$\text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{H}.$$

Если ψ не зависит от времени, то и значение $\mathbf{E}$ не изменится при замене $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}'$. Если же $\psi = \psi(t)$, то значение $\mathbf{E}$ не изменится, лишь если одновременно с заменой $\mathbf{A}$ на $\mathbf{A}'$ заменить φ на φ_1 так, чтобы

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

¹ Born M., On the Quantum Theory of the Electromagnetic Field, Proc. Roy. Soc., t. 143, № 849, 1934, стр. 410.

В этом случае

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial A'}{\partial t} - \text{grad } \varphi_1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \varphi = \mathbf{E}.$$

Итак, величины $\mathbf{E}$ и $\mu \mathbf{H}$ остаются неизменными при одновременном прибавлении к векторному потенциалу градиента произвольного скаляра и вычитании из скалярного потенциала производной по времени того же скаляра (деленной на c), т. е. они калибровочно инвариантны.

М. Борн сделал попытку спасти динамическую теорию поля, видоизменив схему Максвелла—Лоренца так, чтобы устранить основную трудность, связанную с представлением о непротяженных электронах и состоящую в бесконечности электромагнитной энергии электрона. Борн отметил, что аналогом обычного выражения лагранжевой функции электромагнитного поля $\frac{1}{8}\pi(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$ в классической механике является $\frac{1}{2}m_0 v^2$. Аналогия состоит в квадратичности обоих приведенных выражений, которая находит свое основание в пропорциональности магнитного поля и скорости v .

Так как переход от классической механики к релятивистской совершается заменой $\frac{1}{2}m_0 v^2$ на выражение $(1 - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})$, исключающее возможность скоростей, больших скорости света, то аналогично переход от классической теории электромагнитного поля к теории, исключающей $E > E_0$ (т. е. некоторого критического значения), может быть осуществлен, если $\frac{1}{8}\pi E^2$ заменить выражением

$$\frac{1}{4\pi} E_0^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}\right),$$

которое при $E \ll E_0$ приводится к $E^2/8\pi$. Однако введенное выражение релятивистски неинвариантно. Заменой E^2 на величину $E^2 - H^2$, являющуюся релятивистским инвариантом, можно наиболее простым способом получить релятивистски инвариантную величину. Отсюда получим

$$L = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}\right). \quad (78)$$

Подставив это выражение в вариационный принцип в форме Шварцшильда, найдем по обычным правилам уравнения, которые заменяют классические уравнения Максвелла—Лоренца для вакуума (т. е. в отсутствии каких-либо электрических зарядов). Для того чтобы наглядно истолковать теорию Борна, надо рассматривать вакуум как фиктивную среду с диэлектрической постоянной

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}}}$$

и магнитной проницаемостью $\mu = 1/\varepsilon$.

В случае наличия в пространстве зарядов и токов, распределенных с конечной объемной плотностью j_μ , можно найти соответствующее обобщение уравнений Борна, если аналогично классической лагранжевой функции дополнить лагранжеву функцию (78) членом $A_\mu j_\mu$, т. е. взять

$$L = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2}} \right) + A_\mu j_\mu. \quad (79)$$

Так как речь идет о построении динамической теории поля; то из вариационного принципа должны вытекать как законы электромагнетизма, так и законы механики. Эти законы и, в первую очередь, законы сохранения энергии и количества движения нетрудно написать, используя обычный путь. Для плотности электрической энергии (при $H = 0$) найдем

$$\xi = + \frac{E_0^2}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}} - 1 \right), \quad (80)$$

т. е. зависимость, вполне аналогичную зависимости кинетической энергии электрона от его скорости

$$E_{\text{кин}} = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right),$$

причем E_0 играет роль скорости света. Хотя согласно выражению (80) плотность энергии становится бесконечной в центре электрона (где $E = E_0$), однако полная энергия $\int \xi^2 dV$ остается, как легко проверить, конечной в случае покоящегося точечного электрона.

Борну удалось далее вывести соотношение Эйнштейна между энергией и массой. Однако, несмотря на ряд интересных результатов, эта теория не получила дальнейшего развития. Причины этого следующие: во-первых, неясен физический смысл величины E_0 и весь круг представлений, связанных с ней, во-вторых, в теории Борна электромагнитное поле не обладало свойством аддитивности.

В итоге теория Борна осталась исторически интересным примером попытки построить последовательную электромагнитную картину мира, преодолев трудность с расходимостью энергии, которая характерна и для современных полевых теорий.

В этой работе Борн показал, что «максвелловы уравнения в их обычной форме несовместимы с допущением квантовых законов; они должны быть заменены другой группой уравнений, которые являются частным видом общей теории поля Ми. Я изучил свойства этого поля классическими методами и нашел значительное число интересных результатов, главный из которых состоит в существовании электрона с конечным радиусом и конечной энергией, потенциал которого совпадает с кулоновым на больших расстояниях.

Этот электрон ведет себя во внешнем поле подобно классическому точечному заряду, в то время как поля остаются почти постоянными в области, малой по сравнению с размерами электрона¹. В рассмотренной работе М. Борн (так же как и Г. Ми) является прямым предшественником авторов современных нелинейных теорий материи.

5. Вариационные принципы в общей теории относительности и в единых теориях поля

В теории относительности «действие» является инвариантом. А. Эддингтон (1882—1944), отметив, что законы гравитации, механики и электромагнитного поля удалось свести к принципу Гамильтона, ставит вопрос о причинах той большой роли, которую играет в физике величина «действия». Основание для этой важной роли он усматривает в том, что, говоря «о непрерывной материи, находящейся в некоторой точке пространства и времени, мы должны употребить слово плотность. Плотность, умноженная на объем некоторой части пространства, дает нам массу, или, что то же самое, энергию. Но с нашей пространственно-временной точки зрения гораздо большее значение имеет плотность, умноженная на четырехмерный объем некоторой части пространства-времени; это и есть действие»².

Гравитационное поле является единственным бесспорным примером нелинейности уравнений поля, обязанной тому, что гравитационное поле порождается всеми видами вещества, в том числе самим гравитационным полем. Этот нелинейный характер уравнений гравитационного поля приводит к возможности вывести из них уравнения движения частиц, порождающих поле.

Уравнения поля и законы движения в гравитационном поле нелинейны³ относительно переменных поля $g_{\mu\nu}$. Однако линейная теория Ньютона с очень большой точностью описывает движение тел под действием гравитационных сил. Это означает, что гравитационные поля (т. е. отклонение истинной метрики от плоской), которые изучаются в небесной механике, очень слабы.

Поскольку элемент четырехмерного объема является псевдоскаляром, то в интеграле принципа Гамильтона

$$\int L dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

¹ Born M., On the Quantum Theory of Electromagnetic Fields, Proc. of the Roy. Soc., Ser. A., т. 143, 1934, стр. 411.

² Эддингтон, Пространство, время, тяготение, пер. Рабиновича, 1923, стр. 148.

³ Закон движения электрических зарядов в специальной теории относительности линеен относительно напряженностей поля, уравнения же движения частицы в гравитационном поле не являются линейными по отношению к $g_{\mu\nu}$ и их производным. Эта нелинейность характерна для уравнений, ковариантных относительно общих преобразований координат.

функция L должна быть или скаляром или псевдоскаляром. Такой выбор обусловлен требованием, чтобы плотность энергии была положительно определенной. При этом интеграл действия будет псевдоскаляром.

При рассмотрении четырехмерного пространства вместо того, чтобы лагранжиан был функцией $x_i, \dot{x}_i, t$, он должен быть функцией $x_\nu, \frac{dx_\nu}{d\tau}, \tau$. Ковариантная форма принципа Гамильтона должна, поэтому, иметь следующий вид:

$$\delta I = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L \left(x_\nu, \frac{dx_\nu}{d\tau}, \tau \right) d\tau = 0, \quad (81)$$

где I и ковариантный лагранжиан L — два инвариантных скаляра. Однако не для каждой математической задачи можно добиться такой ковариантной формы.

Вариационный принцип дает возможность не только вывести уравнения гравитационного поля, но и гарантирует совместность этих уравнений¹. В качестве подынтегрального выражения Эйнштейн выбирает скалярную плотность, построенную из $g^{\mu\nu}$ и из скобок Кристоффеля² $\{\mu^\nu\}$ и их первых производных, которые должны варьироваться независимо друг от друга.

Используя аналогию с классической механикой и теорией поля, можно построить релятивистскую теорию поля. Аналогия эта видна из следующего простого сопоставления.

Классические уравнения поля

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} G = \Delta G = 4\pi \kappa \rho,$$

где G — гравитационный потенциал, могут рассматриваться как уравнения Эйлера—Лагранжа вариационной задачи принципа Гамильтона

$$\delta \int_V (\operatorname{grad} G)^2 dV = 0, \quad (82)$$

где интеграл распространен по всему трехмерному объему V , вариация G произвольна внутри области интегрирования и исчезает на ее границах.

Развернем вариацию выражения (82):

$$\begin{aligned} \delta \int_V (\operatorname{grad} G)^2 dV &= 2 \int_V (\operatorname{grad} G \delta \operatorname{grad} G) dV = 2 \int_V (\operatorname{grad} G \operatorname{grad} \delta G) dV = \\ &= 2 \int_V \operatorname{div} (\operatorname{grad} G \delta G) dV - 2 \int_V \Delta G \delta G dV = \\ &= 2 \oint_S \delta G \operatorname{grad} G dS - 2 \int_V \Delta G \delta G dV. \end{aligned}$$

¹ Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, М., 1955, стр. 126 и след.

² Определение скобок Кристоффеля см. стр. 269.

Так как первый интеграл справа равен нулю ($\delta G = 0$ на границах), то

$$\delta \int_V (\text{grad } G)^2 dV = -2 \int_V \Delta G \delta G dV,$$

и, следовательно, интеграл (82) экстремален только тогда, когда G удовлетворяет уравнению

$$\Delta G = 0. \quad (83)$$

Релятивистские уравнения поля

$$G^{\mu\nu} = 0 \quad (84)$$

могут также рассматриваться как уравнения Эйлера—Лагранжа принципа Гамильтона, интеграл в котором берется по четырехмерному объему

$$\delta I = \int_V H \sqrt{-g} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \quad (85)$$

как это без труда доказывается¹.

В 1915 г. Лоренц опубликовал статью «On Hamilton's principle in Einstein's theory of gravitation»². Он исходит из обычного выражения принципа Гамильтона для материальной точки

$$\delta \int L dt + \int K_i \delta x_i dt = 0. \quad (86)$$

Предположим, что время t варьируется, тогда в варьированном движении во время $t + \delta t$ будем иметь $x_i + \delta x_i$, а на границах положим $\delta t = 0$, что аналогично с условием на границах $\delta x_i = 0$.

Во втором члене выражения (86) можно заменить δx_i на $\delta x_i - v_i \delta t$, так как координаты варьированного движения к моменту времени t будут $x_i + \delta x_i - v_i \delta t$, где v_i — скорости действительного движения. Для общности напомним x_a ($x_1, x_2, x_3, x_4 = t$) и введем соответственно четвертую компоненту скорости, для которой, очевидно, $\frac{dx_4}{dx_4} = 1$; тогда

$$\delta \int L dt + \int \sum K_a \delta x_a dt = 0. \quad (87)$$

Как показал Эйнштейн, из этого уравнения можно вывести движение материальной точки в гравитационном поле, если функцию Лагранжа взять в виде

$$L = -m \frac{d}{dt} ds = -m \frac{d}{dt} \sqrt{\sum g_{ab} dx_a dx_b}.$$

¹Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, ИЛ, М., 1947, гл. XII.

²Lorentz H., Proc. Acad. Amsterdam, 19, 751, 1915; см. также Lorentz H. A., Collected Papers, т. 5, 1937, стр. 229—245.

Для очень большого числа материальных точек, независимых друг от друга и движущихся в гравитационном поле, надо рассматривать компоненты их скоростей как непрерывные функции координат. Обозначим $dx dy dz dt$ через dV , а для L примем следующее выражение, в которое введем ρ — плотность частиц в элементе объема $dx dy dz$:

$$L = -\rho \frac{d}{dt} \sqrt{\sum g_{ab} dx_a dx_b}. \quad (88)$$

Пусть вариация движения системы материальных точек определяется бесконечно малой величиной δx_a , которая есть произвольная непрерывная функция координат внутри произвольно выбранной области четырехмерного многообразия V , на границах которого δx_a исчезают. Тогда, взяв интеграл по всему многообразию V , при неизменном g_{ab} получим

$$\delta \int L dV + \int \sum K_a \delta x_a dV = 0, \quad (89)$$

где δL есть изменение функции L в заданной точке V . Величина LdV и, следовательно, $\int LdV$ есть инвариант относительно преобразования координат. Отсюда легко выводятся уравнения движения и уравнения сохранения импульса и энергии.

Для того чтобы проиллюстрировать применение вариационных принципов механики в релятивистской теории, остановимся еще на нескольких примерах из общей теории относительности и из единых теорий поля.

Созданную А. Эйнштейном теорию тяготения¹ следовало, по мнению ряда ученых, связать с теорией электромагнитного поля.

Согласно теории относительности, развитой Эйнштейном в 1916 г., ньютонову теорию гравитационного поля необходимо обобщить, рассматривая всю проблему в четырехмерном мире и введя вместо одной компоненты ньютоновского потенциала десять компонентов потенциала, образующих симметричный тензор второго ранга. Фундаментальным для новой теории было установление неведомой ранее физике связи гравитации со структурой четырехмерного пространства-времени. Искривление пространства-времени (риманова геометрия) производится любым веществом и именно в этом их внутренняя неразрывная связь.

Блестящий успех объяснения гравитации геометрической структурой мира естественно привел к мысли о возможности подобной же геометризации электромагнитного поля путем обобщения или искажения римановой геометрии. Начиная с 1918 г., ученые предложили огромное число всевозможных обобщенных геометрий

¹ Огромное значение теории тяготения для физики видно хотя бы из того, что некогда проблема гравитации положила начало новой эры в физике — эры ньютоновой классической физики. Галилей изучал квазиоднородное поле на поверхности земли, Кеплер и Ньютон — действие тяжелой точки большой массы на другую точку, значительно меньшей массы.

единой теории поля. Все они оказались безрезультатными. Как правильно указывал Эддингтон, «установление единого принципа... является целью этого направления в науке»¹.

Однако это направление, стремящееся «сделать теорию поля замкнутой», страдает недостатком, который очевиден даже многим из ее творцов. Основанная на принципе действия, с помощью которого решается поставленная выше задача, эта теория не может не быть формальной. И Эддингтон, указав на то, что принцип действия кажется «замечательным» в силу указанной возможности, с горестью отмечает, что «это преимущество, однако, несколько затемняется сознанием того, что замкнутость может быть лишь формальной».

Вейль и Эддингтон провели большую работу по выяснению геометрических основ теории, опираясь на принцип действия. Вейль построил теорию действия, цель которой заключалась в выводе законов и соотношений поля из одного исходного инварианта. Однако, как отмечает Эддингтон, сам Вейль считает, «что его принцип действия, вероятно, не осуществляется в природе в этой форме»². Эйнштейн замечает по этому поводу, что «окончательный результат этого исследования, к сожалению, производит на меня впечатление, что произведенное Вейлем и Эддингтоном углубление геометрических основ не смогло привести к прогрессу физических знаний»³.

Однако и самим Эйнштейном была создана аналогичная теория, о которой мы находим очень меткий отзыв у Эддингтона, подкрепленный, кроме того, авторитетом самого Эйнштейна. Эддингтон пишет: «Теория Эйнштейна очень формальна, какими, впрочем, и должны быть все подобные теории действия, и я не смогу освободиться от подозрения, что ее математическое изящество достигнуто, пожалуй, приемами, которые не ведут по прямому пути действительного физического прогресса. Из недавней беседы с Эйнштейном я узнал, что и он склоняется к тому же мнению. Поскольку, однако, пути дальнейшего развития столь неясны, было бы неразумно совсем оставлять без внимания возможность продвижения вперед на каком-либо новом пути»⁴.

Мы видим из этих высказываний крупнейших ученых, работавших в области проблем теории относительности, что дело с единой теорией поля обстоит довольно плачевно. В самом деле, ведь такая теория должна не только объединить уже известные соотношения, — это осуществимо целым рядом способов. Единая теория поля должна бы привести к новым результатам и в смысле раскрытия внутренней связи гравитационного и электромагнитных полей, и в смысле нахождения путей к атомистическому строению вещества. И вот мы

¹ Эддингтон, Теория относительности, Гостехиздат, 1934, стр. 392.

² Там же.

³ Эйнштейн А., Теория Эддингтона и принцип Гамильтона, Приложение к книге Эддингтона — Теория относительности..., стр. 462.

⁴ Эддингтон, Теория относительности..., стр. 448.

видим, что путь, которым шли Эйнштейн, Вейль и целый ряд других ученых, привел в тупик. Оказалось, что при помощи принципа действия можно упорядочить, систематизировать материал теории, придать ему изящный математический вид, но нельзя получить существенно новых результатов. В чем же здесь дело? Может быть, принцип Гамильтона бесплоден как орудие исследования и установления новых законов природы?

Нет, принцип Гамильтона в соединении с экспериментальными данными может дать возможность исследовать структуру различных полей, вскрыть форму нового, еще неизвестного закона путем подбора новых инвариантных лагранжианов, введения новых вещественных или комплексных переменных поля, нелинейных или даже дополнительных членов второго и высших порядков. Но метод, при помощи которого, исходя из принципа Гамильтона, строились единые теории поля, не вводил никаких новых физических идей или соотношений (и прежде всего идеи квантованности).

Принцип Гамильтона позволял, однако, объединить теорию в виде последовательного и в какой-то степени логически замкнутого изложения, как бы аксиоматизировать физику. В этом направлении было сделано много попыток физиками и математиками. Наиболее интересную попытку аксиоматизировать физику сделал в 1915 г. знаменитый математик Д. Гильберт.

Гильберт подошел к физике как математик. Он хочет применить к физике аксиоматический метод математики. Он говорит: «Я хочу в нижеследующем — в смысле аксиоматического метода — из двух простых аксиом установить новую систему основных уравнений физики, которые обладают идеальной красотой и в которых, как я думаю, заключено одновременно решение задачи Эйнштейна и Мин¹.

Вопрос о происхождении этих аксиом, являющихся широким и в то же время весьма абстрактным обобщением многочисленных экспериментальных данных, не рассматривается Гильбертом.

Итак, при помощи аксиоматического метода должны быть, по мнению Д. Гильберта, получены основания физики. Так как вычисление величины действия материальных систем требует интегрирования по пространству, занимаемому телом, то для того, чтобы пространство не получило предпочтения перед временем, величина действия должна содержать также интеграл по времени, так как только вместе взятые пространство и время образуют «мир», к которому относится величина действия.

Возьмем для характеристики мировой точки (w_e) координаты пространства-времени. Тогда явления в ней характеризуются следующими величинами: 1) десятью, введенными Эйнштейном, гравитационными потенциалами $Q_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$) с симметричными

¹ Hilbert D., Die Grundlagen der Physik, Götting. Nachrichten., т. 1., 1915, стр. 395; «Сборник», стр. 589—598.

тензорными свойствами в отношении произвольного преобразования обобщенных координат пространства-времени $w_s (s = 1, 2, 3, 4)$; 2) четырьмя электродинамическими потенциалами Q_s со свойствами вектора.

Физические явления, могущие протекать в данной точке пространства-времени, не являются, по мысли Гильберта, произвольными. Напротив, при протекании этих явлений удовлетворяются следующие две аксиомы:

Аксиома I (аксиома мировой функции Ми). Закон физических явлений определяется через мировую скалярную функцию H , которая содержит следующие аргументы:

$$G_{\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu'} = \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial w_{e'}} , \quad G_{\mu\nu l k} = \frac{\partial^2 G_{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k} ,$$

$$Q_s, \quad Q_{sl} = \frac{\partial Q_s}{\partial w_l}, \quad (l, k = 1, 2, 3, 4) ,$$

и должна исчезать вариация интеграла

$$\int H \sqrt{g} dw \quad (g = |g_{\mu\nu}|, \quad dw = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4) \quad (90)$$

для каждого из четырнадцати потенциалов, где $g_{\mu\nu}$ — фундаментальный метрический тензор¹.

Аксиома II (аксиома всеобщей инвариантности). Мировая функция H есть инвариант по отношению к произвольному преобразованию мирового параметра w .

Из этой системы аксиом Гильберт при помощи одного вспомогательного математического предложения выводит ряд следствий, которые охватывают совокупность законов известных физических явлений. Не останавливаясь ни на подробностях этой работы, ни на целом ряде аналогичных работ других ученых, укажем лишь на следующую основную тенденцию мемуаров Гильберта: физика должна и может быть построена так, как строятся аксиоматизированные отделы математики. Но если и внутри математики этот аксиоматический метод ограничен в своем значении, то тем более он неприменим в физике.

В этой работе Гильберт впервые показал, что тензор энергии-импульса очень просто связан с функцией действия. Эта связь отчетливо проявляется в теории относительности, а именно, тензор энергии-импульса материи получается варьированием G -поля в интеграле действия. Связь между тензором энергии-импульса и функцией действия исключительно важна для применения принципа Гамильтона в общей теории относительности.

Кроме того, если заменить общую вариацию $g_{\mu\nu}$ вариацией, получающейся только варьированием координатной системы, то можно

¹ Определение метрического тензора, см. стр. 357.

прийти к выводу, что во всех тех случаях, когда законы поля могут быть выведены из вариационного принципа, а тензор энергии получается из интеграла действия путем варьирования G -поля, закон энергии-импульса ($\frac{\partial T^k}{\partial x^k} = 0$) является следствием этих законов поля.

Рассмотрев проблему связи гравитационного и электромагнитного полей, Гильберт приходит к выводу, неправильность которого в свете прошедших сорока лет развития физики очевидна. Однако мы приведем этот вывод целиком, так как точка зрения Гильберта характерна для целого периода развития теории поля. Гильберт говорит: «...при соответствующем толковании, немногие простые предположения, высказанные в аксиомах I и II, оказываются достаточными для построения теории: посредством ее не только в корне преобразуются наши представления о пространстве, времени и движении в направлении, указанном Эйнштейном, но и, как я убежден, при помощи составленных здесь уравнений будут разъяснены интимнейшие, до сих пор скрытые явления внутри атома и на их основе должно быть возможно вообще свести все физические постоянные к математическим постоянным. Таким путем мы приближаемся к возможности превратить физику в принципе в науку, подобную геометрии, составляющей несомненно прекраснейшую славу аксиоматического метода, который здесь, как мы видим, пользуется услугами мощных инструментов математического анализа, а именно, вариационного исчисления и теории инвариантов»¹.

Такая аксиоматизация физики, о какой мечтал Д. Гильберт, представляется нам неосуществимой, однако поиски внутренне единой физической картины мира являются в целом прогрессивными в развитии физики.

Стремление к построению единой физической картины мира, в которой все законы физических явлений рассматриваются как законы поля и выводятся из одного инвариантного принципа, нашло свое выражение в ряде работ 1917—1940 гг.

В опубликованной в 1916 г. работе «Принцип Гамильтона и общая теория относительности»² Эйнштейн (1879—1955) рассматривает форму, которую принимает эта теория при применении к ней вариационного принципа. Эйнштейн пишет: «В последнее время Г. А. Лоренцу и Гильберту удалось придать общей теории относительности особенно наглядную форму тем, что они вывели ее уравнения из одного-единственного вариационного принципа. То же самое будет сделано и в данной статье. При этом моя цель будет заключаться в том, чтобы сделать основные соотношения возможно

¹ Hilbert D., Die Grundlagen der Physik..., стр. 412.

² Эйнштейн А., Принцип Гамильтона и общая теория относительности, Сб. Принцип относительности, под ред. В. К. Фредерикса и Л. Д. Иваненко ОНТИ, гл. ред. общетех. литер., 1935, стр. 306—314.

ясными и настолько общими, насколько это допускает точка зрения общей теории относительности. В противоположность изложению, главным образом Гильберта, о свойствах материи сделано по возможности мало специальных допущений¹. Развивая мысль Эйнштейна, можно сказать, что применение принципа Гамильтона в общей теории относительности придает ей некоторую математическую завершенность, объединяет ее единым формальным выражением, но не вносит новых физических идей и не приводит к новым результатам. Для нас представляет интерес вывод Эйнштейном уравнений поля тяготения и материи из принципа Гамильтона, так как он вполне аналогичен такому же выводу уравнений классической механики и по существу есть лишь реализация рассмотренной нами связи вариации некоторого интеграла с уравнениями вариационной задачи.

Все законы поля теории относительности могут быть объединены в одном вариационном принципе, особенностью функции действия которого является возможность разделить ее на две части, из которых одна независима от материальных переменных, а другая — от производных g_{ik} .

Пусть гравитационное поле описано метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ (или соответственно $g^{\mu\nu}$), а материя (включая электромагнитное поле) — любым числом пространственно-временных функций $q_{(e)}$, инвариантный характер которых нам безразличен. Пусть далее $\bar{L}$ есть функция от

$$g^{\mu\nu}, \quad g_{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma}}, \quad g_{\sigma\tau}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_{\sigma} \partial x_{\tau}}, \quad q_{(e)}, \quad q_{(e)\alpha} = \frac{\partial q_{(e)}}{\partial x_{\alpha}}.$$

В таком случае вариационный принцип

$$\delta \int \bar{L} dt = 0 \quad (90)$$

дает столько дифференциальных уравнений, сколько имеется определенных функций $g_{\mu\nu}$, $q_{(e)}$, если только аналогично такому же методу в классической механике мы примем, что $g_{\mu\nu}$ и $q_{(e)}$ варьируются независимо друг от друга так, чтобы на границах интегрирования все $\delta q_{(e)}$, $\delta g^{\mu\nu}$ и $\frac{d\delta g^{\mu\nu}}{dx_{\sigma}}$ обращались в нуль.

Допустим далее, что функция $\bar{L}$ линейна по отношению ко всем $g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$, и притом коэффициенты при $g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$ зависят только от $g^{\mu\nu}$, что опять аналогично классической механике. В таком случае написанный нами вариационный принцип можно заменить вариационным принципом, более удобным для вывода уравнений гравитационного поля и материи.

Интегрируя по частям, получим

$$\int \bar{L} d\tau = \int \bar{L}^* dt + F, \quad (91)$$

¹ Эйнштейн А., Принцип Гамильтона... стр. 306—314.

где F есть интеграл, взятый по границе рассматриваемой области, а L^* зависит только от $g^{\mu\nu}$, $g_{\sigma}^{\mu\nu}$, $q_{(e)}$, $q_{(e)\alpha}$, но не зависит больше от $g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$. Из выражения (91) получаем для искомым вариаций

$$\delta \int \bar{L} d\tau = \delta \int \bar{L}^* d\tau \quad (92)$$

и поэтому заменяем (90) равенством

$$\delta \int \bar{L}^* d\tau = 0. \quad (93)$$

Выполнив вариации по $g^{\mu\nu}$ и $q_{(e)}$, получим в качестве уравнений поля тяготения и материи следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \bar{L}^*}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial \bar{L}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \quad (94a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \bar{L}^*}{\partial q_{(e)\alpha}} \right) - \frac{\partial \bar{L}^*}{\partial q_{(e)}} = 0, \quad (94b)$$

т. е. аналоги классических уравнений Лагранжа. Эйнштейн справедливо замечает, что «если не сделать никаких специальных допущений о том, каким образом $\bar{L}$ зависит от $g^{\mu\nu}$, $g_{\sigma}^{\mu\nu}$, $g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}$, $q_{(e)}$, $q_{(e)\alpha}$, то нельзя разделить компоненты энергии на две части, из которых одна относится только к полю, а другая — к материи»¹. Он принимает поэтому следующее выражение для функции $\bar{L}$:

$$\bar{L} = \bar{G}(g^{\mu\nu}, g_{\sigma}^{\mu\nu}, g_{\sigma\tau}^{\mu\nu}) + \bar{M}(g^{\mu\nu}, q_{(e)}, q_{(e)\alpha}),$$

что представляется достаточно естественным. При этом формулы (94) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \bar{G}^*}{\partial g_{\sigma}^{\mu\nu}} \right) - \frac{\partial \bar{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} = 0, \quad (95a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \bar{M}}{\partial q_{(e)\alpha}} \right) - \frac{\partial \bar{M}}{\partial q_{(e)}} = 0. \quad (95b)$$

Введя далее еще допущение, что

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

представляет собой инвариант, и установив, таким образом, характер преобразований $g_{\mu\nu}$, и приняв во внимание основное требование общей относительности, что

$$L = \frac{\bar{L}}{\sqrt{-g}}, \quad G = \frac{\bar{G}}{\sqrt{-g}}, \quad M = \frac{\bar{M}}{\sqrt{-g}} \quad (96)$$

будут инвариантами по отношению к любым преобразованиям пространственно-временных координат, Эйнштейн исследует свойства уравнений поля тяготения, вытекающие из теории инвариантов.

¹ Эйнштейн А., Принцип Гамильтона..., стр. 309.

В результате он получает закон сохранения импульса и энергии, причем уравнения этого закона получаются в общековариантной форме только из уравнения (94а) для поля тяготения в соединении с принципом общей ковариантности¹, без применения уравнений (94б).

Таким образом, получается схема, которая если и не дает новых результатов, то позволяет очень отчетливо выявить как все содержащиеся в изложении идеи, так и аналогию с классической нерелятивистской теорией.

Несколько другой вариант использования принципа Гамильтона при разработке попыток построения единой теории поля дает статья Г. Вейля (1917 г.). В этой работе Вейль пытается применить принцип Гамильтона к решению таких задач, «которыми можно заниматься при нашем теперешнем весьма неполном знании о материи»². По его мнению теорема энергии-импульса является вообще выражением того, что принцип Гамильтона применим для таких вариаций параметров состояния, которые создаются бесконечно малой деформацией четырехмерного мирового континуума при условии, что эти параметры как бы «захватываются» деформацией.

Так как мы не знаем вида гамильтоновой функции (мировой плотности действия) для материи и, более того, даже не знаем, с помощью каких параметров состояний следует характеризовать материю, то единственное, что можно сделать — это сформулировать принцип Гамильтона с такой степенью общности, которую нам позволяет современное знание материи (в смысле эйнштейнова тензора энергии-импульса).

Из этого принципа, который у Вейля по форме несколько отличается от предложенных ранее формулировок³, «должны вытекать как из общего источника следующие законы:

1. неоднородные уравнения тяготения, согласно которым тензор энергии-импульса определяет кривизну мира,

2. уравнения Максвелла-Лоренца,

3. закон пондеромоторных сил в электромагнитном поле и механические уравнения, которые определяют движение масс под действием этих сил и поля тяготения».

Теория, развиваемая Вейлем в рассматриваемой работе, является, как он сам отмечает, существенно феноменологической. В ней

¹ Гипотеза, что геометрия физического пространства лучше всего представляется формализмом, ковариантным относительно общих преобразований координат, и что ограничение менее общей группой преобразований не упростит формализма, называется принципом общей ковариантности.

² Weyl H., Zur Gravitationstheorie, Ann. d. Phys., 54, 1917, стр. 117.

³ У Вейля, кроме требования лоренц-инвариантности, на лагранжиан накладывается еще условие калибровочной инвариантности. Действие в теории Вейля остается основным четырехмерным инвариантом; ему в теории Вейля соответствует уже не кривизна четырехмерного мира, а более сложное выражение.

полю противопоставляется «субстанция», трехмерный движущийся континуум, который мы (математически) представляем себе разложенным на бесконечно малые элементы¹. Каждому элементу отвечает определенный материальный заряд (масса) и определенный электрический заряд.

Принцип Гамильтона в формулировке Вейля гласит: сумма действий поля и субстанции тяготения и электричества является в каждой мировой области экстремумом по отношению к любым исчезающим на границах вариациям электромагнитного поля и поля тяготения и по отношению к таким же пространственно-временным перемещениям движущихся материальных элементов.

Вейль принимает для плотности действия выражение

$$A\sqrt{-g} = (*G^2 - \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})\sqrt{-g}, \quad (97)$$

где α — постоянное отвлеченное число, а $*$ — означает калибровочную инвариантность.

Для этой плотности действия имеет место принцип стационарного действия — такова его основная гипотеза.

«Действие» Вейля формально, так как не имеет смысла вычитание $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ из $*G^2$. В целом ему не удалось получить какие-либо результаты, обогащающие физическую картину мира.

В поисках выхода из создавшегося положения Калуза² сделал попытку создания геометрии, в которой как гравитационный, так и электромагнитный потенциалы определяли бы структуру пространства. В то время как Вейль пошел по пути создания неримановой геометрии, Калуза решил увеличить число компонентов метрического тензора, изменив число измерений пространства. Он предположил, что кроме четырех измерений физического пространства, существует еще пятое измерение, не имеющее прямого физического смысла.

Несмотря на большие результаты, достигнутые в отношении математического обобщения, все эти попытки не дали физических результатов. Причина этого заключается, конечно, в том, что все они не принимали во внимание квантовый характер поведения многочисленных типов элементарных частиц (о которых еще не было известно во время построения этих теорий).

Таким образом, в теории относительности принцип Гамильтона может быть единым началом, из которого выводятся уравнения поля и материи, но для этого необходимо введение в него либо экспериментальных параметров и зависимостей, либо оправданных физическим

¹ Weyl H., *Zur Gravitationstheorie...*, стр. 118.

² Kaluza Th., *Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.*, 1921, стр. 966; см. также очень интересную работу, посвященную пятимерии, Румер Ю. Б., *Исследования по 5-оптике*, ГТТИ, М., 1956. Рассмотрение многочисленных и математически очень интересных работ по единой теории поля выходит за пределы темы настоящей книги.

материалом гипотез о поле и веществе. Конечно, нельзя было ожидать, что принцип Гамильтона окажется чем-то вроде уравнения, о котором когда-то мечтал Лаплас. Сведение математической схемы физики к одному хотя бы и чрезвычайно общему соотношению, каким является обобщенный инвариант принципа Гамильтона, не дает ничего принципиально нового ни в собственно физическом смысле, ни в отношении эвристическом. Оно зато очень важно методологически, так как позволяет утверждать (см. гл. IV), что здесь имеет место единый тип каузальных связей.

Новые результаты могут быть получены из принципа Гамильтона только в том случае, если вместо лагранжевой функции, приводящей к заранее известным уравнениям поля (или движения), ввести L нового или усложненного типа, руководясь какими-либо существенно новыми общезначимыми требованиями, например, квантованностью процессов, более общей инвариантностью и т. п. для псевдоскалярных, спинорных и т. п. линейных и нелинейных полей, и в то же время не слишком удаляясь от того вида, который имеет классический лагранжиан. В этом случае применение принципа Гамильтона имеет также и эвристическое значение, что хорошо видно в квантовой теории полей.

Таким образом, хотя при применении вариационных принципов механики в классической и релятивистской теориях поля не было получено новых существенных результатов, однако этот цикл исследований имел принципиальное значение.

Во-первых, был выяснен фундаментальный, инвариантный смысл вариационных принципов механики, который делает их, по существу говоря, одним из основных законов макроскопической физики и превращает само их наименование «вариационные принципы механики» скорее в дань исторической традиции, чем в выражение их подлинного содержания и значения.

Во-вторых, была разработана совокупность приемов, раскрывающих эвристическое значение этих принципов: поиски инвариантных относительно тех или иных групп преобразований лагранжианов различных видов и нахождение таким путем уравнений полей (или единого поля) и уравнений движения.

Эти результаты нашли в 30-х — 50-х годах XX в. широкое и углубленное применение в квантовой электродинамике и квантовой теории полей.

ГЛАВА VII

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ В ТЕОРИИ АТОМА БОРА И ФОРМИРОВАНИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

1. Роль действия и вариационных принципов механики в квантовой теории атома Бора

В 1900 г. действие появилось в физике в новой форме как особая и в высшей степени важная физическая величина в виде так называемого кванта действия¹. Планк рассматривал задачу излучения абсолютно черного тела, которая и была решена им на основе совершенно новой физической идеи. Для того чтобы получить закон распределения энергии в спектре черного излучения, который согласовался бы с опытом, Планк ввел гипотезу квантов энергии. По этой гипотезе энергия излучения с частотой ν может быть только целочисленным кратным некоторого элементарного кванта энергии

$$E = nh\nu, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

где постоянная h и есть квант действия, имеющий размерность $[ML^2T^{-1}]$. Из измерений определена величина $h = 6,53 \cdot 10^{-27}$ эрг. сек.

Эта гипотеза представляет собой прорыв в классической волновой картине. «Если, — говорит Зоммерфельд, — энергия волны распространяется непрерывно «растекаясь» в пространстве, как может она оказаться в одном месте, в котором она поглощается, как может она сгуститься в квант конечной величины?»².

Громадное значение квантовой гипотезы проявилось очень быстро. Началось бурное развитие квантовой физики. Применение квантовых соотношений в «элементарных» процессах взаимодействия света и вещества выдвинуло проблему изучения внутренней природы этих процессов. Разрыв с классической непрерывной картиной вызвал ряд попыток как-то связать квантовые формулы с классической механикой, связать так, как это хотелось многим физикам

¹ См. Полак Л. С., Квантовая физика от М. Планка до Н. Бора (1900—1913), Сборник «М. Планк», Изд. АН СССР, М., 1958, стр. 143—220.

² Зоммерфельд А., Строение атома и спектры, т. 1, Гостехиздат, 1956, стр. 39.

того времени. Это означало, что пытались показать, что кванты, по крайней мере, не противоречат классической картине. Из ряда таких попыток одна, принадлежавшая А. Зоммерфельду (1868—1951), любопытна во многих отношениях. Для нас она интересна именно потому, что он сам указывает на обусловленность своих идей фактом совпадения размерности величины, стоящей под интегралом в принципе Гамильтона, и размерности кванта действия Планка. Исходя из того, что квант действия имеет размерность [энергия $\times$ время], Зоммерфельд вводит следующее допущение: «Всеобщее свойство всех молекул, которое выявляется в излучении, состоит не в том, что появляются известные характерные количества энергии, а в том, что процесс обмена энергии во времени упорядочен всеобщим образом. Говоря попросту, большое количество энергии воспринимается или отдается материей за короткое время, малое количество энергии — за более долгое время; при этом произведение энергии на время или временной интеграл энергии (подлежащий более точному определению) определяется величиной h »¹.

Сходство наименований квант «действия» и интеграл «действия» служит для него исходным пунктом. «Мы достигнем, — говорит Зоммерфельд, — точного выражения для величины энергия — время, если мы будем исходить из чрезвычайно удачно выбранного Планком названия „квант действия“». Это приводит нас к встречающемуся в принципе Гамильтона интегралу по времени $\int (T - V) dt$, так называемому действию. Если рассматривать вместе с Гельмгольцем — Планком принцип действия как высший основной закон механики и физики, то надо установить соотношение между фундаментальной константой излучения и имеющим ту же самую размерность действия интегралом $\int L dt$. Мы приходим, таким образом, к следующей гипотезе об общем значении величины h .

При каждом чисто молекулярном процессе каждая молекула воспринимает или отдает определенное универсальное количество действия, именно количество

$$\int_0^{\tau} L dt = \frac{h}{2\pi},$$

где τ — длительность процесса действия². Множитель 2π введен из соображений, вытекающих из рассмотрения фотоэлектрического эффекта. Эта гипотеза может быть в известной степени обоснована при помощи теории относительности. В самом деле, рассмотрим в некоторой системе отсчета два соседних положения. Тогда их

¹ Sommerfeld A., Das Planck'sche Wirkungsquantum und seine allgemeine Bedeutung für die Molekularphysik, Phys. Ztschr. 24, 1911, Dezember, стр. 1062; «Сборник» стр. 778.

² Там же.

координаты выразятся так :

$$x, y, z, l = ict$$

и

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz, \quad l + dl \equiv ict + ict dt,$$

где c — скорость света и l — мнимый «путь света». Элемент мировой линии запишется так :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2 + dl^2},$$

причем это выражение, как известно, есть инвариант (см. гл. VI). Положим, как обычно, для сокращения

$$v^2 = \sum_i \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2$$

и

$$\beta = \frac{v}{c},$$

тогда элемент мировой линии можно записать следующим образом :

$$ds = ic dt \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Чтобы получить размерность $эрг \cdot сек$, умножаем это выражение на $-icm_0$, где m_0 — масса покоя, т. е. инвариантная величина для механического процесса. Получающееся в результате этого умножения выражение

$$-ic m_0 ds = c^2 m_0 dt \sqrt{1 - \beta^2} = L dt$$

есть инвариант по отношению к лоренцевым преобразованиям координат. Отождествление величины $c^2 m_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ с L находит свое оправдание в том, что в механике теории относительности уравнения движения получаются из этой величины L точно таким же способом, как в обычной механике уравнения Лагранжа из величины $L = T - V$. Отсюда ясно, что и интеграл

$$\int_0^1 L dt = -ic m_0 S_1^2$$

не зависит от системы отсчета, так как он пропорционален длине мировой линии между двумя мировыми точками 1 и 2, с соответствующими моментами времени 0 и τ . «Энергия, или также интеграл по времени от энергии, не имеет никакого иного абсолютного физического значения, кроме величины действия. Оно дает нам единственную возможность связать механику материальной точки с универсальной постоянной; вышенаписанная формула для нашей фундаментальной гипотезы есть аналитическое выражение этой возможности»¹.

¹ Sommerfeld A., Das Plancksche Wirkungsquantum..., стр. 1063.

Не останавливаясь на разборе конструкции Зоммерфельда, мы можем сделать некоторые выводы уже из приведенных соображений. Мы видим, что Зоммерфельд примыкает к Гельмгольцу и Планку, считавшим принцип действия высшим законом физики. Он вводит определенную физическую гипотезу о характере молекулярного процесса, которая математически выражается в том, что в отличие от классической физики, требовавшей для интеграла Гамильтона экстремума, Зоммерфельд определяет значение этого интеграла равным $h/2\pi$. В этом можно, очевидно, усматривать выражение различия между микрокосмосом и макрокосмосом. Но особенно важно то, что энергия не имеет «абсолютного» физического значения, что основным понятием является понятие действия. Именно, эта величина действия дает возможность связать классическую физику с физикой микрокосмоса. Действие есть основное понятие физики, ключ к законам физических явлений, — такова здесь точка зрения Зоммерфельда.

Факт совпадения размерностей кванта действия и подынтегральной величины в принципе Гамильтона приводил и позже неоднократно к мысли найти в этом факте выражение их внутренней связи. Эта связь могла выражаться как в применении аппарата аналитической механики к атомным проблемам, так и в раскрытии какого-то особенного фундаментального смысла величины действия в физической картине мира. Не только в начале XX в., когда смысл постоянной h был достаточно расплывчат и когда еще не было общей теории относительности, в которой действие оказалось инвариантом, но и в более позднее время, уже после разработки основоположений квантовой механики, целым рядом ученых ставился вопрос о возможной связи принципа действия и постоянной Планка с тем, чтобы в этой связи найти источник дальнейшего развития физики. Укажем хотя бы на Б. Рассела (род. в 1872), который отнюдь не является здесь особенно оригинальным. Ход его рассуждений вкратце таков. Как мы видели, действие есть интеграл по времени от энергии. Теория относительности показала, что энергия может быть отождествлена с массой, т. е. «действие» может быть представлено как произведение массы и времени. Гравитационная масса есть длина. А так как гравитационная и инертная массы равны, то можно рассматривать «действие» как длину, умноженную на время. Отсюда Б. Рассел делает следующий вывод: «Может быть, если бы мы взяли „действие“ как одно из основных понятий физики, мы оказались бы в состоянии построить физику, которая была бы насквозь атомистичной и, однако, содержала бы в себе все, доступное проверке»¹.

Возможность построения такой физики основана по Расселу на том, что в теории относительности четырехмерный интервал

¹ Russel B., The analysis of Matter, 1927, стр. 342.

«пространство-время» имеет инвариантное значение. Установив его связь с величиной «действия», мы нащупываем переход к механике атома, в которой основную роль играет постоянная Планка h . Согласно этим взглядам в таком направлении могла бы быть намечена связь между теорией поля (непрерывность) и теорией атома и электрона (прерывность).

Вопрос о возможности такого синтеза приводился тогда, в конечном счете, к вопросу о том, можно ли ввести в классическую механику дискретность энергии. Другими словами, является ли закон равномерного распределения энергии по степеням свободы необходимым результатом применения уравнений классической механики. Существенно ли для классической аналитической механики представление о непрерывности исследуемых процессов или в нее тем или иным, хотя бы формально математическим, приемом может быть введена прерывность—квантованность процессов. Так, рассматривая эти вопросы, основные для классической картины мира и дальнейшего развития физики, А. Пуанкаре указывает прежде всего, что закон равномерного распределения энергии по степеням свободы «... вытекает из самой формы, которую всегда придавали уравнениям динамики, а именно формы Гамильтона»¹. Однако перед такой концепцией равномерного распределения энергии по степеням свободы с течением времени возник ряд трудностей. Среди них прежде всего необходимо указать на законы излучения абсолютно черного тела (проблема, которая и привела непосредственно к квантовой гипотезе), а также на необъяснимое классически стремление теплоемкости к нулю при понижении температуры «как если бы эти молекулы, охлаждаясь, теряли степени свободы, как если бы некоторые из их суставов коченели»². Только квантовая гипотеза Планка, преодолев эти трудности, стала исходной идеей новой физики, произвела революционный переворот в ее развитии. Однако гипотеза Планка представлялась столь странной, что всеми способами старались от нее избавиться. Нернст предложил, например, в качестве выхода для сохранения непрерывности рассматривать массу как функцию скоростей и ускорения. Такие попытки понятны при ретроспективном рассмотрении проблемы. Ведь теория Планка, согласно которой «... физические явления перестают повиноваться законам, выражаемым дифференциальными уравнениями, есть без всякого сомнения самая большая и самая глубокая революция, которую натуральная философия претерпела со времен Ньютона»³. Исследуя применение гипотезы квантов к проблеме закона распределения

¹ Пуанкаре А., Последние мысли, пер. А. И. Стожарова, Научное книгоиздательство, П., 1923, гл. VI, Гипотеза квант, стр. 89.

² Там же, стр. 91.

³ Poincaré H., Sur la théorie des quanta, Journal de Physique théorique et appliquée, т. 2, Janvier, 1912, Paris, стр. 5.

энергии в черном излучении, Пуанкаре показал, что гипотеза квантов — единственная, которая приводит к закону Планка.

Но тогда возникают естественные сомнения в значимости механики Гамильтона—Якоби для нового круга проблем микрокосмоса так как, следуя Планку, «... мы имеем действительное равновесие и если оно не находится в согласии с законом равномерного распределения, то это потому, что уравнения Гамильтона неточны»¹. Можно было бы, конечно, допустить неточность классической термодинамики, которая используется при рассмотрении проблемы абсолютно черного тела, но, по мнению Пуанкаре, в ней нельзя допустить ни одной бреши, чтобы она вся не обрушилась.

Таким образом, необходимо исследовать связь канонических систем Гамильтона с характером распределения энергии и вероятностью. Вопрос этот тем более важен, что в теории атома Бора из всего непрерывного бесконечного множества траекторий, возможных в классической механике, выделяется конечное дискретное множество их с помощью квантования. Таким образом, условия квантования как бы налагаются извне на классическую механику, не нарушая ее целостности.

Однако на самом деле существует прямая антиномия между квантовым законом Планка и обычной механикой, что показал Пуанкаре в цитированной работе².

Канонические уравнения Гамильтона допускают единицу в качестве последнего множителя Якоби. Пуанкаре рассматривает этот последний множитель как плотность вероятности в фазовом пространстве (q_k, p_k) . Классическая динамика приводит к выводу, что в том случае, когда последний множитель есть единица, существует полная однородность для возможности локализовать изображающую точку состояния системы в фазовом пространстве. В этом причина того, что все теории, которые применяют классические уравнения динамики в форме Гамильтона—Якоби, с необходимостью приводят к закону равномерного распределения энергии между частотами.

Пуанкаре определяет систему изображающей точкой в фазовом пространстве (q_k, p_k) или, что то же самое, точкой в пространстве энергии-фазы (η_k, E_k) .

Пусть имеется система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k. \quad (2)$$

Пусть далее $Wd\tau$ — вероятность того, что изображающая точка состояния системы находится в элементарном объеме $d\tau$ простран-

¹ Пуанкаре А., Последние мысли, стр. 92.

² Poincaré H., Sur la théorie des quanta, стр. 1 и след.

ства (x_k). Вероятность присутствия этой точки во всем n -мерном объеме V будет

$$\underbrace{\int \dots \int}_n W d\tau.$$

Для этой вероятности возьмем отношение t/T , где T — большой промежуток времени, заключенный между начальным временем Θ и $\Theta + T$, а t — время, в течение которого между Θ и $\Theta + T$ изображающая точка находится в рассматриваемом объеме V фазового пространства. Эта вероятность имеет смысл, если она независима от Θ и T , если t очень велико.

Если это условие выполнено (и если W вообще может быть определена), то W должна удовлетворять уравнению в частных производных

$$\sum_k \frac{\partial(W X_k)}{\partial x_k} = 0, \quad (3)$$

и тогда W есть последний множитель системы (2). Для канонических уравнений получаем немедленно

$$W = 1. \quad (4)$$

Соотношение (4) выражает сразу существование решений, которые соответствуют классической механике в фазовом пространстве (q_k, p_k) , а также их непрерывность и однородность.

Пуанкаре ищет такой последний множитель, который в отличие от $W = 1$, приводящего к закону равномерного распределения Рэлея—Джинса, приводил бы к закону Планка. Для этого функция W должна быть существенно прерывной, содержащей множители $W(\eta_k)$, обращающиеся в нуль, если энергия E_k отличается от энергии, кратной кванту энергии E . Эти разрывности неизбежны, если хотят, чтобы полное излучение было конечным.

Как указывает сам Пуанкаре, «... все уравнения механики выражаются в форме Гамильтона и, следовательно, они предполагают единицу последним множителем в смысле Якоби. Приходится предположить, что законы столкновения свободного электрона с резонатором не заключаются в этой форме и что последний множитель уже не единица, а какой-то другой. Очевидно, необходимо, чтобы для этих законов существовал последний множитель, иначе второе начало термодинамики не будет верным, и мы встретим то же самое затруднение, что и выше; однако нет необходимости, чтобы этот множитель был равен единице. Именно этот последний множитель и измеряет вероятность данного состояния системы (лучше сказать, не вероятность, а то, что можно было бы назвать плотностью вероятности). В гипотезе квантов этот множитель не может быть непрерывной функцией...»¹.

¹ Пуанкаре А., Последние мысли, стр. 111—112.

В результате математического анализа проблемы Пуанкаре показал, что если закон излучения абсолютно черного тела должен в соответствии с экспериментом заключать в себе конечность величины полного излучения, то это приводит к функции W , имеющей прерывный характер, аналогичный тому, который вводится гипотезой квантов. В то же время для классической механики функция $W = 1$ и существенно непрерывна. В этом и состоит смысл антиномии между квантовым законом Планка и классической механикой.

Этот фундаментальный результат можно рассматривать как выражение того, что новая физика должна ввести новые, чуждые классической механике представления. Следовательно, использование уравнений и методов классической механики в физике квантованных процессов не может быть логически обосновано. Напротив, неизбежное за отсутствием другого разработанного аппарата применение методов классической механики, строго допустимых лишь в предельном случае $h \rightarrow 0$, как это отчетливо выражено в принципе соответствия Бора, не может не быть внутренне противоречивым. Тем не менее период внешнего сочетания классической механики и квантовых представлений в развитии физики микрокосмоса не только оказался исторически необходимым, но исключительно плодотворным для познания хотя бы в первом приближении закономерностей микрокосмоса.

Первый период развития квантовой физики завершился в 1913 г., когда Н. Бором (род. в 1885) был осуществлен синтез модели атома Резерфорда, квантовых представлений о характере микропроцессов и закономерностей атомных спектров.

С 1913 г. начинается необыкновенно плодотворная разработка так называемой теории Бора, которую можно рассматривать как подготовительный этап к созданию квантовой механики. В процессе развития этой теории были разработаны многочисленные методы расчета атомных задач.

Бор указывает: «За последние годы разработан метод определения стационарных состояний не только для простых периодических систем, но и для определенного класса непериодических, так называемых, условно-периодических систем, уравнения движения которых могут быть разрешены „разделением переменных“. Для систем такого типа, как известно, обобщенные координаты могут быть заданы так, что описание движения с помощью методов общей динамики сведется к рассмотрению некоторого числа обобщенных „компонентов движения“, каждая из которых соответствует изменению только одной координаты во время движения и в некотором отношении „независима“ от остальных»¹.

¹ Бор Н., Три статьи о спектрах и строении атомов, ГИЗ, М.—П., 1923, статья вторая «О сериальных спектрах элементов», стр. 48.

Модель атома Бора может быть распространена на более сложную механическую систему. В своей первой работе Бор установил, что во всех системах, состоящих из электрона и ядра, где ядро покоится и электрон описывает круговую орбиту (со скоростью, малой по сравнению с c), кинетическая энергия равна с точностью до знака



Н. БОР (род. в 1885)

половине потенциальной энергии¹. Отсюда для каждого электрона

$$\frac{2T}{\omega} = nh. \quad (5)$$

Расширение теории Бора на более общий случай (а не только на случай круговой орбиты) было выполнено Зоммерфельдом², который воспользовался как исходным пунктом одной идеей Планка³. Планк рассматривал одномерный линейный гармонический вибратор и хотел подсчитать вероятность системе быть в каком-либо кванто-

¹ Бор Н., Три статьи о спектрах и строении атомов, стр. 48.

² Sommerfeld A., Sitzungsber. d. K. Bay, Acad., 1915, 425; Ann. d. Phys., 51, 1916, 1.

³ Planck M., Die physikalische Struktur des Phasenraums, Ann. d. Phys., т. 50, Bd. 4, № 12, 1916, стр. 385—419.

вом состоянии. Как известно, теорема Лиувилля устанавливает, что в классической механике равные элементы фазового пространства (в данном случае двумерного pq -пространства) равновероятны. Планк рассмотрел вид зависимости p от q для квантованного гармонического осциллятора. Уравнение характеристической кривой будет $\frac{p^2}{2m} + 2\pi^2 m \nu^2 q^2 = E$, которое определяет эллипс с площадью E/ν . Так как допустимые состояния осциллятора имеют энергию $nh\nu$, то площадь n -го эллипса будет nh , так что площадь, заключенная между двумя последовательными эллипсами, будет h .

Соответственно этому Планк предположил, что общий закон, относящийся ко всем одномерным системам, будет таков: только некоторые состояния возможны, и площадь между двумя кривыми двух таких последовательных состояний в фазовом пространстве будет равна h . Отсюда вытекает, что фазовое пространство не является бесконечно делимым, но построено из элементов площади h , а так как эта площадь имеет размерность pq , то Планк назвал h — элементарным квантом действия.

Зоммерфельд в 1915 г. обратил внимание на то, что гипотеза Планка находится в связи с задачей круговых орбит Бора, так же как и с задачей простого гармонического осциллятора.

В этом случае график зависимости постоянного углового момента от положения, задаваемого переменным углом, есть горизонтальная прямая линия, а не замкнутая кривая. Зоммерфельд вводит искусственные границы посредством ординат, отстоящих друг от друга на расстояние 2π для того, чтобы возрастание на 2π угловой координаты приводило к возвращению к начальному положению. Когда угловой момент является кратным $h/2\pi$, площадь между двумя последовательными кривыми есть h . Переходя к общему случаю, Зоммерфельд пишет

$$\oint_n p dq - \oint_{n-1} p dq = h,$$

где индекс n указывает n -ю орбиту. Знак $\oint$ обозначает интеграл по замкнутому контуру, а написанный интеграл известен под названием фазового интеграла. Предположив, что

$$\oint_0 p dq = 0,$$

получаем

$$\oint p dq = nh, \quad (6)$$

где слева стоит интеграл действия.

Зоммерфельд рассматривает далее задачу атома водорода и показывает, что в отличие от теории Бора надо квантовать как угловой, так и радиальный моменты; он находит для них

$$\begin{aligned} \oint p_\theta d\theta &= n_1 h, \\ \oint p_r dr &= n_2 h, \end{aligned}$$

где n_1 — азимутальное, а n_2 — радиальное квантовые числа. Энергия эллиптической орбиты будет в таком случае

$$E = - \frac{2\pi^2 m e^4 Z^2}{h^2 (n_1 + n_2)^2}. \quad (7)$$

Заметим, что здесь энергия зависит только от суммы квантовых чисел, а не от каждого из них в отдельности.

В более поздней работе Зоммерфельд показал, что при решении задачи водородоподобного атома с точки зрения релятивистской механики энергия должна слабо зависеть от отдельных квантовых чисел, другими словами, что каждая линия в спектре водородоподобного атома расщепляется и имеет тонкую структуру. Этот результат, как известно, вполне согласуется с экспериментом, особенно для случая ионизированного атома гелия, где это расщепление больше и легче измеримо, чем у атома водорода. Объяснение Зоммерфельдом тонкой структуры спектральных линий было одним из триумфов квантовой теории.

Исторически приоритет в квантовании фазового интеграла принадлежит У. Уилсону (род. в 1875), который выдвинул ту же гипотезу на несколько месяцев раньше¹. Уилсон нашел условия квантования для консервативной системы с n степенями свободы. Пусть q_i — обобщенные координаты; тогда по Уилсону выражение для живой силы

$$2T = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k$$

можно привести к виду

$$2T = \sum A_k \dot{q}_k^2 = 2 \sum L_k.$$

Для каждой степени свободы

$$2L_k = p_k \dot{q}_k,$$

и Уилсон рассматривает для каждой из них интеграл

$$2 \int L_k dt = \int p_k dq_k,$$

взятый по периоду $1/\omega_k$, так как предполагается, что в любом стационарном состоянии, для которого применима классическая динамика, рассматриваемая система допускает этот период для каждой обобщенной координаты. Уилсон далее считает, что этот интеграл равен целому кратному от постоянной Планка, и пишет квантовое условие в виде

$$2 \oint T_k dt = n_k h \quad (n_k - \text{целое; } k = 1, 2, \dots, n),$$

т. е.

$$\oint p_k dq = n_k h.$$

¹ Wilson W., The quantum theory of radiation and line spectra, Phil. Mag., 29, 1915, 795.

Как теория Зоммерфельда, так и теория Уилсона страдали тем существенным недостатком, что в них не удавалось указать каких-либо правил для выбора координат, к которым должны быть приложены квантовые условия. Для специального случая кеплерова эллипса выбор r и θ представляется очевидным, но в более сложных случаях он уже не удается.

Первое указание на то, как приблизиться к решению этой проблемы, было дано П. Эпштейном (род. в 1883) в работе об эффекте Штарка¹. Эпштейн заимствовал из астрономии метод, который многократно прилагался для решения уравнения Гамильтона—Якоби и который известен как метод «разделения переменных» (см. гл. 3, разд. 7). Метод этот лучше всего иллюстрировать на конкретном примере. Подсчитаем в качестве примера уровни энергии водородоподобного атома согласно теории относительности. Энергия выражается формулой

$$\frac{1}{c^2} \left[E + mc^2 + \frac{Ze^2}{r} \right]^2 = m^2 c^2 + p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2.$$

Уравнение Гамильтона—Якоби будет поэтому иметь вид

$$m^2 c^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \left[E + mc^2 + \frac{Ze^2}{r} \right]^2.$$

Положим

$$S = S_1(\theta) + S_2(r), \quad (8)$$

где S_1 и S_2 удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\frac{dS_1}{d\theta} = \alpha_1, \quad m^2 c^2 + \left(\frac{\partial S_2}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{r^2} = \frac{1}{c^2} \left[E + mc^2 + \frac{Ze^2}{r} \right]^2,$$

где α_1 — произвольная постоянная.

Из этих выражений получаем непосредственно

$$S_1 = \alpha_1 \theta + c_1 \quad (8a)$$

и

$$S_2 = \int \left\{ \sqrt{-\frac{1}{r^2} \left(\alpha_1^2 - \frac{Z^2 e^4}{c^2} \right) + \frac{2Ze^2}{rc^2} (E + mc^2) + \left(\frac{E^2}{c^2} + 2Em \right)} \right\} dr. \quad (8b)$$

Теперь можно ввести квантовые условия, воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r.$$

Имеем

$$\oint p_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{dS_1}{d\theta} d\theta = n_1 h, \quad (9)$$

$$\oint p_r dr = \oint \frac{dS_2}{dr} dr = n_2 h. \quad (9a)$$

¹ Epstein P. S., Ann. d. Phys., 51, 1916, стр. 168.

Из (8а) и (9) получим

$$\alpha_1 = \frac{n_1 h}{2\pi}. \quad (10)$$

При рассмотрении фазового интеграла (9а) надо учесть, что радиус r при движении по орбите изменяется между двумя крайними пределами r_0 и r_1 , и мы должны интегрировать в границах $r_0 \rightarrow r_1 \rightarrow r_0$. Когда r имеет одно из граничных значений, p_r и, следовательно, подынтегральное выражение в (9а) обращается в нуль. Таким образом, r_0 и r_1 суть корни подынтегрального выражения, которое должно быть действительным между этими двумя значениями. Знак корня надо выбрать так, чтобы $p_r dq_r$ было положительно. Рассматривая таким образом фазовый интеграл, найдем с помощью контурного интегрирования его значение

$$2\pi \left\{ -\sqrt{\alpha_1^2 - \frac{Z^2 c^4}{c^2}} + \frac{Ze^2(E + mc^2)}{c^2 \sqrt{-\frac{E^2}{c^2} - 2Em}} \right\}. \quad (11)$$

Если мы положим выражение (11) равным $n_2 h$ и подставим $\alpha_1 = \frac{n_1 h}{2\pi}$, мы получим

$$E = mc^2 \left[\left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{(n_1 + \sqrt{n_1^2 - \alpha^2 Z^2})^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} - 1 \right], \quad (12)$$

где α — безразмерная константа, равная $2\pi e^2/hc$ (постоянная тонкой структуры). Это и есть формула Зоммерфельда для тонкой структуры; при $c \rightarrow \infty$ выражение (12) стремится к нерелятивистскому уравнению (7). Таким образом, этот метод ведет прямо к определению энергетического уровня без промежуточных вычислений орбит.

Несколько иным способом, независимо от Эпштейна, подошел к рассматриваемой проблеме Шварцшильд (1873—1916). Прежде чем рассмотреть теорию Шварцшильда, необходимо, однако, ознакомиться кратко с теорией условно-периодического движения Штауда—Штеккеля.

Предположим, что мы имеем систему с n обобщенными координатами, и пусть функция S уравнения Гамильтона—Якоби может быть представлена так:

$$S = \sum_r S_r(q_r),$$

где S_r являются функциями q_r , $n-1$ постоянных α_s и константы E . Каждое S_r имеет вид

$$\int \sqrt{f_r(q_r, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} dq_r.$$

Каждая функция f_r имеет два вещественных корня q_{r0} и q_{r1} , между которыми она положительна. Если S может быть представ-

лено как сумма $S_r(q_r)$, то, воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \beta_r \quad \text{и} \quad \frac{\partial S}{\partial q_r} = p_r,$$

получим

$$\beta_s = \frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = \sum_r \int \frac{\Phi_s(q_r)}{\sqrt{f(q_r)}} dq_r,$$

$$\beta_0 + t = \frac{\partial S}{\partial E} = \sum_r \int \frac{\Phi_0(q_r)}{\sqrt{f(q_r)}} dq_r,$$

где $\frac{1}{2} \frac{\partial f_r}{\partial \alpha_s}$ обозначено через Φ_{rs} и $\frac{\partial f_r}{\partial E}$ — через Φ_{r0} . Величины β_r суть постоянные согласно теореме Якоби.

Определим ω_{rs} с помощью $\oint \frac{\Phi_s(q_r)}{\sqrt{f(q_r)}} dq_r$, причем фазовый интеграл берется обычным образом. Заметим, что если q_r испытывает одно полное колебание, то другие q останутся постоянными, β_s возрастет на ω_{rs} , а $\beta_0 + t$ — на ω_{r0} , и обратно. Определим теперь новые переменные W уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 + t &= \sum W_r \omega_{r0}, \\ \beta_s &= \sum W_r \omega_{rs}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Очевидно, что возрастание величины W_r на единицу, в то время как другие W остаются постоянными, будет иметь следствием возрастание ω_{r0} в $\beta_0 + t$ раз и возрастание ω_{rs} в β_s раз; q_r испытает полное колебание, а другие q останутся постоянными. Следовательно, q — периодические функции (с периодом единица) величины W , которая, как это ясно из уравнений (13), возрастает монотонно со временем t . Поэтому можно написать:

$$W_r = \omega_r t + \text{const}. \quad (14)$$

Координаты можно разложить в ряд Фурье:

$$q_r = \sum e^{i(\Sigma n_r W_r)},$$

где n_r — принимает целочисленные значения.

Следовательно,

$$q_r = \sum e^{i(\Sigma n_r \omega_r) t},$$

т. е. мы получаем так называемое «условно-периодическое движение».

Если одна или более координат q_r представляют собой угол, непрерывно возрастающий при движении, то производная $\frac{\partial S_r}{\partial q_r}$ будет постоянной, и фазовый интеграл можно быть взять в пределах от 0 до 2π . Координаты q_r и импульсы p_r суть функции от β , α и E , а следовательно, от W_r , α и E , причем во время движения α и E являются

постоянными. Шварцшильд¹ делает предположение, что α и E можно заменить постоянными величинами I_r , сопряженными с W_r . Канонические уравнения Гамильтона в этих координатах будут

$$\frac{dW_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_r}, \quad \frac{dI_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial W_r}. \quad (15)$$

Второе из этих уравнений вместе с постоянством I_r позволяет нам считать, что H есть функция только I_r , а первое утверждает, что W возрастает монотонно со временем; из (14) получаем для ω_r ,

$$\omega_r = \frac{\partial H}{\partial I_r}. \quad (16)$$

Так как q_r и p_r — функции с периодом единица относительно W , то эти последние переменные безразмерны, а так как произведение координат и сопряженных с ними импульсов имеет размерность действия, то I_r также имеют размерность действия. Поэтому Шварцшильд называет I_r переменными действия, а W_r — угловыми переменными.

Очевидно, что $\oint_0^1 I_r dW_r = I_r$. Квантование², как предполагает Шварцшильд, состоит в том, что I должны быть целыми кратными h .

Рассматривая с помощью таких квантовых условий Штарк-эффект, Шварцшильд получает результаты, эквивалентные результатам Эпштейна. Сам Эпштейн в явном виде показал³ эквивалентность своих квантовых условий условиям Шварцшильда⁴.

Для того чтобы показать это, обозначим предварительно фазовый интеграл Эпштейна через I_r . Так как $\omega_{rs} = \frac{\partial I_r}{\partial \alpha_s}$, где $\omega_{rs} =$
 $= \oint \frac{\Phi_{rs}(q_r)}{V_f(q_r)} dq_r$ как и выше, то

$$\beta_s = \frac{\partial S}{\partial \alpha_s} = \sum \frac{\partial S}{\partial I_r} \omega_{rs},$$

$$\beta_0 + t = \frac{\partial S}{\partial E} = \sum \frac{\partial S}{\partial I_r} \omega_{r0},$$

¹ Schwarzschild, Sitzungsberichte d. K. Preuss. Akad., 1916, стр. 548.

² По этому поводу Шредингер остроумно заметил, что применение квантовых правил, к проблеме многих тел, рассматриваемой как условно-периодическая система, хотя она таковой безусловно не является, с достаточной ясностью показывает, насколько нестрого использовали классическую механику, потому что в противном случае такое применение «было бы также невозможно, как, скажем, распространение уголовных законов на движение планет». (Э. Шредингер, Четыре лекции по волновой механике, ДНТБУ, Харьков, Киев, 1936, стр. 9).

³ Epstein P. S., Ann. d. Phys. 51, 1916, стр. 168.

⁴ Атомная механика теории Бора в основном изложена здесь по книге: Yourgrau W. and Mandelstam S., Variational principles in dynamics and quantum theory, London, 1956.

откуда, сравнивая с выражениями (13), получим

$$W_r = \frac{\partial S}{\partial I_r}. \quad (17)$$

Это уравнение и уравнение $p_r = \frac{\partial S}{\partial q_r}$ дают нам право рассматривать переменные W_r и I_r как канонически сопряженные, причем I_r есть функция только от α и E и не изменяется с течением времени.

Отсюда видно, что I являются переменными действия, и квантовые условия Шварцшильда и Эпштейна тождественны.

Во всех этих исследованиях применялся, по существу, один математический прием. Вместо функции $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ вводили с помощью преобразования Лежандра новую функцию $H(q_i, p_i, t)$. Преобразование Лежандра (как было показано в гл. II), вообще говоря, переводит какую-либо функцию $f(x, y)$ в некоторую функцию $g(x, z)$, где

$z = \frac{\partial f}{\partial y}$, производя это таким образом, что производная от g по новой переменной z равна старой переменной y . Такие преобразования играют в физике большую роль. Например, в термодинамике отношение энергии к свободной энергии аналогично отношению функций в преобразовании Лежандра.

Если функция Гамильтона H не содержит какой-либо координаты, например q_1 , т. е.

$$H = H(p_1, q_2, p_2, \dots, t),$$

(q_1 — циклическая координата), то из канонических уравнений следует

$$\dot{p}_1 = 0, \quad p_1 = \text{const},$$

т. е. мы нашли один интеграл движения.

Если H зависит только от p_i , то канонические уравнения тотчас же полностью интегрируются

$$p_i = 0, \quad p_i = a_i, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \omega_i, \quad q_i = \omega_i t + \beta_i,$$

где α и β — постоянные интегрирования, а ω_i — некоторые особые постоянные системы.

Во всех методах старой квантовой механики стремились ввести такие координаты, которые делают функцию Гамильтона зависимой только от канонически сопряженных импульсов, так как в этом случае механическая задача легко разрешима. В качестве примера рассмотрим ротатор — твердое тело, могущее вращаться вокруг пространственной оси. Пусть φ — угол вращения, A — момент инерции относительно оси, тогда

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\varphi}^2,$$

и соответствующий углу φ импульс есть $p = A \dot{\varphi}$.

Если силы отсутствуют ($U = 0$), то

$$H = T = \frac{1}{2} \frac{p^2}{A},$$

т. е. φ — циклическая координата, и поэтому $p = \text{const}$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{p}{A}, \quad \varphi = \omega t + \beta.$$

Таким образом, в данном случае движение без участия сил является равномерным вращением вокруг оси.

Своеобразное использование методов механики Гамильтона—Якоби для рассмотрения задач теории атома с последующим наложением на найденные решения квантовых условий, естественно, пытались тем или иным способом обосновать. Этой цели служили два кардинальных принципа старой квантовой теории: принцип соответствия Бора и адиабатическая гипотеза П. Эренфеста (1880—1933).

Общим результатом квантовой гипотезы Бора—Зоммерфельда является то, что квантовые частоты испускания стремятся к классическим частотам, когда орбиты делаются бесконечными. Из условия

$$q_r = \sum e^{i(\sum p_r \omega_r) t} \quad (18)$$

видно, что классический электрон испускает излучение, компоненты Фурье которого имеют частоты типа $\sum p_r \omega_r$. В квантовой же теории

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}.$$

Для больших квантовых чисел можно написать

$$\nu = \frac{1}{h} \sum \frac{\partial H}{\partial I_r} \delta I_r. \quad (19)$$

А так как фазовый интеграл есть целое кратное h , то

$$\nu = \sum n_r \frac{\partial H}{\partial I_r}, \quad (20)$$

что вместе с выражением (16) доказывает, что в пределе классические и квантовые частоты становятся одинаковыми.

В классической теории часто те или иные компоненты Фурье в излучении отсутствуют. В этих случаях мы должны предположить, что соответствующий квантовый переход запрещен. Отсюда возникают правила отбора, например, правило, что азимутальное квантовое число может изменяться только на ± 1 . Для того, чтобы оправдать это правило, заметим, что r колеблется с частотой ω_r , в то время как угловое движение есть равномерное вращение с частотой ω_ϕ , на которое наложено периодическое колебание с частотой ω_r .

Положив $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, выразим x и y в форме

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{A_n e^{-(n\omega_r + \omega\theta)} + B_n e^{i(n\omega_r - \omega\theta)}\}. \quad (21)$$

Отсюда легко показать, что азимутальное квантовое число должно изменяться на ± 1 , если квантовые частоты должны согласоваться с классическими при больших квантовых числах.

Что же касается гипотезы адиабатических инвариантов, то в наиболее отчетливом виде она была развита Эренфестом в 1916 г.¹ Гипотеза Эренфеста является попыткой теоретически обосновать квантовые условия Зоммерфельда.

Представим себе механическую систему, в которую входят квантуемые переменные. Если произвести в ней небольшое возмущение, то и в возмущенной системе должны иметь место законы новой механики, т. е. соответствующие величины должны иметь целочисленные значения. Поэтому они должны либо изменяться скачком в самом начале возмущения, либо должны остаться постоянными. Если возмущение системы происходит достаточно медленно, то должно иметь место последнее. В этом случае говорят, что величины эти адиабатически инвариантны (см. стр. 424). Отсюда следует обратный вывод, что только адиабатически инвариантные величины поддаются квантованию. Так, например, можно показать, что при медленном (адиабатическом) сокращении длины маятника остается постоянной величина

$$\frac{E}{\nu} = I = \text{const},$$

где E — энергия и ν — частота колебаний маятника. Поэтому согласно принципу Эренфеста эту величину можно принять за целое кратное h , т. е.

$$E = nh\nu, \quad (22)$$

в согласии с уровнями энергии гармонического вибратора Планка.

Исследуем теперь, каков геометрический смысл инварианта I . Для энергии маятника имеем

$$E = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} f q^2,$$

где $f = \frac{mg}{l}$, $p = m\dot{q}$, $q = l\varphi$ (φ — угол отклонения, а l — длина маятника). В плоскости (p, q) это уравнение выражает эллипс с полуосями

$$a = \sqrt{2mE}, \quad b = \sqrt{\frac{2E}{f}},$$

¹ Ehrenfest P., Adiabatische Invarianten und Quantentheorie, Ann. d. Phys. 51, 1916, стр. 327.

что ясно, если придать уравнению для E вид

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/f} = 1.$$

Так как площадь эллипса

$$\oint p \, dq = ab\pi,$$

то в нашем случае

$$\oint p \, dq = E \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m}{f}};$$

но

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f}{m}},$$

и поэтому

$$\oint p \, dq = \frac{E}{\nu} = I.$$

Таким образом, адиабатический инвариант есть не что иное, как площадь эллипса, и квантовое условие гласит, что площадь замкнутой кривой, описанной в течение одного периода движения в фазовой плоскости (p, q) , есть целое кратное h .

Позднее И. Бюргерс¹ (род. в 1895) и Ю. А. Кругов² показали, что фазовые интегралы суть адиабатические инварианты. Для доказательства этого воспользуемся преобразованием

$$S^* = S - \sum I_r W_r. \quad (23)$$

В соответствии с теорией канонических преобразований можем написать, если выразить S^* как функцию от q и W_r :

$$p_r = \frac{\partial S^*}{\partial q_r}, \quad I_r = -\frac{\partial S^*}{\partial W_r}. \quad (24)$$

Если W_r возрастает на единицу, то q_r испытывает полное колебание, так что S возрастает вместе с I_r , и S^* остается постоянной.

Эта функция S^* есть, таким образом, подобно p и q , периодическая функция периода единица относительно W_r . Пусть, далее,

$$H = H(q_r, p_r, c),$$

где c — параметр, который медленно изменяется со временем. S^* тоже будет заключать c , а зависимость W_r и I от p и q будет также изменяться со временем.

¹ Burgers J. M., Ann. d. Phys. 52, 1917, стр. 195.

² Kru'kow Ju. A., Proc. Amsterdam Acad., Bd., 21, 1918, стр. 1112.

Так как из теории гамильтоновых канонических уравнений и канонических преобразований известно, что

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial P_r} = \dot{Q}_r, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_r} = -\dot{P}_r,$$

где

$$Q_r = Q_r(q_n, P_n, t),$$

$$P_r = P_r(q_n, P_n, t),$$

$$\bar{H} = \bar{H}(Q_r, P_r),$$

то

$$\frac{dI_r}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial W_r}.$$

Так как

$$\bar{H} = H + \frac{\partial S^*}{\partial t},$$

то

$$\bar{H} = H + \frac{\partial S^*}{\partial c} \frac{dc}{dt}.$$

Отсюда

$$\frac{dI_r}{dt} = -\frac{\partial}{\partial W_r} \left(\frac{\partial S^*}{\partial c} \frac{dc}{dt} \right),$$

так как

$$\frac{\partial H}{\partial W_r} = 0,$$

а возрастание I_r за конечный интервал времени будет

$$-\int \frac{\partial}{\partial W_r} \left(\frac{\partial S^*}{\partial c} \frac{dc}{dt} \right) dt.$$

Теперь разложим $\frac{\partial S^*}{\partial c}$ в ряд Фурье вида

$$\sum e^{iZn_r W_r}.$$

Выражение $\frac{\partial}{\partial W_r} \left(\frac{\partial S^*}{\partial c} \right)$, следовательно, будет также рядом Фурье без постоянного члена и будет изменяться со временем согласно закону:

$$\sum e^{i(Zn_r \omega_r)t}.$$

Предполагая, что таких ω_r , для которых выполнялось бы условие $\tilde{\omega}_r = \omega_{r \pm n}$, не существует, найдем, что интеграл $\int \frac{\partial}{\partial W_r} \left(\frac{\partial S^*}{\partial c} \right) dt$ ограничен.

Поскольку параметр c изменяется беспорядочно, интеграл

$$\left| \int \frac{\partial}{\partial W_r} \left(\frac{\partial S^*}{\partial c} \right) dt \right|$$

будет стремиться к нулю с $\frac{dc}{dt}$, даже если время, по которому интеграл берется, возрастает так, что c остается конечным.

Отсюда следует, что I_r остается постоянным, если система изменяется бесконечно медленно.

Для того чтобы фазовые интегралы не менялись в процессе преобразования и были бы целыми кратными h в конце процесса, необходимо, чтобы они были целыми кратными h в начале. Таким образом, в старой квантовой механике интеграл действия подчинен условию быть целым кратным кванта действия h . Для решения задачи мы имеем готовый аппарат теории Гамильтона—Якоби, которая основывается на решении динамических задач с помощью функции действия S , к которой затем применяются квантовые условия.

Правило квантования

$$\oint p dq = nh$$

может найти применение и в случае сложных систем со многими степенями свободы. Обобщение это основано на том, что во многих случаях могут быть введены координаты q_1, q_2 , сопряженные импульсы которых обладают тем свойством, что p_1 зависит только от q_1 , p_2 — только от q_2 и т. д. (как уже указывалось, такие системы называются разделяющимися). Вообще говоря, они многократно периодичны. В качестве примера возьмем движение в плоскости, при котором координаты x и y совершают колебания с частотами ν_1 и ν_2 . При $\nu_1 = \nu_2$ траектория, в зависимости от фаз, будет окружностью, эллипсом или прямой. Если ν_1 и ν_2 соизмеримы, то траектории — замкнутые кривые. Если же ν_1 и ν_2 несоизмеримы, то орбита не образует замкнутой кривой, а постепенно заполняет всю прямоугольную область изменения переменных. Однако после конечного числа оборотов траектория может почти замкнуться так что мы получим периодическое движение, для которого

$$\oint p dq = nh.$$

В случае же, если кривая не замкнется, т. е. имеются несоизмеримые периоды, то будет столько же квантовых условий, сколько периодов

$$\oint p_i dq_i = n_i h.$$

Это — общий случай, называемый случаем отсутствия вырождения, тогда как случай совпадения или соизмеримости периодов называется вырождением. Если N — число периодов, ν — число

степеней свободы, то

$$g = \nu - N$$

называется степенью вырождения.

Заметим, что в классической теории всегда рассматривается выражение

$$\int \sum_r p_r dq_r,$$

в то время как в квантовой теории

$$\int p_r dq_r.$$

Это связано с тем, что в квантовой теории функция действия S расщепляется, по существу, на отдельные $S_r(q_r)$, в то время как в теории Гамильтона—Якоби разделение переменных есть лишь способ решения уравнения.

Так как разделение это не может быть осуществлено в общем виде, в частности, уже для такой, казалось бы, простой задачи, как задача трех тел, то нельзя приложить условия Зоммерфельда к решению задачи об определении уровней энергии многоэлектронного атома. Основной дефект теории Бора—Зоммерфельда заключается в том, что эта теория определяет все множество классических орбит и на последней стадии вычислений отбрасывает большинство из них.

Но и в решении конкретных задач методы классической квантовой теории привели к расхождению с опытом. Из этих задач особенно важной оказалась задача построения теории атома гелия, следующего за водородом в периодическом законе элементов Менделеева. Она была детально исследована Х. Крамерсом (1894—1956).

Из условия равенства общего момента импульса $\hbar/2\pi$ следует, что круговые орбиты двух электронов гелия образуют угол в 120° . Кажущийся произвол в выборе разности фаз вращения электронов на их орбитах Крамерс¹ устранил наложением условия, что средняя величина потенциала возмущающих сил должна быть минимумом в данной системе. В первом приближении эта средняя величина потенциала соответствует той энергии, которую нужно добавить к энергии невозмущенной системы, чтобы получить полную энергию истинного стационарного состояния. Условие минимума средней величины потенциала эквивалентно требованию устойчивости в отношении энергии. Это требование удовлетворяется, если оба электрона будут одновременно проходить через противоположные точки пересечения обеих круговых орбит, т. е. если разность фаз проекций движения электронов на неизменную плоскость равна 180° . Любая другая модель гелия неустойчива.

¹ K r a m e r s H., Zeitschrift f. Physik 13, 1923, стр. 312.

На основании наиболее точных измерений величина ионизационного потенциала гелия 24,6 в. Крамерс остроумно решает задачу и находит для упомянутой выше модели величину ионизационного потенциала 20,7 в. Разность экспериментальной и теоретической величин лежит за пределами ошибок измерения.

Далее, Крамерс решает также задачу о динамической устойчивости модели Бора. Для этой цели исследуется движение электронов, несколько отклоняющееся от действительного движения в отношении мгновенного положения и скорости. В случае динамической устойчивости отклоненная система должна совершать колебания около действительных значений, в случае же неустойчивости отклоненная система должна все дальше отходить от действительных значений. Модель Бора в этом смысле оказалась динамически неустойчивой.

Неудача с моделью гелия лишает теорию Бора мощного орудия исследования — методов классической механики, и вся теория обращается в почти интуитивное угадывание истинных отношений.

По существу говоря, на этом этапе развития квантовой теории атома использовалась аналитическая механика Гамильтона—Якоби в фазовом пространстве. Вариационные принципы и оптико-механическая аналогия не применялись, так как проблема корпускулярно-волнового синтеза была еще на стадии корпускулярно-волнового дуализма.

2. Оптико-механическая аналогия де Бройля и возникновение волновой механики

Параллельно и в связи с развитием квантовой теории Бора идет развитие корпускулярно-волнового дуализма в понимании природы света и явлений взаимодействия света с веществом. Фотоэлектрический эффект, эффект Комптона допускают корпускулярную интерпретацию, совокупность интерференционных и дифракционных явлений — волновую. Поэтому вновь возрождается, но, естественно, в новом варианте параллельное сосуществование двух точек зрения на природу света, которое было характерно для первой трети XIX века. Но если тогда каждая из этих теорий стремилась объяснить и объединить одну и ту же совокупность явлений, то теперь дело обстоит иначе: и волновой и корпускулярный аспекты имеют свои области применения, не перекрывая друг друга и связываясь в какой-то степени только через соотношение Планка $\epsilon = h\nu$. Именно этот своеобразный, не исключаящий, а дополняющий характер параллельного существования двух концепций света приводил к мысли о возможности такого же соотношения применительно к частицам и процессам микрокосма, объяснение которых оказалось невозможным с чисто корпускулярной точки зрения. Универсализация корпускулярно-волнового дуализма, переход к синтезу вол-

новых и корпускулярных представлений, обобщение его не только на свет, но и на вещество — явились исторически и логически следующим за теорией Бора шагом в развитии физики процессов микрокосмоса.

Для того чтобы увязать корпускулярную и волновую картину, классическая физика имела, как мы указывали выше, разработанный мощный аппарат. Это была оптико-механическая аналогия, которая давно подсказывала возможность глубокой связи законов движения частицы и волнового фронта (или луча). Эта аналогия, выраставшая из физической аналогии Ньютона (световые корпускулы,двигающиеся по законам динамики), развилась как аналогия, основанная не на действительной природе явления, а на сходстве (и даже просто совпадении) математической формы выражения законов этих процессов.

Исторически первой попыткой в этом направлении явились работы 1924—1925 гг. Л. де Бройля (род. в 1892), которые стали исходным пунктом одного из замечательнейших и глубочайших переворотов в физике, поразительного не только по научным и техническим последствиям, но и по темпам осуществления. Де Бройль руководствовался «мыслью о глубоком тождестве принципа наименьшего действия и принципа Ферма» и пришел к допущению, что «динамически возможные траектории движущегося тела (для системы с заданной энергией. — Л. П.) совпадают с возможными лучами фазовой волны»¹. Этой идеей непосредственно определяется путь исследования. «С одной стороны, мы исследуем механический принцип наименьшего действия в его классических формах Гамильтона и Мопертюи и в релятивистской динамике, а с другой стороны, с очень общей точки зрения, — распространение волн и принцип Ферма. В этом случае нам придется представить себе некоторый синтез этих двух исследований, синтез может быть спорный, но теоретическое изящество его неоспоримо»².

Основная задача состоит в том, чтобы из волновой теории получить выражение для групповой скорости, которое будет представлять скорость луча в корпускулярной теории. Рассмотрим прежде всего, как это можно сделать, не используя результатов, полученных Гамильтоном в динамике.

Пусть имеются две среды M_1 и M_2 . В M_1 свет распространяется согласно волновой теории с волновой скоростью $u(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z, \chi)$. Лучи согласно принципу Ферма будут экстремальными величины $\int \frac{ds}{u}$. В среде M_2 свет распространяется согласно корпускулярной теории и корпускулярная скорость будет $v(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z, \chi)$. Лучи будут согласно

¹ De Broglie L., Recherches sur la théorie des quanta. Ann. de Phys., сер. 10, т. 3, январь—февраль, 1925, стр. 45; «Сборник», стр. 641—667.

² Там же.

принципу наименьшего действия экстремалиями величины $\int v ds$. Если существует соотношение

$$v = \frac{1}{uf(\chi)}, \quad (25)$$

то лучи в обеих средах тождественны, так как χ не варьируется. Задача состоит в том, чтобы исследовать, возможно ли найти $f(\chi)$ такое, чтобы групповая скорость для луча любой частоты χ в M_1 могла быть равна корпускулярной скорости для луча того же цвета в M_2 .

Возьмем плоский элемент

$$p \delta x' + q \delta y' + r \delta z' = 0 \quad (26)$$

на (x', y', z') , находящемся в M_1 , и предположим, что этот элемент заполнен источниками, испускающими свет всех частот от χ до $\chi + d\chi$ (с нулевой фазой при $t = 0$). Фаза в точке (x, y, z) во время t для света частоты χ , вышедшего из источника, находящегося на (x', y', z') , будет

$$2\pi\chi\{t - V(x, y, z, x', y', z', \chi)\},$$

где V — волновое время распространения для этой частоты. Таким образом, если на (x, y, z) во время t возмущение от всех источников и для всех частот будет в фазе, то необходимо и достаточно, чтобы мы имели

$$-\chi \left(\frac{\partial V}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial V}{\partial z'} \delta z' \right) + \delta\chi \left(t - V - \chi \frac{\partial V}{\partial \chi} \right) = 0 \quad (27)$$

для всех $\delta x', \delta y', \delta z'$ и для произвольных значений $\delta\chi$. Это условие дает

$$\frac{\partial V}{\partial x'} : \frac{\partial V}{\partial y'} : \frac{\partial V}{\partial z'} = p : q : r,$$

что означает, что (x, y, z) лежит на луче, исходящем из (x', y', z') . Кроме того, получаем

$$V + \chi \frac{\partial V}{\partial \chi} = t. \quad (28)$$

Таким образом, существует только одна точка с общей фазой во время t , т. е. пересечение луча с поверхностью (28), и эта точка движется вдоль луча с групповой скоростью ω , определяемой из

$$\omega(\sigma\alpha + \mu\beta + \nu\gamma) + \omega\chi \left(\alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \chi} + \beta \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \chi} + \gamma \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \chi} \right) = 1, \quad (29)$$

где σ, μ, ν — направляющие косинусы луча. Отсюда получим

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{u} + \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{u} \right) = \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\chi}{u} \right), \quad (30)$$

что представляет собой хорошо известную формулу для групповой скорости.

Групповая скорость в M_1 равна, таким образом, корпускулярной скорости в M_2 , определенной согласно уравнению (25), если $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{u} \right) = u f(x)$ или $\omega = v$. После интегрирования получим

$$u = \sqrt[2]{F(x) - \Phi(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)}, \quad (31)$$

где $F(x) \equiv \int x f(x) dx$ и Φ — произвольная функция. Отсюда согласно уравнению (25)

$$v = \frac{1}{F'(x)} \sqrt[2]{2[F(x) - \Phi(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)]}. \quad (32)$$

Итак: пусть дана среда M_2 , в которой корпускулярная скорость имеет форму (32), а F и Φ — произвольные функции; тогда существует такая среда M_1 , в которой лучи и групповая скорость для всех частот x тождественны с лучами и корпускулярной скоростью в M_2 и волновая скорость луча в M_1 для частоты x определена уравнением (31).

Для того, чтобы применить этот вывод к волновой механике атома, воспользуемся тем, что согласно принципу наименьшего действия траектория частицы, имеющей полную энергию E и потенциальную $\varphi(x, y, z)$ является экстремалью интеграла

$$\int \sqrt[2]{2(E - \varphi)} ds,$$

причем скорость ее равна $\sqrt[2]{2(E - \varphi)}$. Движение это полностью определено в среде M_2 и представляется лучом и корпускулярной скоростью

$$v = \sqrt[2]{2[g(x) - \varphi(x, y, z)]} \quad (33)$$

и энергией (для данной частоты) $g(x) = E$. Для того, чтобы это движение можно было полно представить лучами и групповой скоростью в среде M_1 , достаточно, чтобы выражение (33) имело вид (32), т. е.

$$\sqrt[2]{2[g(x) - \varphi(x, y, z)]} \equiv \sqrt[2]{2[F(x) - \Phi(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z)]} \cdot \frac{1}{F'(x)}. \quad (34)$$

Для того, чтобы удовлетворить этому тождеству, положим $F'(x)$ равным положительной постоянной $1/h$. Следовательно,

$$F(x) = \frac{x}{h} + A,$$

где A — постоянная. Тождество (34) требует, чтобы

$$g(x) - \varphi(x, y, z) \equiv h^2 \left\{ \frac{x}{h} + A - \Phi(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) \right\},$$

так что $E = g(\chi) = h\chi + h^2 A + C$,

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) = \frac{1}{h^2} [\varphi(x, y, z) - C],$$

где C — постоянная.

Тогда согласно уравнению (31) для волновой скорости луча (которая в изотропной среде равна ω — нормальной скорости распространения волны) получим

$$u = \frac{h\chi}{\sqrt{2(h\chi + h^2 A + C - \varphi)}}. \quad (35)$$

Если теперь положить $h^2 A + C$ равным E_0 , т. е. полной энергии нулевой частоты, то мы получим фундаментальные формулы для частоты, волновой скорости и групповой скорости в среде M_1

$$\left. \begin{aligned} h\chi &= E - E_0, \\ u &= \frac{h\chi}{\sqrt{2(h\chi + E_0 - \varphi)}} = \frac{E - E_0}{\sqrt{2(E - \varphi)}}, \\ \omega &= \sqrt{2(h\chi + E_0 - \varphi)} = \sqrt{2(E - \varphi)}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Аналогичные выводы этих соотношений разработали Эпштейн¹ и Герцфельд и Мурнаган².

Основные идеи теории де Бройля, хотя и в весьма недоработанной и путанной форме, встречаются уже в одной из первых его работ, посвященной теории волн материи и световых квантов, опубликованной в 1924 г. под названием «Попытка построения теории световых квантов»³. В интересующем нас аспекте он там говорит: «лучи фазовой волны совпадают с динамически возможными траекториями». В основной работе «Исследования по теории квантов»⁴ де Бройль пишет, что «по-видимому, настал момент попытаться объединить корпускулярные и волновые представления и несколько углубить понимание истинной сущности кванта». Вместе с тем, такое рассмотрение позволит углубить и понимание того физического объекта, который классическая физика называла корпускулой. Синтез корпускулярных и волновых представлений должен быть универсальным.

По де Бройлю каждая частица сопряжена с «внутренним периодическим явлением» с частотой $\nu_0 = \frac{1}{h} m_0 c^2$. Для неподвижного

¹ Epstein S. P., Proc. Nat. Ac. Sci. 13, 1927, стр. 94—96.

² Murnaghan F. D., Herzfeld K. F., Proc. Nat. Acad. Sci. 13, 1927, стр. 330—336.

³ De Broglie L., Phil. Mag. and Journ. of Sci. t. XLVII, № CCLXXVIII, 1924, стр. 446; «Сборник», стр. 631—640.

⁴ De Broglie L., Ann. de Phys., t. III, 10-я сер., 22, 1925, стр. 22—128.

наблюдателя частота будет $\nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Предположив, что волна частоты

$$\frac{E}{h} = \frac{1}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

связана с частицей, он показал, что эти два явления всегда будут в



Л. ДЕ БРОЙЛЬ (род. в 1892)

Даже, если предположить скорость волны равной c^2/v . Отсюда длина волны

$$\lambda = \frac{h}{\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} = \frac{h}{p}. \quad (37)$$

Для групповой скорости u этих волн получаем

$$u = \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d\frac{1}{h} \left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)}{d\frac{1}{h} \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)} = v. \quad (38)$$

Предположив, что уравнение Планка $\epsilon = h\nu$ и соотношения $\lambda = h/p$ выполняются и в потенциальном поле, де Бройль показывает, что пути частиц совпадают с лучами волн. Для доказательства этого запишем принцип Ферма в виде

$$\delta \int \frac{ds}{v\lambda} = 0, \quad (39)$$

или, так как v должна рассматриваться как постоянная при вариации (условие необходимое, если скорость волн зависит от частоты), то

$$\delta \int \frac{ds}{\lambda} = 0$$

или

$$\delta \int \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} ds = 0. \quad (40)$$

Принцип наименьшего действия в обычной форме

$$\delta \int p \, ds = 0$$

или

$$\delta \int \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \quad (40a)$$

определяет ту же траекторию, что и принцип Ферма.

Взяв квантовое условие Бора—Зоммерфельда

$$\oint p \, dq = nh$$

и подставив в него значение p , согласно гипотезе де Бройля получим

$$\oint \frac{dq}{\lambda} = n \quad (41)$$

Этим уравнением утверждается, что путь должен содержать целое число длин волн или что после полного оборота фаза волн не должна измениться¹.

Такое объяснение однако вызывает справедливые возражения, так как согласно этому объяснению введенные в рассмотрение волны не имеют объема и существуют только вдоль орбиты.

Рассмотрим ход рассуждений де Бройля. Он приложил вариационные принципы механики к движению электрона в атоме, рассматривая электрон как материальную точку массы m , несущую

¹ См. также Sy n g e J. L., Geometrical mechanics and de Broglie waves, Cambridge, 1954.

электрический заряд e . Электрическое поле определено вектор-потенциалом A и скалярным потенциалом φ . В системе координат $x_1, x_2, x_3, x_4 = ct$ вектор количества движения — энергии имеет следующие ковариантные компоненты:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= -m_0 \beta v_1 - e A_3 = -p_1, \\ I_2 &= -m_0 \beta v_2 - e A_1 = -p_2, \\ I_3 &= -m_0 \beta v_3 - e A_2 = -p_3, \\ I_4 &= m_0 \beta c + \frac{e}{c} \varphi = \frac{E}{c}, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где E — полная энергия, а c — скорость света.

Вариационный принцип будет иметь вид

$$\delta \int_I^{\text{II}} I_i dx_i = 0,$$

где $i = 1, 2, 3, 4$, а I и II — две точки непрерывного пространственно-временного многообразия (x_1, x_2, x_3, x_4) . Преобразуя, напишем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\frac{m_0 c^2}{\beta} + e A v - e \varphi \right\} dt = 0. \quad (43)$$

В четырехмерном мире де Бройль определяет четырехмерный волновой вектор

$$d\varphi = 2\pi O_i dx_i = 2\pi v \left(dt - \frac{dl}{v} \right),$$

или

$$O_1 = -\frac{v}{c} \cos(x_1, l), \quad O_2 = -\frac{v}{c} \cos(x_2, l),$$

$$O_3 = -\frac{v}{c} \cos(x_3, l), \quad O_4 = \frac{v}{c}.$$

Принцип наименьшего действия, определяющий четырехмерный луч, будет иметь вид

$$\delta \int_I^{\text{II}} O_i dx_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

а если

$$v = \text{const} \quad (\text{т. е. } O_4 = \text{const}),$$

то

$$\delta \int_I^{\text{II}} O_i dx_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (44)$$

Воспользовавшись значениями O_1, O_2, O_3 , придем к принципу Ферма,

отождествив его тем самым с принципом наименьшего действия (44) :

$$\delta \int \frac{v dl}{v} = 0.$$

Для E согласно квантовой теории имеем $E = h\nu$ или, воспользовавшись векторами I и O ,

$$I_4 = hO_4.$$

Де Бройль вводит гипотезу, что это соотношение может быть обобщено и на три другие компоненты этих четырехмерных векторов, и пишет

$$I = hO.$$

Тогда принципу Ферма соответствует принцип наименьшего действия

$$\delta \int I_i dx_i = \delta \int p_i dq_i = 0,$$

т. е. принцип Ферма, приложенный к фазовой волне, тождественен с принципом наименьшего действия, приложенным к движущейся точке: динамически возможные траектории точки тождественны с возможными лучами волны¹.

Для квантового условия Бора—Зоммерфельда найдем, заметив, что после каждого полного оборота по замкнутой кривой интеграл действия должен быть целым кратным 2π , и используя связь между векторами I и O ,

$$\int p_i dq_i = nh,$$

так как для фазовой волны, интегрируя вдоль замкнутой траектории, имеем

$$\int \frac{v dl}{v} = nh.$$

несколько более сложно доказательство того, что для каждого i

$$\oint p_i dq_i = n_i h.$$

Волна де Бройля может быть записана как

$$U = C \cos \frac{2\pi}{h} S. \quad (45)$$

¹ Развита здесь идея универсальности вариационных алгоритмов механики и физики и возможности с их помощью совершить переход от механики классической (макрокосм) к механике квантовой (микрокосм) имеет существенное значение для теоретической физики. В связи с такого рода алгоритмами представляет интерес доклад И. С. Аржаных «Аналитическое продолжение механики» на 1-м Всесоюзном съезде по механике в 1960 г. (см. также его работы в ДАН, докладах АН УзССР, УМН за 1958—1959 гг.). И. С. Аржаных получен ряд ценных результатов по распространению механики Гамильтона—Якоби, хотя идея построения «заквантовых механик различных рангов» представляется нам нуждающейся в дальнейшем обосновании.

Разделив гамильтоново действие S на постоянную Планка мы получаем число универсальных единиц действия $\hbar$, заключающихся в гамильтоновом действии, и выражение для волны (45) получает простой и естественный смысл.

Основное значение полученного результата состоит в том, что здесь реализована «идея глубокой связи между двумя главными принципами геометрической оптики и динамики»¹. Эта идея может и должна быть «драгоценным проводником для того, чтобы реализовать синтез волн и квантов».

Все дальнейшее исследование основывается на том, что принцип наименьшего действия в форме Лагранжа и принцип Ферма «весьма вероятно могут быть двумя аспектами одного и того же закона»², причем, как известно, «аналогия между старой механикой и геометрической оптикой подтверждалась тем фактом, что при приближениях геометрической оптики движение группы волн выражается уравнениями, сходство которых с уравнениями теории Якоби чрезвычайно велико»³. Конечно, как замечает сам де Бройль в основной работе, «идея, что за движением материальной точки всегда скрывается распространение волны, должна быть изучена и дополнена, но если удастся найти для нее совершенно удовлетворительную форму, то она представит собой синтез большой рациональной красоты»⁴.

Воспользовавшись оптико-механической аналогией и сформулировав ее на основе математического аппарата теории относительности, де Бройль получил уравнения, которые позволили развить основные гипотезы его теории. Наряду со столь характерной для физики XIX в. аналогией по форме явлений, мы находим у де Бройля элементы аналогии нового типа. Модельная аналогия является известного рода гипотезой, вытекающей из общей идеи связи волнового и корпускулярного аспектов движения. Оптико-механическая аналогия Гамильтона, которая основывалась на совпадении форм законов движения механической частицы и луча, как нормали к волновой поверхности, не отождествляла этих двух процессов. Она как бы намекала на возможную связь движения частицы с движением волны. На основе вновь возникшей в XX в. контрверзы волна — корпускула де Бройль в отождествлении принципов Ферма и Эйлера — Лагранжа находит выражение необходимой связи волны и корпускулы, «синтез» волновых и корпускулярных представлений. Ибо, «если в теории света в течение столетия слишком пренебрегали понятием „частицы“ для того, чтобы пользоваться исключительно понятием „волны“, не была ли допущена обратная ошибка в теории

¹ De Broglie L., Ann. de Phys., стр. 56.

² Там же, стр. 126.

³ Де Бройль Л., Введение в волновую механику, Гостехиздат Украины, 1935, стр. 67.

⁴ De Broglie L., Recherches sur la théorie des quanta. Ann. de Phys., сер. 10, т. 3, 1925, стр. 126.

материи? Были ли вправе физики пренебрегать понятием „волны” и думать только о понятии „частицы”? Эти вопросы задал себе несколько лет назад автор (де Бройль. — Л. П.), обдумывая аналогию между принципом наименьшего действия и принципом Ферма и ища смысла таинственных квантовых условий, введенных во внутриатомную динамику Планком, Бором, Уилсоном и Зоммерфельдом¹.

Статья де Бройля представляет собой блестящий пример роли физической интуиции. Логическая структура этой работы, представляющей развитие идей статьи «Попытка построения теории световых квантов», во многом неудовлетворительна: например, переход от равенства $O_4 = \frac{1}{h} I_4$ к равенству $O = \frac{1}{h} I$, получение нерелятивистских соотношений из релятивистских и т. п. Несмотря на это, де Бройль получил правильные результаты, открывшие новую эпоху в развитии физики.

Существенно отметить, что отсутствие достаточных экспериментальных данных и сколько-нибудь разработанных теоретических предпосылок и понятий, невозможность построить логически замкнутую схему атомной теории, исходя из принципов классической макроскопической физики, привели к специфической черте работы де Бройля: содержащийся в ней исторический обзор имеет своей задачей не столько осветить развитие и состояние вопроса, сколько в какой-то степени обосновать анализом историко-научных данных основные идеи работы де Бройля и их математическую формулировку (интересно отметить, что де Бройль по образованию — историк).

Так как такого рода историко-научный подход к физическим проблемам есть весьма интересный и своеобразный вариант столь широко применяемого в физике метода аналогий, то и, с этой точки зрения, в полном смысле слова неповторимая работа де Бройля представляет особый интерес.

Вот как изложил физическое содержание концепции де Бройля М. Планк: «В то время как классическая физика совершает пространственное разделение рассматриваемого образа на его мельчайшие части и таким путем сводит движение любого материального тела к движениям его отдельных, предполагаемых неизменяемыми, материальных точек, квантовая физика разлагает каждый процесс движения на отдельные периодические волны материи. Последние отвечают собственным колебаниям и собственным функциям данного образа и вследствие этого ведут к волновой механике. Поэтому по классической механике простейшее движение — движение отдельной материальной точки, по квантовой механике — движение простой периодической волны»².

¹ Де Бройль Л., Введение в волновую механику, стр. 8.

² Планк М., Картина мира современной физики, УФН, т. 9, вып. 4, 1929, стр. 421.

На основе теории де Бройля естественно возникла задача экспериментального обнаружения явлений дифракции и интерференции частиц вещества, в первую очередь электронов. Вскоре после опубликования работы де Бройля Эйнштейн высказал мысль о возможности обнаружить дифракцию электронов, движущихся достаточно медленно для того, чтобы длина их волны лежала в пределах, допускающих экспериментальное обнаружение дифракции¹. В 1927 г. Дэвиссон и Джермер обнаружили дифракцию электронов, направив узкий пучок электронов на монокристалл никеля. Несколько позже аналогичные опыты произвели Г. П. Томсон в США и С. П. Тартаковский в СССР. Все эти опыты подтвердили основное соотношение теории де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{mv}. \quad (46)$$

3. Оптико-механическая аналогия Шредингера и возникновение квантовой механики

Развивая идею синтеза волновых и корпускулярных представлений, синтеза классической механики и волновой оптики, принципа Ферма и принципа наименьшего действия, Э. Шредингер (род. в 1887) пришел в 1926 г. к волновой механике, в которой состояние системы частиц описывается волновой функцией.

В предисловии к изданию сборника своих статей, посвященных волновой механике, Шредингер, отмечая несомненный факт эволюции своих идей, так характеризует собственные работы: «Намечая на эти шесть статей, настоящее издание которых было вызвано исключительно лишь большим спросом, одна молодая особа сказала автору: „Не правда ли, ведь вы даже не думали, когда начинали, что из этого выйдет такая умная штука“. Это мнение, с которым я при надлежащем ограничении лестного эпитета вполне согласен, пусть напоминает о том, что объединенные здесь в одном томе работы возникали последовательно одна за другой»².

Действительно, эволюция физических идей Шредингера в этих работах очень значительна. Как он сам там же отмечает, в них «имеется постепенное развитие представлений».

Мы не предполагаем здесь рассмотреть полностью эволюцию идей Шредингера, а остановимся только на первом их этапе — этапе оптико-механической аналогии, когда Шредингер стремился истолковать функцию ψ как характеристику некоторого колебательного процесса, реально происходящего в атоме.

¹ Einstein A., Sitzungsber. Berl. Akad. d. Wiss., 9, 1925.

² Schrödinger E., Abhandlungen zur Wellenmechanik, 1928, Barth, Leipzig, 2 Auflage. Vorwort zur ersten Auflage.

Волново-корпускулярный дуализм как бы указывал, что направление дальнейшего исследования может быть найдено в «возможности усмотреть в принципе Гамильтона также результат игры волн, который собственно и лежит в основе движения материальных точек, точно так же, как мы уже давно привыкли видеть волны в явлениях света с их принципом Ферма»¹.



Э. ШРЕДИНГЕР (род. в 1887)

Эрвин Шредингер родился в 1887 г. в семье известного ботаника. По окончании Венского университета он начал там же свою экспериментальную и теоретическую работу в области физики. После профессуры в Бреславле, Штутгарте и Цюрихе Шредингер в 1919 г. избирается членом Берлинской Академии Наук и становится профессором Берлинского университета. После прихода к власти национал-социалистов в Германии Шредингер в знак протеста уехал в Оксфорд, хотя лично ему и не угрожал параграф о «неарийцах». В 1933 г. Шредингер делит с Гейзенбергом и Дираком нобелевскую премию по физике.

¹ Сб. Современная квантовая механика, ГТТИ, 1934, ст. Шредингера «Основная идея волновой механики», стр. 48.

Многочисленные работы Шредингера до 1920 г. носят пестрый и довольно случайный характер. Просматривая их, мы находим как теоретические, так и экспериментальные исследования. По проблематике эти работы посвящены магнетизму и космическому излучению, теории кристаллического состояния и теории относительности, свойствам диэлектриков и радиоактивности, оптике и т. п. Расцвет научной деятельности Шредингера падает на период 1920—1930 гг., в течение которых он создает две главнейшие группы работ, вписавших его имя в историю физики. Это — работы по метрике цвета и по волновой механике.

Разработать математическую теорию цвета Шредингеру удалось с помощью методов высшей геометрии, причем он не только завершает теорию измерения цветов одинаковой окраски — низшую метрику света, — но и развивает основные принципы сравнения цветов различной окраски — высшую метрику цвета.

Вторая группа работ Шредингера посвященная волновой механике, рассмотрена нами ниже.

Э. Шредингер учился физике в период, когда классическая физика еще господствовала, когда казалось, что обнаруженные экспериментально новые странные соотношения и законы удастся уложить в привычную схему, что можно преодолеть возникающие принципиальные трудности введением лишь некоторых исправлений и дополнений в старую систему понятий. Окончив университет в 1911 г., он вступил на научное поприще в то время, когда внимание всех физиков было приковано к проблемам атомной структуры и к законам, управляющим «элементарными» процессами.

В первом сообщении, опубликованном в «Annalen der Physik» 79, № 4, 1926, под названием «*Quantisierung als Eigenwertproblem*»¹ Шредингер вводит уравнение, получившее в науке наименование уравнения Шредингера. Исходит он при этом из обычной формы уравнения в частных производных Гамильтона—Якоби:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E. \quad (47)$$

Введем для S новую неизвестную функцию ψ , причем ψ представляет собой произведение переменных, зависящих только от x, y, z , т. е. положим

$$S = k \ln \psi, \quad (48)$$

где постоянная k должна иметь размерность действия. Тогда получим

$$H\left(q, \frac{k}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial q}\right) = E. \quad (49)$$

¹ «Сборник», стр. 668—678.

Это уравнение может быть преобразовано так, что квадратичная форма от ψ и ее первые производные равны нулю. Это можно сделать в случае исследования задачи одного электрона, даже если принять во внимание изменение массы. Отыскиваются такие действительные во всем пространстве конфигураций однозначные, конечные и дважды непрерывно дифференцируемые функции ψ , которые дают экстремум интегралу от некоторой квадратичной формы, распространенному на все пространство конфигураций. Это всегда возможно, так как уравнение Шредингера есть уравнение типа Штурма—Лиувилля. Для постоянной k берется значение $h/2\pi$, чтобы получить совпадение с опытом. Тогда, если выбрать декартовы прямоугольные координаты и обозначить через e заряд, а через m массу электрона, получим

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2m}{k^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi^2 = 0,$$

причем

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2},$$

и поставленная нами вариационная задача приводит к выражению

$$\delta I = \delta \int dx_1 dx_2 dx_3 \left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{2m}{k^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi^2 \right] = 0, \quad (50)$$

причем интеграл распространен на все пространство. Далее находим обычным способом

$$\frac{1}{2} \delta I = \int df \delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \int dx_1 dx_2 dx_3 \delta \psi \left[\Delta \psi + \frac{2m}{k^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi \right] = 0. \quad (51)$$

И должно быть, во-первых,

$$\Delta \psi + \frac{2m}{k^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0 \quad (52)$$

и, во-вторых

$$\int df \delta \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (53)$$

Таким образом, уже на второй странице своего первого сообщения Шредингер написал уравнение для стационарной задачи электрона, известное под его именем и вошедшее как основное в волновую механику атома. Для полного совпадения с обычным видом уравнения Шредингера, как оно фигурирует во всех курсах квантовой механики, достаточно положить $k^2 = \hbar^2$.

В конце этой работы Шредингер придал вариационному принципу более удовлетворительную форму

$$\left. \begin{aligned} \delta \int H d\tau &= 0, \\ H &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] + V \psi^2 \end{aligned} \right\} \quad (50a)$$

с условием нормировки

$$\int \psi^2 d\tau = 1^1. \quad (54)$$

Введя множитель Лагранжа $-W$, можем записать эти два выражения в виде одной формулы так:

$$\delta \int (H - W \psi^2) d\tau = 0, \quad (55)$$

что с точностью до несущественного множителя $\hbar/2m$ совпадает с (50). Преимущество формулы (55) в том, что в нее не входит собственное значение W , которое в этом случае определяется в процессе варьирования.

Величина $\int H d\tau$, варьруемая в выражении (55), совпадает с волномеханическим средним значением $\bar{H}$ оператора Гамильтона H . Таким образом, смысл выражения (55) состоит в том, что полная энергия, вычисленная с помощью функции ψ , принимает наименьшее значение, совместимое с условием нормировки.

Основное уравнение Шредингера в операторной форме имеет вид (в несколько измененных обозначениях)

$$H \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}, q \right) \psi = E \psi, \quad (56)$$

где ψ определяется из $\Psi = \psi(q)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$, H — линейный оператор (оператор Гамильтона), E — полная энергия. Это уравнение, как показал Шредингер², эквивалентно вариационной задаче

$$\delta \int \psi^* (H \psi) dq = \delta \int (H \psi^*) \psi dq = 0 \quad (57)$$

с дополнительным условием

$$\int \psi^* \psi dq = 1, \quad (58)$$

где ψ и ψ^* должны варьироваться независимо друг от друга. В случае необходимости выражение (57) может быть обычным способом

¹ Функция ψ (вообще говоря, комплексная), введенная Шредингером, которую называют как волновой функцией системы, так и амплитудой вероятности, так как квадрат ее модуля определяет распределение вероятностей значений координат, должна удовлетворять условию, что $\int |\psi|^2 d\tau = 1$, если интегрировать по всему конфигурационному пространству.

² Schrödinger E., Ann. d. Phys., т. 79, 1926, стр. 361.

преобразовано интегрированием по частям. Например, для функции Гамильтона в декартовых координатах

$$H = - \sum_k \frac{\hbar^2}{2 m_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{ie_k}{\hbar c} \Phi_k \right)^2 + V(q)$$

имеем

$$\delta \int \left[\left(\sum_k \frac{\hbar^2}{2 m_k} \frac{\partial \psi^*}{\partial q_k} + \frac{ie_k}{\hbar c} \Phi_k \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{ie_k}{\hbar c} \Phi_k \right) + V \psi^* \psi \right] dq = 0, \quad (59)$$

где Φ_k — компоненты вектор-потенциала, с дополнительным условием (58). Значение последнего интеграла для экстремальной функции в силу соотношения (56) точно равно собственному значению энергии.

Уравнение Шредингера для атомов, содержащих более одного электрона, не может быть непосредственно решено даже численным способом. Поэтому приближенные методы вычисления энергий и волновых функций стационарных состояний атомов и, в первую очередь, наиболее важный из них — метод самосогласованного поля — приобретают особое значение. Физическая идея последнего метода состоит в том, что каждый электрон в атоме движется в самосогласованном поле ядра и остальных электронов.

Рассмотрим простейший случай: атом гелия в орто-состоянии (спин = 1); тогда для этого случая волновая функция $\psi(r_1, r_2)$ атома в целом будет представлена антисимметризованным произведением волновых функций электронов $\psi_1(r_1)$, $\psi_2(r_2)$ в s -состояниях:

$$\psi = \psi_1(r_1) \psi_2(r_2) - \psi_1(r_2) \psi_2(r_1). \quad (60)$$

Для того, чтобы найти такую функцию вида (60), которая была бы наилучшим приближением к истинной волновой функции, исходят согласно методу, предложенному и разработанному В. А. Фоком в 1930 г., из вариационного принципа¹.

Уравнение Шредингера и для этого случая может быть получено из вариационного принципа

$$\delta \int \psi^* H \psi dV_1 dV_2 = 0, \quad (61)$$

где H — гамильтонов оператор, при дополнительном условии

$$\int |\psi|^2 dV_1 dV_2 = 0, \quad (62)$$

причем интегрирование производится по координатам обоих электронов в атоме гелия.

В методе самосогласованного поля в уравнение

$$\int \delta \psi^* (H - E) \psi dV_1 dV_2 = 0, \quad (63)$$

¹ См. Фок В. А., Работы по квантовой теории поля, Изд. ЛГУ, 1957.

которое получается варьированием выражения (61), подставляется не произвольно варьируемая функция ψ , а выражение (60) для этой функции, и варьирование производится по функциям ψ_1 и ψ_2 по отдельности, т. е. ставится задача отыскания экстремума интеграла по отношению к функциям ψ вида (60).

В результате будет найдено неточное собственное значение энергии и неточная волновая функция, но лучшая из всех представимых в таком виде функций¹.

Уже в своем первом сообщении Шредингер ставит вопрос о физическом смысле функции ψ . Он отмечает, что толчком к попыткам выяснить этот смысл послужила для него работа де Бройля (см. стр. 529 и след.).

Шредингер непосредственно примыкает к де Бройлю. Он говорит, что «довольно естественно связывать функцию ψ с *некоторым колебательным процессом* в атоме, в котором реальность электронных траекторий в последнее время неоднократно подвергалась сомнению»².

Работа Шредингера появилась уже после работы Гейзенберга, в которой был резко поставлен вопрос о неприменимости классического понятия траектории к внутриатомному электрону. Шредингер считает все же возможным интерпретировать атомные явления при помощи классических понятий. Конечно, от некоторых из них придется отказаться, другие же несколько видоизменить, но при этом можно не вносить в классическую теорию принципиально новых моментов. Эта точка зрения последовательно проводится Шредингером в его первых работах. Но он имеет за плечами всю историю атома Бора. Это заставляет его быть чрезвычайно осторожным. Поэтому Шредингер воздержался от такого построения изложения, в котором приведенное выше положение было бы исходным пунктом. Он предпочел «нейтральную математическую форму», которая, по его мнению, яснее показывает основные черты теории, хотя способ изложения, основанный на применении функции ψ к колебаниям, более нагляден. Шредингер не хочет развивать подробно это построение прежде, чем не проведет вычисления более сложных случаев. В параграфе третьем своей первой работы он дает только краткую характеристику этой возможной трактовки. Если сравнить его трактовку с изложением де Бройля, который исходил из распределения в пространстве фазовых волн и которому удалось показать, что на каждый период или квазипериод электрона их всегда приходится целое число, то легко установить основное различие между ними; оно состоит в том, что де Бройль рассматривает

¹ См. например Л. Ландау, и Е. Лившиц, Квантовая механика, ч. I, ГТТИ, М.—Л., 1948, стр. 271 и след.

² Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem (erste Mitteilung), Ann. d. Phys., т. 79, 4, 1926, стр. 372.

волны в поступательном движении, в то время как Шредингер берет за основу понятие колебания и приходит к стоячим собственным колебаниям. Как ни важно это различие в смысле конкретной физической интерпретации, все же здесь налицо единая тенденция, общая для всего волнового аспекта новой теории атома.

Для дальнейшего развития этой точки зрения Шредингер предполагает, что энергия E связана с частотой ν соотношением

$$\nu = C' \sqrt{C + E} = C' \sqrt{C} + \frac{C'}{2\sqrt{C}} E + \dots, \quad (64)$$

где C — очень большая постоянная. Чем диктуется такой выбор соотношения частоты и энергии? Дело в том, что из теории колебаний хорошо известно, что $E \sim \nu^2$ (при заданной амплитуде); эта теория имеет очень общий характер и применима ко всякому колебательному процессу независимо от его специфики. Однако, если взять для атома $E \sim \nu^2$, то не будет не только совпадения с опытом, но также и связи между теорией, развиваемой Шредингером, и старой квантовой теорией, согласно которой $E \sim \nu$. Поэтому «чутье подскажет каждому теоретику квантов», что E должно быть пропорционально частоте ν . Введенное соотношение и дает возможность удовлетворить этому требованию и, кроме того, позволяет сделать еще один шаг вперед. Мы получаем возможность объяснить или во всяком случае улучшить понимание постулата частот Бора. Так как по второму постулату Бора частоты излучения пропорциональны разностям энергий E , то согласно (64) они пропорциональны также разностям собственных частот этих гипотетических колебательных процессов. Эти собственные частоты, конечно, очень велики в сравнении с частотами испускания. Если же их сравнить между собой, то они почти совпадают, в силу чего частоты испускания кажутся нам глубокими «разностными тонами» собственных колебаний, происходящих со значительно большей частотой. Излучаемая атомом световая волна и обладает этой частотой, обусловленной как бы некоторым перемещением энергии из одного нормального колебания в другое. «Нужно только представить себе, что световая волна причинно связана с колебаниями, необходимо наступающими при переходе в каждом месте пространства¹. Это, собственно, и есть основная исходная идея волновой механики в ее первоначальном варианте.

В этой фразе Шредингер подчеркивает строго детерминистический характер развиваемой им теории. Представление об универсальности причинной связи заставляет Шредингера наметить такую гипотезу о процессе излучения, которая давала бы возможность последовательно провести детерминистическое объяснение. Конечно, многое в наших представлениях должно существенно измениться

¹ Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem, стр. 372.

при переходе к познанию внутриатомных явлений, но для Шредингера представляется несомненным, что так же, как в макрокосмосе, каузальная связь господствует и в мире малых частиц вещества. Это — точка зрения естествоиспытателя, стоящего на стихийной материалистически-детерминистической позиции. Объяснить характер излучаемой атомом световой волны и специфику поведения электрона — это значит найти некоторый «механизм», который с необходимостью приведет ко всем известным опытным соотношениям. Поставить световую волну в причинную связь с некоторыми гипотетическими колебаниями в атоме — такова задача Шредингера.

В начале своей работы Шредингер в основном идет еще по пути, намеченному де Бройлем. Наглядная картина, возможно меньше удаляющаяся от классической физики, — вот к чему стремится Шредингер. «Не стоит даже упоминать, — пишет он, — насколько приятнее будет нам представление, что энергия при квантовом переходе переходит из одной формы колебаний в другую, чем представление о прыгающих электронах»¹. Теория Бора была чрезвычайно наглядна в том, что касалось стационарных состояний. Что может быть нагляднее картины быстро вращающихся вокруг ядра — солнца маленьких шариков электронов — планет? Зато процесс излучения и поглощения был лишен такой наглядности. Что означает скачок электрона с одной дозволенной орбиты на другую, что с ним происходит в то время, когда он отплыл от одного берега, но еще не пристал к другому, как представить течение этого процесса во времени — все эти вопросы не находили в теории Бора никакого ответа. Электронным скачкам было трудно подыскать какую-либо аналогию в классической физике. Зато, если заменить эти скачки картиной перехода энергии из одной формы колебаний в другую, то сразу можно воспользоваться всем разработанным мощным аппаратом учения о колебаниях и волнах. Немедленно же можно привлечь на помощь аналогии со струной, мембраной, использовать представления о резонансе, биениях и т. п. Квантовый переход, сохранив свой специфический характер, приобретает наглядность и тесно связывается с классической картиной излучения.

Но возможность сделать более наглядной картину процесса испускания и поглощения света атомом приводит также к замене имевшей место у Бора прерывности механизма излучения непрерывной картиной. «Изменение формы колебаний может происходить непрерывно во времени и пространстве, оно может длиться так долго, как длится процесс испускания»². Здесь, таким образом, как бы намечается возможность вернуться к непрерывной картине макроскопической физики, уничтожив грань, установленную между нею и физикой микрокосма теорией Бора.

¹ Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem, стр. 375.

² Там же.

Это представление о процессе излучения развивалось уже ранее Зоммерфельдом¹ (см. стр. 506 и след.). Шредингер снова выдвигает его на более высокой ступени развития познания. Дискретность излучения, которое состоит из отдельных квантов, сама по себе представляла факт достаточно новый и противоречащий классическим воззрениям. Но в теории Бора дискретность излучения связывалась с прерывностью внутриатомного процесса, производящего это излучение. Дискретность процесса означает, что состояние меняется не непрерывно, а скачками, *сразу* на некоторую конечную величину. Мы не случайно подчеркнули слово «сразу», ибо в теории Бора время процесса перехода из одного состояния в другое отсутствовало. Непрерывная картина, к которой хочет вернуться Шредингер, является попыткой классически интерпретировать атомные явления. Шредингер хочет построить каузальную наглядную, непрерывную картину атома. Принцип причинности и представление о связи (а может быть, и тождестве) макро- и микрокосмоса являются методологическими предпосылками его исследования. Эти предпосылки требуют органического сочетания, внутренней взаимосвязи классической механики и квантовых условий. Решение этой проблемы и есть содержание рассматриваемых работ Шредингера.

Шредингер указывает, что в старой квантовой теории создалось своеобразное положение. «С одной стороны, принцип Гамильтона оказался надежнейшим и лучшим проводником, без которого просто нельзя было бы обойтись; с другой стороны, для правильного описания опытных фактов необходимо было допустить вмешательство совершенно новых непонятных требований, так называемых квантовых условий и квантовых постулатов. Они звучали как грубый диссонанс в симфонии классической механики и все же странным образом казались созвучными ей. Необходимо было выпросить у нее (у механики. — Л. П.) признание квантовых условий в качестве вытекающих из нее основных положений, а не грубых внешних требований, ибо мы стояли перед трудной задачей спасти *сущность механики*, чье дыхание ясно чувствовалось в микрокосмосе»² (курсив Шредингера). Действительно, Уилсон, Зоммерфельд и Эпштейн, исходя из основополагающих работ Бора, придали квантовому постулату стационарных орбит такую форму, в которой связь с механикой Гамильтона—Якоби совершенно ясна. И именно эта формулировка оказалась способной охватить не только случай кругового движения, как это было у Бора, но и случай эллиптического и других сложных движений.

Основываясь на той прямой, хотя и внешней связи между классической механикой и квантовым постулатом, которую дает эта

¹ Sommerfeld A., Das Planck'sche Wirkungsquantum und seine allgemeine Bedeutung für die Molekularphysik, Phys. Ztschr., т. 24, 1911, стр. 1062 и др.

² Сб. Современная квантовая механика, ГТТИ, 1934, ст. Шредингера «Основная идея волновой механики», стр. 47—48.

теория, удалось осветить целый ряд опытных фактов. Такой успех привел к попытке рассматривать теорию квантов как логическое обобщение классической физики. Бор отмечает, что стремление рассматривать теорию квантов как рациональное обобщение классических теорий привело к установлению так называемого принципа соответствия. Роль этого принципа в развитии классической квантовой теории была громадна.

Принцип соответствия возник прежде всего из необходимости ответить на вопрос об интенсивности спектральных линий и причинах отсутствия в спектрах некоторых комбинаций термов. Этот вопрос сводился к определению вероятностей различных переходов между стационарными атомными состояниями. Отсутствие прямого ответа на него привело к некоторому обходному движению — установлению принципа соответствия. Вычисленные на основе этого принципа интенсивности лишь очень грубо совпадали с экспериментальными данными, но зато при его помощи удалось установить удовлетворительные «правила отбора». Принцип соответствия обобщается и становится в течение дальнейшего (с 1918 г.) развития теории атома одним из важнейших методов квантовой физики. Он позволяет предвидеть переход квантовых соотношений в законы классической электродинамики; он определяет границы применимости понятий классической физики; он указывает, что в той области, в которой неприменимы законы классической физики, они не абсолютно теряют свой смысл, а могут дать руководящие указания для определения свойств атомной системы. Принцип соответствия устанавливает границы классической и квантовой теорий, указывая на ту смежную область (область больших квантовых чисел), в которой эти теории переходят одна в другую и дают одинаковые результаты. Еще более интересно и принципиально важно то, что в области, в которой схема классической физики оказывается неудовлетворительной, понятия и законы ее позволяют все же прощупать законы квантовых процессов. Понятия и законы классической физики сохраняют известный ограниченный, но все же отражающий одну из сторон объективной действительности смысл и вне границ, устанавливаемых для них переходом от макро- к микрокосмосу.

По старой квантовой теории принцип соответствия не был обоснован чем-либо иным, кроме общей идеи связи макро- и микрокосмоса и правильности результатов его применения. Недаром Зоммерфельд назвал принцип соответствия «волшебной палочкой», при помощи которой может быть открыт ряд атомных явлений и их законов.

Однако, как мы видели, оказалось необходимым по-новому конкретизировать ту общую идею тождества и различия микро- и макрокосмоса, которая заключена в общем понятии «соответствия». Шредингер хочет перекинуть мост между классической макроско-

пической физикой и физикой микрокосмоса. Во второй статье он пишет: «Сила же предложенного в данной работе метода заключается, насколько я могу судить, в использовании руководящего физического представления, согласно которому микроскопические и макроскопические явления связаны друг с другом, причем разъясняется, почему при истолковании каждого случая требуются внешне различные приемы. Мне лично особенно нравится приведенное в конце предыдущей статьи истолкование излучаемых частот как „биений“; причем я думаю, что таким образом будет получено также наглядное истолкование формул для интенсивности»¹. Наглядность и органическое сочетание квантовых условий с уравнениями движения, которые оказываются здесь, конечно, не обычными уравнениями классической механики, представляют собой основное преимущество волновой механики. Эта теория кажется Шредингеру глубоко отличной от квантовой механики, разрабатываемой с 1925 г. Гейзенбергом, Борном и Иорданом. Но он питает надежду, что эти две теории не только не будут бороться друг с другом, но наоборот. благодаря чрезвычайному различию исходных точек и метода дополнят одна другую. Однако именно такое сотрудничество и математическая эквивалентность обоих аспектов механики атома, которую в последующем показал сам Шредингер, вызвали тенденцию поглощения одним методом другого в качестве подсобного, вспомогательного. С одной стороны один из представителей копенгагенской школы, ее вождь и руководитель Бор признает значение работы Шредингера, а с другой хочет лишить ее самостоятельности. «Как известно, — говорит он, — собственные колебания волнового уравнения Шредингера дают рациональное представление стационарных состояний в атоме. При этом энергия каждого состояния связана с сопряженным периодом колебаний общим квантовым соотношением $\epsilon\tau = h$. Счет узлов собственных колебаний дает простое толкование понятия о квантовом числе»². Гейзенберг (род. в 1901) считает, что уравнение (52) и связанный с ним комплекс математических методов представляет собой «наиболее мощные математические методы для разработки квантово-теоретических проблем. Для физического толкования, однако, эти методы пока что не дают нам ничего нового»³.

Шредингер пытался раскрыть физический смысл атомных процессов. Исходя из той физической предпосылки, что волновая группа (волновой пакет) представляет собой частицу по классической тео-

¹ Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem (zweite Mitteilung), Ann. d. Phys., т. 79, 6, 1926, стр. 514.

² Бор Н., Квантовый постулат и новое развитие атомистики, УФН, т. VIII, вып. 3, 1928, стр. 324.

³ Гейзенберг В., Физические принципы квантовой теории, ГТТИ, 1932, стр. 88.

рии, Шредингер исследует закон распространения этих волн. Результатом этого исследования явилось открытие «волнового уравнения», изучение которого дает возможность определить поведение элементарных частиц и выявить их специфические особенности. Шредингер стремится определить характер некоторых колебаний в атоме по аналогии с макроскопическими колебательными процессами. Недаром в том же 1926 г. Шредингер печатает статью под характерным названием «Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik»¹ названием, хорошо показывающим ведущую тенденцию в работе Шредингера. «Непрерывный переход» — вот поставленная задача, эквивалентная на философском языке задаче стирания качественной грани между микро- и макрокосмосом. Как же развить эту идею непрерывного перехода от макро- к микрофизике, и обратно? Для этого проще всего пойти по пути развития и расширения оптико-механической аналогии, известной уже со времени Гамильтона (см. гл. II).

Почти сто лет прошло со времени начала работ Гамильтона по оптико-механической аналогии. Изменение общественной техники в сторону появления и бурного развития немашинных ее элементов (электроника, радиотехника и т. п.) изменило обычное представление о модельности и наглядности. И вот в этих условиях для того, чтобы раскрыть законы атома и попытаться еще раз «дыхание классической механики в микрокосмосе» превратить в сведение микрокосмоса к макрокосмосу, Шредингер воспользовался оружием оптико-механической аналогии и дал ей блестящее применение.

В своем втором сообщении, опубликованном в т. 79 «Annalen der Physik» за 1926 г. (стр. 489—527), Шредингер и начинает изложение с «Гамильтоновой аналогии между механикой и оптикой». Шредингер указывает: «Вариационный принцип Гамильтона может рассматриваться как принцип Ферма для распространения волн в пространстве конфигураций (q = пространстве)...»². Затем Шредингер переходит к рассмотрению общей проблемы классической механики консервативной системы. Принцип Гамильтона связан с уравнением

$$\frac{\partial S}{\partial t} + T\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) + V(q_k) = 0, \quad (65)$$

где S — функция действия, интеграл по времени от $L = T - V$, взятый по некоторому пути движения системы и рассматриваемый как функция конечного положения и времени.

¹Schrödinger E., Die Naturwissenschaften 1926, VII, 4, 28. В этой статье Шредингер, между прочим, доказал возможность построения волновых групп посредством суперпозиции собственных колебаний.

²Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem..., стр. 490; «Сборник» стр. 679.

При решении этого уравнения обычно делается подстановка

$$S = W(q_k) - Et, \quad (66)$$

где E — постоянная энергии.

Подставив это значение в уравнение (65), получим

$$2T\left(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}\right) = 2(E - V). \quad (67)$$

Это уравнение как все геометрические утверждения в пространстве конфигураций (пространство переменных q), будет особенно просто и наглядно, если в этом пространстве ввести посредством кинетической энергии системы неевклидово мероопределение¹.

Если $\bar{T}$ — кинетическая энергия, причем $\bar{T} = \bar{T}(\dot{q}_k)$, а не так, как выше, где было $T = T\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}\right)$, то линейный элемент определится так :

$$ds^2 = 2\bar{T}(q_k, \dot{q}_k) dt^2. \quad (68)$$

Правая часть содержит dt , конечно лишь внешним образом, ибо $\dot{q}_k dt = dq_k$. Таким образом, все геометрические утверждения рассматриваются в неевклидовом смысле в q -пространстве. Это сразу придает символический, не наглядный характер всему построению Шредингера. Бор правильно отмечает, что «символический характер метода Шредингера ясен не только потому, что простота его, так же как и метода матриц, основана на существенном применении мнимых арифметических величин. Здесь не может быть речи о непосредственной связи с нашим привычным воззрением прежде всего потому, что „геометрическая” проблема, представляемая волновым уравнением, отнесена к так называемому конфигурационному пространству, число измерений коего равно числу степеней свободы системы...»².

Зачем вводится Шредингером пространство конфигураций с неевклидовым мероопределением? Дело в том, что приравнивание $\text{grad } S$ некоторой функции координат, позволяющее вывести представление о «волнах» в пространстве, возможно в общем случае только с помощью неевклидовой геометрии. В трехмерном же евклидовом пространстве оно возможно только тогда, когда система (частица) обладает кинетической энергией, равной сумме квадратов импульсов, умноженных на постоянную. Однако легко представить себе системы, не удовлетворяющие этому условию. В качестве примера можно взять две частицы с $m_1 \neq m_2$, движущиеся в силовом

¹Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem..., стр. 491.

²Бор Н., Квантовый постулат и новое развитие атомистики, УФН, т. VIII, вып. 3, 1928, стр. 326.

поле. Для такой системы кинетическая энергия и импульсы выражаются так:

$$T = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) \quad (69)$$

и

$$p_{x1} = m_1 \dot{x}_1, \quad p_{x2} = m_2 \dot{x}_2, \dots \text{ и т. д.}$$

В этом случае только при $m_1 = m_2$ получается $T = \text{const} + \sum p_k^2$. Поэтому в общем случае надо воспользоваться неевклидовой геометрией, которая дает формулы, применимые к системе с любым выражением для кинетической энергии.

Оптически неоднородная среда искривляет траектории световых лучей, т. е. ее преломляющая способность может быть истолкована как неевклидовость ее метрики. Аналогично механика конфигурационного пространства для всех случаев движения механической системы, кроме инерциального движения, имеет неевклидов характер (так как имеет место искривление траекторий). Как мы видели, задание потенциальной энергии эквивалентно заданию показателя преломления некоторой оптической среды, т. е. заданию неевклидова мероопределения конфигурационного пространства. Тогда уравнение Гамильтона—Якоби имеет смысл уравнения, вводящего метрику, т. е. определяющего искривление фазовых гиперповерхностей или нормальных к ним траекторий изображающей системы в конфигурационном пространстве. Конечно, наглядность благодаря этому становится очень условной, но, во-первых, в частном случае одной частицы в силовом поле получится обычный трехмерный случай и обычные трехмерные волны, во-вторых, в q -пространстве сохраняют свое значение все привычные физические величины и математические операции. Рассмотрение задачи в q -пространстве усложнит аналитическую формулировку, причем повсюду на место евклидова элемента линии встанет элемент линии (68). Однако все основные понятия, употребляемые в обычном трехмерном евклидовом пространстве, как-то: div , rot , grad , divgrad и т. п., могут быть определены на этой основе и будут употребляться обычным образом, так что можно пользоваться для себя евклидовым их представлением. Для вычислений главная сложность состоит в необходимости различать ковариантные от контрвариантных компонентов вектора и тензора. Впрочем, в дальнейшем изложении идей Шредингера нам это различие не понадобится.

Задачей, которую ставит перед собой Шредингер, является выявление связи теории Гамильтона с процессом распространения волн¹. Эта связь была установлена самим Гамильтоном и послужила ему отправным пунктом в построении им механики, которая и исторически выросла из его геометрической оптики неоднородной среды.

¹ Дальнейшее обобщение см. Четаев Н. Г., О продолжении оптико-механической аналогии, ПММ, т. 22, в. 4, 1958, стр. 487.

При помощи некоторых математических соображений можно показать, что уравнение (67) эквивалентно простому соотношению

$$(\text{grad } S)^2 = 2(E - V). \quad (70)$$

Для того, чтобы кратко проанализировать это соотношение, допустим, что найдена функция $S = W(q_k) - Et$, удовлетворяющая ему. Тогда мы можем, по мнению Шредингера, наглядно представить эту функцию для какого-либо определенного t тем, что в q -пространство впишем пучок поверхностей $S = \text{const}$ и каждой из них припишем определенную S -величину. Таким образом, если известна первая поверхность и ее S , то уравнение (70) дает все необходимое для построения последовательного ряда остальных поверхностей. Единственно необходимые для этого данные: одна поверхность и ее S могут быть взяты совершенно произвольно и на основании их из уравнения (70) могут быть последовательно построены все остальные. Таким образом, содержание дифференциального уравнения исчерпывается данными для построения; каждое из решений упомянутого уравнения можно получить из соответственно заданной поверхности плюс S -величины. Само построение осуществляется чрезвычайно просто. Берется произвольная поверхность и ей приписывается некоторое значение S_0 . Приняв одну сторону S -поверхности за положительную, вставим в каждой точке поверхности нормаль, на которой отложим отрезок

$$ds = \frac{dS_0}{\sqrt{2(E - V)}} = \frac{E dt}{\sqrt{2(E - V)}}, \quad (71)$$

сообразуясь со знаком dS_0 . Очевидно, что конечные точки нормалей образуют поверхность $S + dS_0$. Таким способом можно построить последовательно ряд поверхностей по двум направлениям, причем время t предполагается постоянным. Если рассмотреть теперь крайне простую зависимость от времени, то уравнение (65) показывает, что тот же самый последовательный ряд поверхностей дает распределение S -величин в любой более поздний момент времени (или более ранний). Надо только приписать каждой отдельной поверхности различные значения S и из каждого значения S , отнесенного к времени t , следует вычесть Et . Можно сказать, что S -величины передвигаются согласно определенному простому закону от поверхности к поверхности и притом при положительных E в направлении нарастающих S -величин. Вместо этого можно себе представить, что передвигаются поверхности, причем каждая из них принимает форму и положение последующей и при этом приносит с собой свою S -величину. Закон перемещения поверхности задан тем, что, например, поверхность S ко времени $t + dt$ должна достичь положения, которое во время t имела поверхность $S + E dt$. В самом деле, представим себе, что в момент t_0 мы находимся в некоторой точке поверхности S_0 и движемся с некоторой

скоростью u в направлении, перпендикулярном к этой поверхности. В момент времени $t_0 + dt$ мы придем в точку, где значение S получит приращение dS , т. е. в точку с $S = S_0 + dS$. Определим значение величины S :

$$\begin{aligned} S = S_0 + dS &= S_0 + \frac{\partial S}{\partial s} ds + \frac{\partial S}{\partial t} dt = S_0 + \text{grad} S \cdot ds + \frac{\partial S}{\partial t} dt = \\ &= S_0 + u \text{grad} S \cdot dt - E dt. \end{aligned} \quad (72)$$

В течение промежутка времени dt мы передвинулись на $ds = u dt$ вдоль нормали к поверхности S_0 ; в этом направлении S изменяется со скоростью $\text{grad} S$. Вместе с тем из уравнения

$$S = W(q_k) - Et \quad (73)$$

видно, что зависимость S от t дает для скорости изменения S со временем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E. \quad (74)$$

Таким образом, S_0 к моменту $t_0 + dt$ возрастает до значения, определяемого уравнением (72). Теперь определим нормальную скорость, с которой смещаются S -поверхности

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}}, \quad (75)$$

что вытекает из уравнения (71), так как, если мы каждую точку поверхности S_0 передвинем в направлении перпендикуляра на отрезок, выражаемый формулой (71), то

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}}. \quad (76)$$

Так как, далее, $\text{grad} S$ по уравнению (70) равен $\sqrt{2(E - V)}$, то, подставив в (72) выражение для скорости (76) и это значение $\text{grad} S$, получим из равенства

$$S = S_0 + dS = S_0 + u \text{grad} S \cdot dt - E dt \quad (77)$$

уравнение

$$S = S_0 + \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}} \sqrt{2(E - V)} dt - E dt = S_0. \quad (78)$$

Этот результат означает, что во всех точках пространства в момент нашего прихода S_0 имеет одно и то же значение. Иначе говоря, S распространяется в пространстве в виде волнового фронта,двигающегося вперед со скоростью, указанной выражением (76). Построенная нами система S -поверхностей может быть истолкована как движение волн в q -пространстве с фазовой скоростью u .

Совершенно ясно, что построение поверхностей при помощи нормалей может быть заменено конструкцией элементарных волн в духе Гюйгенса и нахождением их огибающей. При этом «коэффициент преломления» пропорционален обратной величине скорости, выраженной уравнением (77), и зависит от координат, а не от направления. Последнее объясняется тем, что, так как E есть постоянная, то выражение $E/\sqrt{2(E-V)}$ есть функция координат. Таким образом, приходим к выводу, что q -пространство по своим «оптическим» свойствам неоднородно, но изотропно. Функция S , перемещающаяся со скоростью u , играет в этой системе роль фазы, а принцип Гамильтона выражает собой принцип Гюйгенса. Принцип Ферма непосредственно связан с принципом наименьшего действия в форме Лагранжа, в котором при варьировании выполняется условие $T + V = E = \text{const}$, что необходимо постоянно иметь в виду. В самом деле :

$$0 = \delta \int_{p_1}^{p_2} \frac{ds}{u} = \delta \int_{p_1}^{p_2} \frac{ds \sqrt{2(E-V)}}{E} = \delta \int_{p_1}^{p_2} \frac{2T}{E} dt = \frac{1}{E} \delta \int_{p_1}^{p_2} 2T dt. \quad (79)$$

Отсюда видно, что «лучи», т. е. ортогональные траектории волновых поверхностей, являются путями системы для некоторого значения энергии E в соответствии с хорошо известной системой уравнений

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}. \quad (80)$$

Если взять декартовы координатные оси в обычном трехмерном евклидовом пространстве, то

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z}. \quad (80')$$

Подставив эти выражения в уравнение энергии (при $m = 1$)

$$\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2} + V = E,$$

получаем основное уравнение Гамильтона—Якоби

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = E - V, \quad (81)$$

а так как $\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2}$ есть не что иное, как абсолютная величина $\text{grad} S$, то

$$(\text{grad} S)^2 = 2(E - V), \quad (70)$$

т.е. мы получим уравнение (70) для трехмерного евклидова случая. Обобщение этого рассуждения не представляет труда.

Исходя из макроскопического волнового уравнения, можно получить уравнение Шредингера, воспользовавшись уравнением (65) и введя гипотезу о характере связи количества движения «электрона-частицы» и длины волны «электрона-волны». Таким образом, совершается переход от макромеханики через оптику лучей и волновую оптику к микромеханике¹.

Сравним этот путь с гамильтоновым переходом от волновой оптики через оптику лучей к макромеханике. В этом сравнении раскрывается принципиальное различие оптико-механической аналогии Гамильтона и Шредингера — различие, обусловленное физическим содержанием. В самом деле, для перехода к микромеханике оказывается необходимым ввести соотношение $\lambda = \frac{h}{p}$, которое характеризует соотношение волновой и корпускулярной картины, т. е. говорит о каких-то структурных особенностях исследуемой области. Аналогия Гамильтона целиком лежит в пределе макроскопической физики, в то время как Шредингер осуществляет переход от макро- к микрофизике. Если говорить языком современной физики, то аналогия механики и геометрической оптики может быть обоснована тем, что при приближениях геометрической оптики движение группы волн выражается уравнениями, сходство которых с уравнениями теории Якоби чрезвычайно велико. Что же касается аналогии волновой механики и оптики, то здесь положение значительно более сложное. Дело в том, что хотя в приведенных выше соображениях речь шла о волнах, о фазовой скорости и тому подобных понятиях волновой оптики, все же аналогия должна быть усматриваема не между механикой и волновой оптикой, а между механикой и оптикой геометрической. Прежде всего необходимо отметить, что изображающая точка механической системы не только не перемещается со скоростью u , но ее скорость v (при $E = \text{const}$) пропорциональна $\frac{1}{u}$. Действительно, из формулы (68) получаем

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2\bar{T}} = \sqrt{2(E - V)}. \quad (82)$$

Легко заметить, что по формуле (80) скорость v велика там, где велик $\text{grad } S$, т. е. там, где S -поверхности расположены плотно, т. е. где u невелико. На то же указывает и определение S как интеграла по времени функции Лагранжа. Кроме того, в силу такого соотношения v и u в этой схеме не фигурируют и не находят себе места важные понятия теории волн. В этой теории нет упоминания о таких величинах, как длина волны, частота, амплитуда, которые определяют

¹ Классическую механику можно было бы назвать «геометрической оптикой волновой механики». (Голдстейн Г., Классическая механика, Гостехиздат, М., 1957, стр. 337.)

специфичность и форму волнового процесса. В проведенной аналогии «им не хватает параллельных механических понятий». Предположим, что падением камня на поверхности воды вызваны волны, кругообразно распространяющиеся. Тогда развитая выше система уравнений констатирует тот факт, что гребни этих волн распространяются с некоторой определенной скоростью. Однако для более полной характеристики этих волн надо указать их частоты и амплитуды (интенсивности). И если мы приписали S значение фазы, то надо сказать, что при неопределенности формы волны это довольно «расплывчатое» понятие. Аналогия имеет место именно между механикой и геометрической оптикой, и то обстоятельство, что геометрическая оптика является только грубым приближением для науки о свете, не меняет ничего в этой аналогии. Как же идти дальше?

Вот как отвечают на этот вопрос де Бройль и Шредингер. Де Бройль говорит: «если сопряженная (с частицей вещества. — Л. П.) волна распространяется по законам геометрической оптики, то никакой опыт не в состоянии доказать существования сопряженных волн, так как тогда результат опыта можно рассматривать только как доказательство точности законов старой механики. Но совсем иначе получается, если условия распространения сопряженной волны таковы, что приближения геометрической оптики уже недостаточны, чтобы учесть их. Согласно новым идеям мы должны, следовательно, ожидать возможности наблюдать такие явления, которые старая механика была совершенно бессильна предвидеть и которые характерны для волновой концепции динамики»¹. Шредингер пишет: «Ведь сейчас известно, что наша классическая механика неверна при малых размерах и большой кривизне траекторий; не является ли это обстоятельство вполне аналогичным известной неприменимости геометрической оптики, т. е. оптики с „бесконечно малой длиной волны“, в случае „препятствий“ или „отверстий“, сравнимых по размерам с действительной конечной длиной волны. Быть может, наша классическая механика представляет полную аналогию с геометрической оптикой и подобно последней отказывается служить и не согласуется с действительным положением вещей при размерах и радиусе кривизны траекторий, приближающихся по величине к некоторой длине волны, которая теперь принимает в q -пространстве реальный смысл. Тогда целесообразно попытаться построить „волновую механику“, и первым шагом на этом пути является волновое истолкование представлений Гамильтона»².

Двигаясь по этому пути, «мы вместе со Шредингером перейдем от макромеханики через оптику лучей и волновую оптику к микромеханике. В той же мере как волновая оптика является уточнением оптики лучей для областей порядка длины волны, точно так же мы

¹ Де Бройль Л., Введение в волновую механику..., стр. 9—10.

² Шредингер Э., «Сборник», стр. 684.

надеемся построить микромеханику, уточняющую макромеханику и делающую ее пригодной для областей атомных размеров¹. Для этого будем исходить из самого простого допущения, что те системы волн, которые были рассмотрены выше, являются синусоидальными волнами. Это самая простая и близкая аналогия, хотя необходимо подчеркнуть ее произвольность именно потому, что это предположение имеет в дальнейшем существенное значение.

Произвол здесь, конечно, очень ограничен и по существу сводится к тому, что в начале исследования рассматривается простейшее отношение. Это простейшее отношение, с одной стороны, дает возможность отчетливо вскрыть основную руководящую идею, а с другой стороны, дает возможность впоследствии построить более широкое обобщение. Итак, волновая функция должна содержать время под знаком $\sin$, аргумент которого будет линейной функцией S . А так как S имеет размерность действия, а фаза есть безразмерная величина, то коэффициент при S , очевидно, должен иметь размерность обратного действия. Вот здесь и появляется на сцену гипотеза, смысл которой заключен в том, что она вводит найденную опытным путем важнейшую атомную константу h . Шредингер предполагает, что этот коэффициент является универсальным, т. е. что он не зависит не только от E , но и от природы механической системы и обозначает его через $2\pi/h$. Таким образом, для того, чтобы перейти затем к опытным данным и к реальным системам, цепь логической дедукции разрывается введением чуждой как классической механике, так и классической волновой оптике постоянной Планка. Отсюда

$$\sin \left[\frac{2\pi S}{h} + \text{const} \right] = \sin \left[\frac{2\pi W(q)}{h} - \frac{2\pi Et}{h} + \text{const} \right]. \quad (83)$$

При этом частота волн определяется непосредственным сравнением этого выражения с обычным классическим соотношением $\sin (2\pi\nu t + \text{const})$. Это сравнение дает для частоты выражение

$$\nu = \frac{E}{h}.$$

Что же касается длины волны, то, сравнивая

$$u = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{E}{h},$$

находим, что

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{2(E-V)}}, \quad (84)$$

причем λ не зависит от аддитивной постоянной, входящей в E , так как выражение, стоящее под знаком корня, представляет собой

¹ Зоммерфельд А., Волновая механика, ОНТИ, 1933, стр. 9.

удвоенную кинетическую энергию. Если теперь в выражении для скорости u заменить E при помощи уравнения $E = h\nu$, то получим

$$u = \frac{h\nu}{\sqrt{2(E - V)}}. \quad (77)$$

Зависимость волновой скорости от энергии системы становится, таким образом, своеобразной зависимостью от частоты, т. е. законом рассеяния для волн¹. Эта зависимость открывает возможность связать скорость точки механической системы с распространением волн и при том придать v совершенно конкретный характер. Из формулы $E = h\nu$ и из уравнений (77) и (82) получаем

$$v = \frac{d\nu}{d(v/u)}. \quad (85)$$

Это значит, что скорость точки системы есть скорость группы волн, которая занимает небольшую область частот (скорость сигнала). Это соотношение было введено де Бройлем, который основывался на специальной теории относительности, что безусловно не является случайным. Дело здесь не столько даже в формальном аппарате этой теории, сколько в ее общем характере и направленности. В XIX в. преобладало представление о неизменности и абсолютности физических законов, о строгой формальной раздельности физических понятий. Теория относительности установила целый ряд новых переходов и связей, сметая освященные прошлым развитием науки абсолютные грани между понятиями пространства и времени, массы и энергии и другими понятиями и законами классической физики. Это привело к созданию отчетливого представления об относительности физических законов, о переходах и связях понятий. Соотношение между теорией относительности и ее предельным случаем — классической механикой — указывало на возможность подобных же связей в других отделах физической науки. Это толкало на путь математических обобщений и изменений функциональной формы физических законов с тем, чтобы предельным случаем новых устанавливаемых соотношений являлись классические теории.

Соотношение (85) устанавливает как раз связь между различными физическими понятиями, которые не имели в классической теории между собой ничего общего. Используя его для нахождения более близкой связи между распространением волны и движением точки системы, можно попробовать построить такую группу волн, которая имела бы во всех направлениях сравнительно небольшие размеры. Значение такого построения будет состоять в том, что такая группа будет двигаться согласно тем же законам, что и изображающая точка системы. Другими словами, эта группа волн как

¹ Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem..., стр. 498.

бы заменит нам изображающую точку механической системы до тех пор, пока она будет рассматриваться как приблизительно «точкообразная»; это означает, что до тех пор, пока можно будет пренебрегать собственными размерами волновой группы по сравнению с размерами пути, можно для описания движения этих волн пользоваться законами обычной механики материальной точки. Такая группа волн, движущаяся со своей определенной групповой скоростью, будет соответствовать механической системе определенной энергии. Построение пространственно ограниченной группы волн, «волнового пакета» осуществляется в оптике путем суперпозиции ряда плоских волн, каждая из которых, взятая сама по себе, может заполнить все пространство. При таком наложении волны уничтожаются вне узкого, ограниченного пространственного интервала. Это уничтожение происходит благодаря интерференции, в результате которой получается требуемая узкая группа волн. Такая картина дает аналитическое изображение «пакета энергий», обладающего сравнительно небольшими размерами. Этот «пакет» передвигается в пустоте со скоростью света, а в диспергирующей среде со скоростью группы. При этом положение пакета определяется той точкой пространства, в которой все наложенные волны совпадают по фазе. Впрочем, такое утверждение имеет смысл только в том случае, если не рассматривать детально структуру такого «пакета энергии».

Для того чтобы волновая механика совпадала с классической в предельном случае волнового пакета надо, чтобы движение такого пакета совпадало с движением соответствующей точки в пространстве конфигураций.

В своей последней работе¹ этого периода Шредингер выводит дифференциальное уравнение для изменения ψ со временем. Волновое уравнение имеет место для волн с частотой E/h , т. е. для волн, которые включают время с помощью множителя $e^{2\pi i E t/h}$ или $e^{-2\pi i E t/h}$. Следовательно,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm \frac{2\pi i E}{h} \psi, \quad (86)$$

и мы приходим к уравнению

$$\bar{H}\left(q_k, \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}\right) \psi = \pm \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (87)$$

¹ Schrödinger E., Ann. d. Phys., 81, 1926, стр. 109.

² Здесь $\bar{H}$ — оператор полной энергии поля, выражаемый в форме пространственного интеграла некоторой функции от величины $v(x, y, z)$, определяющей поле, и канонически сопряженной с ней величины $\lambda(x, y, z)$. В представлении Шредингера v и λ — операторы, не зависящие от времени, а ψ есть функция времени t , определяемая уравнением (87).

Дифференциальное уравнение (87) — не релятивистское, так как временная координата t играет совершенно особенную роль по сравнению с пространственными координатами x, y, z . Это тесно связано с тем, что понятие об амплитуде вероятности непригодно в релятивистской теории.

Отметим, что волновое уравнение Шредингера существенно отличается от классического волнового уравнения Д'Аламбера, так как оно линейно относительно времени, и ψ известно, таким образом, для любого момента времени t , если оно определено вначале. Если начальное движение определено, то знак $\pm$ в уравнении (87) указывает только на направление движения.

Предельный переход от волновой механики к классической формально аналогичен гамильтонову переходу от оптики волновой к геометрической. Для этого в общем волновом уравнении

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$$

надо сделать подстановку:

$$\psi = e^{i/\hbar S}$$

и разложить после этого S по возрастающим степеням $\hbar/i$:

$$S = S_0 + \left(\frac{\hbar}{i}\right) S_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 S_2 + \dots, \quad (88)$$

как это впервые сделали Венцель¹ (род. в 1898) и Л. Бриллюен (род. в 1889)². Для оператора Гамильтона в декартовых координатах сделаем следующее предположение:

$$H = \sum_k \frac{1}{2m_k} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k} + A_k \right)^2 + V(q_k),$$

где

$$A_k = -\frac{e_k}{c} \Phi_k.$$

Тогда волновое уравнение после сокращения на множитель $e^{i/\hbar S}$ дает

$$-\frac{\partial S_0}{\partial t} = \sum_k \frac{1}{2m_k} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q_k} + A_k \right)^2 + V = H \left(\frac{\partial S_0}{\partial q_k}, q_k \right), \quad (89)$$

где в гамильтоновой функции просто заменено p_k на $\frac{\partial S_0}{\partial q_k}$ и далее

$$-\frac{\partial S_1}{\partial t} = \sum_k \frac{1}{2m_k} \left[2 \left(\frac{\partial S_0}{\partial q_k} + A_k \right) \frac{\partial S_0}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q_k} + A_k \right) \right] \quad (90)$$

.....,

так как

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k} + A_k \right) e^{i/\hbar S} = \left(\frac{\partial S}{\partial q_k} + A_k \right) e^{i/\hbar S},$$

$$\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k} + A_k \right)^2 e^{i/\hbar S} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_k} + A_k \right)^2 + \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_k^2} + \frac{\partial A_k}{\partial q_k} \right) \right] e^{i/\hbar S}.$$

¹ Wentzel G., Ztsch. f. Phys., 38, 1926, стр. 158.

² Brillouin L., C. R., 183, 1926, стр. 24.

Выражение (90) можно также написать в виде

$$-\frac{\partial}{\partial t} e^{2S_1} = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{1}{m_k} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q_k} + A_k \right) e^{2S_1} \right]. \quad (91)$$

Уравнения (87) и (91) имеют простой физический смысл. Первое представляет собою уравнение в частных производных Гамильтона—Якоби классической механики, причем для рассматриваемых областей семейства траекторий его решения вещественны. Тогда и S_1 согласно уравнению (90) вещественны в этих областях. Если предположить, что S_0 и S_1 вещественны, то выражение (91) совпадает (при пренебрежении $S_2, \dots$) с уравнением неразрывности, так как здесь $\rho = \psi\psi^* = e^{2S_1}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial q_k} (\rho \dot{q}_k) = 0,$$

т. е. плотность остается постоянной во времени вдоль проведенной через точку q -пространства траектории. Таким образом, в рассматриваемом приближении волновые пакеты ведут себя точно так же, как совокупности материальных точек, движущихся по классическим механическим траекториям.

Путем суперпозиции нескольких собственных функций в области больших квантовых чисел можно построить волновой пакет, который совершает периодическое движение вблизи классического пути¹.

Существует ли в квантовой механике понятие, аналогичное действию в классической механике?

Определим функцию S так :

$$\psi = Ae^{2\pi i S/h}, \quad (92)$$

где A — действительное число.

Для волнового пакета определение (92) можно записать так:

$$\psi = Ae^{2\pi i(x \text{ grad } S + \text{const})/h} e^{2\pi i \frac{\partial S}{\partial t} \frac{t}{h}}. \quad (93)$$

Производные от S предполагаются очень медленно изменяющимися на расстояниях, сравнимых с длиной волны, и поэтому (93) будет выполняться на многих длинах волн. Уравнение (93) вместе с уравнением де Бройля и формулой Планка дает

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = p_k, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E.$$

¹Debye P., Phys. Ztschr., 28, 1927, стр. 170; Darwin C. C., Proc. Roy. Soc., London (A), 117, 1927, стр. 258.

Это значит, что S есть гамильтонова главная функция для классической частицы, соответствующей волновому пакету при изложенных соображениях.

Применив волновое уравнение Шредингера к (92) и пренебрегая всеми членами, содержащими $\hbar$, получим уравнение Гамильтона—Якоби. Все мнимые члены в уравнении Шредингера содержат $\hbar$, и приравнявая члены, линейные относительно $\hbar$, получим уравнение для A , которое может быть использовано, чтобы показать, что движение волнового пакета то же самое, что и классической частицы, которую он представляет. Функция S' , которая получается в этом случае, определена уравнением

$$\psi = e^{2\pi i S'/\hbar},$$

откуда

$$S' = S + \frac{\hbar}{2\pi i} \ln A, \quad (94)$$

т. е. S' отличается от S на величину порядка $\hbar$.

Аналогично можно определить функцию S , как и выше, формулой

$$\psi = A e^{2\pi i S/\hbar}, \quad (95)$$

и если $\hbar$ считать малым, то можно опять прийти к уравнению Гамильтона—Якоби.

Итак, частицы ассоциируются с максимумами групп волн, «волновых пакетов». Такой волновой пакет, как мы видели, строится путем наложения синусоидальных волн, у которых частоты и длины волн, а также и направления распространения, хотя и различны, но изменяются непрерывно в некотором узком интервале. Так как электрон интерпретируется как протяженная частица, то волновой пакет должен обладать конечными размерами. Но это невозможно, так как волновые пакеты, вообще говоря, не сохраняют постоянных размеров, за исключением частного случая излучения гармонического осциллятора. Они расплзаются в пространстве, что не дает, конечно, никакого приближения к картине свободно движущихся частиц, которые, по крайней мере в пределах опыта, остаются по своим размерам неизменными. По мнению Бора, мы имеем здесь дело «с противоречием волнового принципа суперпозиции и предположения об индивидуальности частиц»¹. Кроме того, представление о корпускулах как о волновых пакетах противоречит опытным фактам об интерференции и дифракции соответствующих лучей. «Если мы вообразим себе пучок катодных лучей как собрание большого числа волновых пакетов, каждый из которых соответствует отдельному электрону, то рассеяние этих лучей дифракционной

¹ Бор Н., Квантовый постулат..., стр. 333.

решеткой не произведет обычной интерференционной картины, сходной с той, которая наблюдается в случае однородных световых волн. В самом деле, для того, чтобы объяснить эту интерференционную картину с точки зрения волновой теории, мы должны допустить, что падающие лучи образуют синусоидальный ряд волн постоянной амплитуды. Действие дифракционной решетки состоит при этом в следующем: путем суперпозиции (интерференции) элементарных волн одинаковой амплитуды, которые испускаются отдельными линиями (или плоскостями) решетки, образуются результирующие колебания постоянной амплитуды, которая зависит только от разности фаз, т. е. от направлений отраженных лучей. Таким образом, трактовка индивидуальных электронов в пучке катодных лучей как волновых пакетов совершенно не в состоянии объяснить явления интерференции и дифракции¹.

Если отбросить это представление, то снова встает задача физической интерпретации функции ψ и связанных с ней решений волнового уравнения. Необходимо глубоко уяснить специфичность микрокосма и построить соответствующую этой специфике особую математическую схему, отражающую качественную своеобразность объекта.

Как объяснить то, что теории Бора удалось выполнить известную расшифровку микроструктуры на основе классической механики, хотя и взятой в связи с очень искусственными дополнениями и предпосылками? Как было уже отмечено, теория Бора в ее развитой форме стоит в тесной связи с принципом Гамильтона и с системой уравнений Гамильтона—Якоби. А ведь это как раз та форма механики, которая «содержит в себе ясное указание на действительный волновой характер механических процессов»². В самом деле, принцип Гамильтона соответствует принципу Гюйгенса в его старой наивной формулировке. Этот принцип, дополненный некоторыми положениями (вроде зон Френеля), давал возможность в значительной степени охватить явления дифракции. Тем более существенно отметить, что все эти допущения были непонятны геометрическому оптику. Соответственно и при помощи принципа Гамильтона и теории функции действия можно было «пролить свет на процессы в атоме». Но углубление в изучение законов атома требовало осознания связи волновых движений с движением корпускулы. Шредингер и произвел замену классического уравнения Гамильтона—Якоби, которое соответствует бесконечно коротким длинам волн, волновым уравнением, которое связано с уравнением Гамильтона—Якоби как со своим предельным случаем. Единственное имеющееся у нас основание для установления такого волнового уравнения — это соотношение для скорости (77).

¹ Френкель Я., Волновая механика, ч. 1, ГТТИ, 1933, стр. 46.

² Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem..., стр. 507.

Кроме того, в качестве отправного пункта имеется классическое волновое уравнение

$$\Delta \psi - \frac{1}{u^2} \ddot{\psi} = 0. \quad (96)$$

Вообще говоря, нет обязательных указаний, что искомое уравнение для атома будет второго порядка, но это самый простой случай, дающий наиболее тесную и близкую аналогию с классическим волновым уравнением. Так как уравнение (96) действительно для явлений, которые зависят от времени только посредством множителя $e^{2\pi i \nu t}$, то, приняв во внимание, что $\nu = \frac{E}{h}$, получим

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2}{h^2} (h\nu - V) \psi = 0 \quad (97)$$

или

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2}{h^2} (E - V) \psi = 0. \quad (97')$$

Такое уравнение имеет «необычайное множество» решений, что представляется с первого взгляда крупным недостатком, так как все известные экспериментальные факты указывают на необходимость только ограниченного ряда значений основных параметров.

Как раз классическая механика приводила к непрерывному ряду решений, в то время как в природе осуществлено только ограниченное число этих решений. Математически дело состояло в том, что принцип Гамильтона «требует только, чтобы некоторый интеграл был минимумом, но не определяет значений этого минимума, квантовые условия ограничивают значения минимума целыми кратными универсальной мировой постоянной, именно планковской постоянной действия»¹. Добавочные утверждения, необходимые для решения уравнения Шредингера в виде дискретного ряда значений ψ , имеют другой характер, чем квантовые условия Бора. Эти положения являются утверждениями того типа, который часто встречается в физике при решении уравнений в частных производных, а именно начальными и граничными условиями.

«Во всех случаях, — говорит Шредингер, — которые я исследовал до сих пор, оказывается, что уравнение... (уравнение (97')). — Л. П.) носит в себе квантовые условия»². Оно дает стационарные уровни без всяких дополнительных предположений, кроме почти само собой разумеющегося для физической величины требования к функции ψ : она должна быть однозначной, конечной и непрерывной во всей области пространства конфигураций. Итак, мы приходим к важнейшему выводу о характере выражения атомных процессов в q -пространстве.

¹ Шредингер Э., Сб. Современная квантовая механика..., стр. 48

² Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem, стр. 511.

«Действительное механическое явление следует понимать или изображать как волновой процесс в q -пространстве, а не как движение изображающей точки в этом пространстве. Рассмотрение движения изображающей точки, составляющее предмет классической механики, является лишь приближенным способом изучения поведения системы и может быть оправдано лишь подобно тому, как в некоторых случаях оправдывается применение лучевой или геометрической оптики для изучения действительных волновых оптических процессов. Макроскопический механический процесс должен изображаться как волновой сигнал описанного выше вида, который с достаточным приближением может считаться точечным в сравнении с геометрической структурой траектории. Как мы видели, для подобного сигнала или группы волн действительно выполняются точно те же законы движения, что и устанавливаемые классической механикой законы движения изображающей систему точки. Подобный способ рассмотрения теряет, однако, всякий смысл, если размеры траектории не очень велики по сравнению с длиной волны или даже сравнимы с ней. В этом случае следует перейти к строгому волновому рассмотрению, т. е. следует изображать многообразие возможных процессов, исходя из волнового уравнения, а не из основных уравнений механики, которые для объяснения сущности микроструктуры механического движения столь же непригодны, как и геометрическая оптика для объяснения явлений дифракции»¹. Таким образом, совершается переход в волновой механике. «Переходя от старого к новому представлению, мы выигрываем в возможности учитывать явление дифракции, или, лучше сказать, нечто весьма аналогичное явлению дифракции света»².

Поясним это простым примером, давно известным и приведенным самим Шредингером в его нобелевской речи. Рассмотрим тень, которую дает небольшой точечный источник от непрозрачного предмета. Чтобы построить эту тень, надо проследить отдельно все лучи, исходящие из источника, и посмотреть, каким из них непрозрачное тело мешает достичь экрана. Край тени будет образован теми лучами, которые, проходя мимо, еще касаются края предметов. Из опыта известно, что край тени даже при том условии, что источник света является точечным и границы предмета резкими, в действительности не будет совершенно резким. «Фронт волны, так сказать, разрезается предметом, что приводит к образованию нерезкого края тени, который был бы непонятен, если бы отдельные лучи света являлись самостоятельными и распространялись независимо друг от друга»³.

¹ Schrödinger E., Quantisierung als Eigenwertproblem, стр. 506—507.

² Шредингер Э., Основная идея волновой механики, Сб. «Современная квантовая механика», стр. 48.

³ Там же, стр. 52.

Это явление, не выраженное отчетливо у больших тел и не обнаруживаемое грубыми экспериментами, имеет место в областях малых размеров, причем область возмущения имеет по всем направлениям размеры порядка длины волны. Таким образом, явление дифракции тесно связано с длиной волны.

Применение этих представлений к атому дает возможность сделать попытку своеобразного волново-механического истолкования его структуры. Так как ядро атома может рассматриваться как точечный центр, а «вместо электронов мы вводим гипотетические волны, оставляя их длину волн пока что совершенно неопределенной», то «ничто не мешает нам вычислить, что атомное ядро должно вызвать дифракцию этих волн, аналогично небольшой пылинке в случае света». После этого необходимо «проделать решающий шаг: мы отождествляем область возмущения или арену дифракции с атомом; мы утверждаем, что атом в действительности является ничем иным, как дифракционным явлением электронных волн, так сказать, пойманных атомным ядром. Тот факт, что величина атома и длина волны будут одного порядка, не является уже больше случайностью, но представляется очевидным»¹. Но эта картина, хотя и очень простая с точки зрения внешнего выражения, таит в себе большие трудности. Трудности эти вырастают из того, как это не парадоксально звучит, что в ней нет ничего, что не укладывалось бы в рамки классической картины.

Было бы большой ошибкой считать, что одна только замена электрона-корпускулы электроном-волной что-то изменяет по существу в представлениях классической физики. Шредингер здесь идет по пути сглаживания качественного скачка между макро- и микрофизикой, по пути максимально возможного сведения последней к первой. Этой односторонней, по существу механистической, тенденции противостоит другая концепция. Один из представителей ее, Иордан, констатирует: «... удивительные взаимоотношения между классической и квантовой механикой, которые в несколько парадоксальной форме можно формулировать так, что между обеими теориями существует, с одной стороны, наибольшая возможная противоположность, а с другой — наибольшее возможное сходство. Наибольшая противоположность в основных предпосылках и тем не менее повсюду проявляющееся сходство во всех закономерностях»². Это, конечно, другая крайность.

Возвращаясь к рассмотрению воззрений Шредингера, укажем, что и он ясно сознает «печальную» необходимость отказаться от неограниченного, некритического применения в микрокосме некоторых понятий классической физики. В первую очередь речь идет

¹ Шредингер Э., Сб. Современная квантовая механика... стр. 55.

² Иордан, Гипотеза световых квантов, ее развитие и современное состояние, УФН, т. X, вып. 1, 1930, стр. 72.

о понятии траектории. Шредингер указывает: «Напротив, можно запутаться в неразрешимых противоречиях, если пытаться, как это кажется естественным, полностью удерживать и для атомных процессов понятия *траектории системы*: подобно этому бессмысленно, как известно, подробно изучать в области дифракционных явлений движение *светового луча*»¹. В самом деле, представим себе, что группа волн движется по небольшой ограниченной «траектории», размеры которой порядка длины волны и, значит, невелики по сравнению с размерами самой группы волн. Ясно, что тогда «траектория системы» в смысле классической механики, т. е. траектория точки точно совпадающих фаз, не будет никак выделяться, так как вокруг этой точки расположен целый континуум точек, в которых имеется почти такое же полное соответствие фаз, которые описывают совершенно другие «траектории». Иначе говоря, группа не только заполняет все пространство траектории, но простирается еще далеко за его пределы. Это значит, что понятие траектории должно быть заменено понятием о системе волновых поверхностей, нормальных к этой траектории (аналогично гл. IV, разд. 4). «Но эти волновые поверхности, даже если рассматривать узкий пучок возможных траекторий, находятся со всеми ними в одинаковом соотношении. Согласно старому представлению одна из этих траекторий выделяется в каждом конкретном случае как „действительная“, из всех остальных, „просто возможных“. В новой теории дело обстоит иначе. Мы сталкиваемся здесь со всей глубиной логической противоположности между случаем: „или — или“ (механика точки) и случаем „и — и“ (волновая механика)»² и с противоположностью формально-логического мышления и мышления диалектического, — добавим мы от себя. Таким образом, нельзя говорить, что электрон в атоме находится в определенном месте квантовой траектории. Кроме того, законы волновой механики не определяют отдельную орбиту. «Из приведенных нами утверждений следует невозможность последовательного истолкования понятий: „положение электрона“ и „траектория электрона“; если все же попытаться сохранить эти понятия, то они неизбежно окажутся противоречивыми. Это противоречие настолько резко, что возникает сомнение, может ли вообще быть понята сущность движения в атоме с помощью пространственно-временной формы мышления. С философской точки зрения я считаю решение вопроса в подобном духе равносильным полному поражению, так как мы в действительности не можем изменить своих методов мышления и все, что непознаваемо с помощью этих методов, не может быть понято вообще. Пододные случаи, возможно, существуют, но я не верю в то, что к ним относится и проблема структуры атома. С нашей точки зрения, нет никаких оснований для подобных

¹ Schrödinger E., *Quantisierung als Eigenwertproblem...*, стр. 507.

² Шредингер Э., *Сб. Современная квантовая механика...* стр. 58.

сомнений, хотя (или лучше сказать потому) их причина вполне понятна. Подобным образом мог бы также потерпеть крушение сторонник геометрической оптики, подходя в своих опытах к явлениям дифракции и используя понятие луча, оправданное макроскопической оптикой; этот оптик мог бы, в конце концов, тоже прийти к мысли, что законы геометрии неприменимы к явлениям дифракции, поскольку считаемые им прямыми и независимыми друг от друга световые лучи при этих явлениях каждый раз замечательным образом закручиваются в однородной среде и заметно влияют друг на друга. Я считаю, что здесь имеет место очень тесная аналогия¹.

Это, конечно, только аналогия, так как положение в случае перехода от макрофизики к микрофизике гораздо более сложно, чем при переходе от геометрической оптики к оптике волновой, но аналогия, дающая возможность яснее представить себе содержание принципиальной проблемы. Смысл этой проблемы — в необходимости преодоления ограниченности и абсолютизирования понятий и законов классической физики. Конечно, верно то, что наука должна стремиться к описанию действительно наблюдаемого. Но сам Шредингер правильно говорит, что «вопросом является лишь то, должны ли мы будем отныне связывать это описание с какой-либо ясной гипотезой о том, как в действительности устроен мир. Многие хотят уже сегодня заявить об отказе от этого. Но мне кажется, что тем самым мы несколько уклоняемся от трудностей»².

Итак, мы видим, что у Шредингера оптико-механическая аналогия выступает как метод, при помощи которого он хочет раскрыть физический смысл установленных им соотношений и введенных величин. Но метод Гамильтона применяется у Шредингера уже не как орудие для математического выражения определенных физических представлений о процессах, а как такая математическая форма физического закона, которая дает возможность путем отыскания аналогичных ей форм, отличающихся вводимыми экспериментом данными, продвинуться глубже в познании вещей. И хотя цепь математической дедукции и разрывается введением экспериментальных постоянных и величин, характеризующих специфику изучаемых процессов, но основная тенденция заключается в том, что от формы уже известного физического закона Шредингер стремится перейти к форме еще неизвестного закона. Если в XIX в. от аналогии форм явлений шли к отождествлению их сущностей, то теперь, несмотря на видимое отсутствие аналогий в форме атомных и макроскопических явлений, Шредингер стремится установить сходство механизмов этих явлений путем аналогии, исходящей из рассмотрения формы физического закона.

¹ Schrödinger E., *Quantisierung als Eigenwertproblem...*, стр. 509.

² Шредингер Э., *Сб. Современная квантовая механика...*, стр. 59.

Развитие от аналогии по форме физических процессов к аналогии по форме математических законов, осуществляющейся путем изменения функциональных соотношений, позволяющих охватить экспериментальные данные, обогащает наше познание, дает возможность раскрыть тайны микрокосма. Но это же развитие создает условия для развертывания формалистически-идеалистических концепций. В этом развитии «формы отражения природы в познании человека» (Ленин) находит подтверждение мысль В. И. Ленина о том, что «...тут (в процессе познания. — Л. П.) действительно, объективно три члена: 1) природа; 2) познание человека, = мозг человека (как высший продукт той же природы) и 3) форма отражения природы в познании человека, эта форма и есть понятия, законы, категории etc. Человек не может охватить = отразить = отобразить природы *всей*, полностью, ее „непосредственной цельности“, он может лишь *вечно* приближаться к этому, создавая абстракции, понятия, законы, научную картину мира и т. д. и т. п.»¹.

Заметим в заключение, что вопрос о том, какие уравнения соответствуют в квантовой механике классическим каноническим уравнениям макроскопической динамики, был решен в 1928 г. Гейзенбергом, Борном и Иорданом. Они показали, что гамильтоновы уравнения остаются действительными в квантовой механике при условии, что символы q , p , H , входящие в них, рассматриваются уже как операторы, произведения которых некоммутативны, т. е. что удовлетворяется условие

$$pq - qp = -\frac{\hbar}{i}. \quad (99)$$

Это открытие, которое может быть распространено на систему с любым числом степеней свободы, дает метод решения квантово-механических задач, альтернативный и эквивалентный методу волновой функции².

Как уже было отмечено, одновременно с волновой механикой Шредингера развивалась матричная механика Гейзенберга—Борна—Иордана. И в той и другой применяется координатный метод сопоставления физическим состояниям упорядоченных систем чисел. Этот метод приводит либо к волновой механике, где на первый план выдвигается состояние системы, либо к матричной³ — где основную роль играют динамические переменные. В этих формах исторически и возникла квантовая механика.

В формировании квантовой механики Гейзенберга—Борна—Иордана вариационные принципы не сыграли существенной роли.

¹ Ленинский сборник, IX, 1931, стр. 185.

² Whittaker E., From Euclid to Eddington, a study of conceptions of the external World., Cambridge, 1949.

³ О математическом аппарате квантовой механики см. Neumann I., Mathematical foundations of quantum mechanics, translated by R. T. Beyer., Princeton, 1955.

В своей исходной работе 1925 г., которая предшествовала работам Шредингера, Гейзенберг исходил из двух предпосылок: 1) необходимости включать в теорию только наблюдаемые величины, 2) необходимости строить теорию по аналогии с классической механикой. В последнем вопросе основная идея Гейзенберга такова: «Вместо имеющихся (квантовых. — Л. П.) правил нужно попытаться построить аналогичную классической механике квантовую



В. ГЕЙЗЕНБЕРГ (род. в 1901)

механику, в которой использовались бы соотношения лишь между наблюдаемыми величинами»¹. Это направление в том же 1925 г. развил Дирак².

Построение квантовой механики таким методом представляет, в сущности, применение того типа аналогии, о котором см. гл. IV, разд. 8. С этих работ и начинается развитие квантовой механики, синтезировавшей как матричную, так и волновую механику³.

¹ Heisenberg W., Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, Zschr. f. Phys. 33, № 12, 1925, стр. 880.

² Dirac P., The fundamental equations of quantum mechanics, Proceedings of the Royal Society, A, т. 109, 1925, стр. 642.

³ С историко-научной точки зрения интересно отметить, что Гейзенберг, по существу, использовал матричное исчисление, не зная этого, а Дирак использовал гильбертовы пространства, также не зная этого.

Синтез их был осуществлен в теории преобразований Дирака. Необходимо заметить, что аналогия между построением Гейзенберга и классической механикой настолько велика, что квантовая механика «может быть получена из классической простой заменой переменных классической механики некоммутирующими величинами»¹. В другой статье Дирак говорил: «Квантовая механика была построена на основе аналогии с гамильтоновой теорией классической механики. Это произошло потому, что классические понятия канонических координат и импульсов имеют непосредственный и простой квантовый аналог, в силу чего вся классическая гамильтонова теория, являющаяся системой, построенной на этих понятиях, может быть во всех ее деталях перенесена в квантовую механику»².

Что касается лагранжиана, то его, так же как и уравнения Лагранжа, трудно использовать при построении квантовой механики, так как нельзя непосредственно получить квантовомеханический аналог уравнений Лагранжа. Дело в том, что в них входят частные производные лагранжиана по координатам и скоростям, т. е. величины, которые не имеют ясного смысла в квантовой механике.

По мнению Дирака³ и Фейнмана⁴ лагранжиан в квантовой механике надо рассматривать скорее как функцию координат в момент времени t и координат в момент времени $t + dt$, чем как функцию координат и скоростей, аналогично классической механике. Впрочем, все попытки этих и других авторов использовать лагранжиан в квантовой механике не привели к сколько-нибудь интересным результатам⁵.

В квантовой механике собственно вариационный аспект принципа Гамильтона—Остроградского не играет существенной роли, зато фундаментальную роль играет аспект, физически воплощающий идею групп преобразования.

¹ Dirac P. A. M., On the analogy between classical and quantum mechanics, Rev. Mod. Phys., v. 17, № 2, 3, 1945, стр. 195.

² Dirac P. A. M., The lagrangian in quantum mechanics, Physik. Zs. der Sowjetunion, Bd. 3, H. 1, 1933, стр. 64.

³ Там же, ср. Дирак П. А. М., Основы квантовой механики. 2-е изд., ОНТИ, М.—Л., 1937, № 33, стр. 132.

⁴ Feynman R. P., Space-Time approach to non-relativistic quantum mechanics, Rev. Mod. Phys., v. 20, № 2, 1948, стр. 367.

⁵ Ср., впрочем, интересные замечания в статье: Heisenberg W. and Pauli W., Zur Quantendynamik der Wellenfelder, Zs. für Phys., Bd. 56, H. 1, 1936, стр. 1—61.

ГЛАВА VIII

ЗНАЧЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ В ПОСТРОЕНИИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ

1. Постановка задачи построения квантовой теории полей

При рассмотрении роли вариационных принципов в построении квантовой теории полей необходимо прежде всего подчеркнуть, что эта теория далеко не является завершенной, т. е. дающей внутренне непротиворечивое описание определенного круга физических явлений. Поэтому каждый эвристический метод, особенно если он оказался плодотворным в процессе предшествовавшего развития физики, должен быть использован с максимальной полнотой. Существенно при этом выяснить его происхождение и связи с другими методами, границы его применимости, определяемые трудностями, к которым он приводит и которые им не разрешаются. Именно с этой точки зрения рассмотрение вариационных принципов, и в первую очередь принципа Гамильтона, является безусловно актуальным.

Для того, чтобы рассмотреть роль вариационных принципов в современной трактовке проблемы квантованных полей напомним обычный путь построения уравнений релятивистской квантовой локальной теории поля¹. Рассмотрение различных представлений этой теории показывает, что релятивистская инвариантность наиболее отчетливо проявляется в так называемом гейзенберговском представлении (особенно в случае взаимодействующих полей). Поэтому мы и начнем с рассмотрения этого представления.

Прежде всего из операторов поля строится лагранжиан (плотность лагранжевой функции), удовлетворяющий нижеперечисленным требованиям.

¹ Более подробное представление о понятиях и величинах, с которыми оперирует квантовая теория полей, можно получить в книгах: Дирак П., Квантовая механика, ОНТИ, 1933; Венцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, ИЛ, М., 1947; Ахиезер и Берестецкий, Квантовая электродинамика, ГТТИ, М., 1957; Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. И., Введение в теорию квантованных полей, ГТТИ, М., 1957; Умэдзава Х., Квантовая теория поля, ИЛ, 1958, а также в цитируемой далее литературе.

1) *Различные условия инвариантности*¹. Эти условия можно с известным правом разделить на две группы. Первая группа включает в себе, так сказать, «классические» условия инвариантности, определяемые однородностью и изотропией пространства-времени² (см. стр. 333). Другая группа, на которой мы остановимся относительно более подробно, не имеет столь наглядного геометрического



П. ДИРАК (род. в 1902)

смысла. Прежде всего это — калибровочная инвариантность, заключающаяся в одновременном преобразовании:

$$\left. \begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu}, \\ \psi &\rightarrow \psi e^{ie\Lambda} \\ \psi^* &\rightarrow \psi^* e^{-ie'\Lambda} \\ \square \Lambda &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

¹ См. также стр. гл. 4, разд. 2.

² Следует указать, что в связи с произволом в фазе волновой функции в квантовой теории появляются дополнительные законы сохранения (например, четности), хотя и следующие из свойств изотропии пространства, но не имеющие классических аналогов.

где $\square = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, а e — электрический заряд, сопоставляемый элементарным частицам¹. Это преобразование соответствует закону сохранения электрического заряда

$$Q = \int_V j_\mu(x) d^3x = \int_S j_\mu(x) d\sigma_\mu(x), \quad (2)$$

где $j_\mu(x)$ — составленный по определенному правилу четырех-вектор тока, удовлетворяющий уравнению сохранения

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0 \quad (3)$$

и вектор $d\sigma_\mu(dx_1 dx_2 dx_3, dx_1 dx_2 dx_4, dx_1 dx_3 dx_4, dx_2 dx_3 dx_4, id x_1 dx_2 dx_3)$ является нормалью к пространственно-подобной поверхности. При частном выборе $x_4 = \text{const}$ получается первое из двух приведенных равенств соотношения (2). Кроме электрического заряда существуют различные другие «заряды», связанные с внутренними степенями свободы, как, например, барионный заряд, гиперзаряд, лептонный заряд, так называемый изотопический спин, странность и т. д.².

Способ установления условий инвариантности лагранжиана, соответствующий сохранению указанных величин и представляющий поучительную иллюстрацию применения вариационных принципов, будет рассмотрен ниже. Заметим сразу, что увеличение числа законов сохранения (условий инвариантности) по сравнению с классической теорией связано в значительной мере с тем, что квантовая теория полей, в отличие от классической, оперирует с комплексными величинами. В этом отношении наибольшее значение имеет тот факт, характеризующий фундаментальное отличие квантовой теории от классической, что в квантовой теории определяется не сама вероятность, а ее амплитуда.

2) *Условие локальности*. Это условие состоит в том, что все операторы поля, входящие в лагранжиан, берутся в одной точке, иначе говоря, в лагранжиан не входят какие-либо интегральные выражения или же производные бесконечно большого порядка. Существенно отметить, что гамильтонов формализм может быть непосредственно использован только при построении локальных теорий поля, в которых будущее является непрерывным следствием прошедшего. В то же время лагранжиан, не удовлетворяющий условию локальности, содержит члены вида

$$\int A(x) B(x') f(x - x') dx^4, \quad (4)$$

¹ Можно построить квантовую теорию поля с помощью частиц конечной массы, которые переносят заряд, энергию и импульс поля. В отсутствие взаимодействия не только заряд, но и число частиц поля является интегралом движения.

² О смысле указанных зарядов см. M. Gell-Mann, Nuovo Cimento, Suppl. 2, 848 (1956); Гелл-Манн М., Розенбаум Е., УФН, т. 64, вып. 2, 1958.

где $A(x)$ и $B(x)$ — два каких-либо оператора поля, а $f(x-x')$ — некоторая, содержащая несингулярные части, релятивистски инвариантная функция¹ 4-интервала $(x_\mu - x'_\mu)$ ¹.

Вследствие присутствия в нелокальной теории в лагранжиане членов вида (4) операторы поля в точке x очевидно зависят также от событий в точке x' , отделенной от x пространственно-подобным интервалом; тем самым нарушается, вообще говоря, заключенный в гамильтоновом формализме принцип причинности. Заметим, что одним из возможных путей преодоления трудностей квантовой теории поля может оказаться последовательная нелокальная теория, попытки построения которой, исторически восходящие еще к классическому представлению об электроны-шарике Лоренца, неоднократно предпринимались в последнее время². Однако, как указал, в частности, Фирц³, допущение беспричинности в микромасштабах, с которым внутренне связаны нелокальные теории, при сохранении релятивистских представлений неизбежно приводит к макробеспричинности, что недопустимо.

Заметим также, что в ряде случаев нелокальные теории могут быть сведены к локальным путем введения добавочного поля. Хорошим примером является случай электродинамики, когда вместо электромагнитного поля можно было бы рассматривать прямое нелокальное взаимодействие, или, иначе, дальное действие элементарных зарядов.

Известно, что уже классическую электродинамику можно рассматривать двумя эквивалентными способами, которые взаимно дополняют друг друга. Одним из них является описание поля с помощью уравнений Максвелла, другим — описание прямого, запаздывающего во времени взаимодействия на расстоянии между зарядами (метод Льенарда—Вихерта). Однако гамильтонов метод мало пригоден для описания непосредственного действия зарядов друг на друга на расстоянии, так как это действие является запаздывающим. В методе Гамильтона будущее является необходимым следствием настоящего, т. е. если известна некоторая совокупность величин в какой-либо момент времени, то значение их в любой последующий момент времени однозначно определено. Однако при запаздывающем взаимодействии надо знать не только состояние системы в данный момент, но и движение системы в прошлом, поскольку оно может оказать влияние на движение системы в

¹ Для необходимого сохранения приближенной локальности при расстояниях, больших по сравнению с некоторым интервалом Λ (минимальной длиной), неизбежно вводимым, нелокальной теорией, нужно, чтобы $f(x-x') \rightarrow \delta(x-x')$ при $(x-x')^2 \rightarrow \infty$.

² См. А. Соколов и Д. Иваненко, Квантовая теория полей, Москва, ГТТИ, 1952.

³ Fierz M., *Helv. Phys. Acta.* 23, 731 (1950); См. перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики», М., ИЛ, 1954.

будущем. В гамильтоновой электродинамике это достигается тем, что кроме состояния системы в настоящее время задается совокупность новых переменных (координат осцилляторов поля), которые, по выражению Фейнмана, «сохраняют память» о прежнем движении данной системы. Использование гамильтониана с необходимостью приводит, таким образом, к замене представления о непосредственном взаимодействии полевой точкой зрения.

3) *Условие эрмитовости¹ лагранжиана* в данной связи играющее существенную роль, так как только эрмитовые операторы имеют вещественный спектр собственных значений, которые можно сопоставить измеряемым величинам. Дело в том, что введение дополнительных полей, устраняющих трудности современной теории, неизбежно связано с нарушением условия эрмитовости или же, что эквивалентно, с необходимостью отрицательных вероятностей², истолкование которых представляет значительные трудности.

Отметим, что в последней теории Гейзенберга состояниям с отрицательной нормой (так называемым «призрачным состояниям») придается определенный реальный смысл и накладываются дополнительные условия типа законов сохранения заряда, исключающие переход из состояний с положительной нормой в призрачные состояния, или обратно³.

4) *Условие неведения высших производных.* Теория с высшими производными также не может быть сформулирована гамильтоновым способом. Однако с помощью метода циклических переменных (см. гл. III, разд. 8) или других аналогичных методов⁴ теории этого типа могут быть приведены к гамильтонову виду.

5) *Условие неведения в лагранжиан нелинейных членов,* принимаемое в большинстве случаев. По поводу этого условия следует указать, что даже при линейном и не содержащем высших производных операторном лагранжиане уравнения для амплитуд взаимодействующих полей, через которые непосредственно выражаются изме-

¹ Пусть на классе функций $y = y(x)$ определен линейный оператор $A(x)$. Оператор Ay называется самосопряженным или эрмитовым, если при любых функциях $y(x)$ и $z(x)$ нашего класса

$$\int_a^b (Ay)z \, dx = \int_a^b (Az)y \, dx.$$

Эрмитовы операторы обладают действительными собственными значениями. Заметим, что, например, оператор Штурма—Лиувилля

$$A(y) = Py - \frac{d}{dx}(Ry')$$

— линейный самосопряженный оператор.

² Heisenberg W., Rev. Mod. Phys., № 3, (1957).

³ См. также доклад Н. Н. Боголюбова на конференции по физике высоких энергий в Женеве в 1958 г.

⁴ Иваненко Д. и Григорьев В., ЖЭТФ, 21, № 4, 563 (1951).

римые величины (вероятности перехода, уровни энергии и т. п.), содержат в себе высшие производные и нелинейные члены (так называемая индуцированная нелинейность; см. цитированную книгу А. Соколова и Д. Иваненко).

Заметим, что в последние годы ряд авторов усиленно пытается разработать нелинейную квантовую теорию спинорного поля, рассматривая ее как «единую теорию материи»¹. Эти попытки являются развитием более ранних работ в этом направлении, выполненных еще в классической теории (см. гл. VI, разд. 2). Одна из основных задач, которую ставят перед собой авторы нового варианта нелинейной теории, состоит в получении экспериментального спектра масс элементарных частиц. Полученные результаты вызывают существенные возражения и носят сугубо предварительный характер².

Указанными выше условиями и заданием геометрических свойств полей лагранжиан определяется однозначно, с точностью до масштабных коэффициентов (квазизарядов). Под геометрическими свойствами следует разуметь классификацию по однозначным и двузначным представлениям группы Лоренца³. Как показали экспериментальные данные, реальные поля описываются спинорами⁴ (нейтрино, электроны, μ -мезоны, нуклоны, Λ , Σ и Ξ — частицы), скалярами и псевдоскалярами (π - и K -мезоны) векторами и псевдовекторами (электромагнитное поле) тензорами (гравитационное поле).

2. Лагранжиан, физические величины и перестановочные соотношения

Раньше, чем перейти к методам дальнейшего построения теории, остановимся еще на вопросе определения различных условий инвариантности. Исторически в большинстве случаев следовали по такому пути. Экспериментально определялись из опытов по распаду частиц, рассеянию и т. п. некоторые сохраняющиеся величины. По теореме Нетер (см. стр. 322) этим величинам с математической

¹ См. сборник «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, М., 1959.

² См. выступление В. Паули на конференции по физике высоких энергий в Женеве в 1958 г.

³ Картан Э., «Теория спиноров», ИЛ, М., 1947 и указанные курсы квантовой теории полей.

⁴ Творцом общей теории спиноров n -мерных пространств является Э. Картан; основы этой теории он опубликовал в 1913 г., в замечательном исследовании по теории представлений простых групп. В 1928 г. спиноры были перестановочны Ван-дер-Варденом (Gött. Nachr., 100, 1929) в связи с исследованиями Дирака по релятивистскому уравнению электрона. Это хороший пример как для сочетания развития наук (в данном случае физики и математики), так и для неуявляющегося даже в XX в. вопроса о переоткрытии уже открытых результатов, исходя из иных предпосылок и иной постановки задачи. (Cartan E., Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. de France, т. 41, 1913, стр. 53—96, а также: Картан Э., Теория спиноров, ИЛ, М. 1947.)

необходимостью должна соответствовать инвариантность лагранжиана относительно некоторого преобразования. Именно таким образом были найдены условия инвариантности, входящие во вторую группу пункта первого (см. стр. 574—575). Отметим, что, как выяснено в последнее время, инвариантность по отношению к последним преобразованиям, а также по отношению к инверсиям выполняется, за исключением закона сохранения электрического и барионного зарядов, не строго, а только в «сильных взаимодействиях»¹. Что же касается остальных видов взаимодействия, то в них выполняется более слабое условие инвариантности по отношению к произведению преобразований инверсии и некоторой перестановки частиц с античастицами.

Укажем, наконец, на возможность непосредственной экспериментальной проверки принципа причинности с помощью так называемых дисперсионных соотношений, связывающих эрмитовую и антиэрмитовую части амплитуды рассеяния. Соответствующие опыты были выполнены рядом авторов для случая рассеяния π -мезонов на нуклонах (см. сб. «Проблемы современной физики, Дисперсионные соотношения», ИЛ, 1957 г. и книгу²). Эти опыты с весьма высокой степенью точности подтвердили причинность, а следовательно, и гамильтоновость теории.

После подбора лагранжиана уравнения для операторов поля получаются обычным образом, так же как уравнения Эйлера—Лагранжа вариационной задачи. Существенной особенностью, связанной с характером использования лагранжиана в квантовой теории, является установление с его помощью канонических величин, которыми определяется конкретный вид перестановочных соотношений³. Именно, величиной, канонически сопряженной с полем φ_a (обобщенным импульсом), называется величина

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a}, \quad (5)$$

¹ Сильными (а иногда также средними) взаимодействиями, в отличие от слабого фермиевского взаимодействия, называют основные взаимодействия (ядерные, электромагнитные), характеризующиеся большими константами связи, т. е. высокой интенсивностью.

² «Дисперсионные соотношения следуют из основных положений современной квантовой теории поля, причем для их вывода является существенным наличие условия макроскопической причинности» (Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, ГТТИ, М., 1957, стр. 379). Более поздние результаты см. обзор Д. В. Ширкова (Труды Киевск. конф. по физике высоких энергий в 1959 г.).

³ Обычным каноническим перестановочным соотношениям, которые не обладают ковариантностью, так как они относятся к переменным поля, взятым в одно и то же время, но в различных точках пространства, может быть придан ковариантный вид посредством замены четырехмерной поверхности $t = \text{const}$ некоторой пространство-подобной поверхностью, которая отличается тем свойством, что никакие две ее точки не могут быть связаны световым сигналом. Так строится изложение квантовой электродинамики в представлении Гейзенберга.

которая по аналогии с квантовой механикой удовлетворяет трехмерным перестановочным соотношениям вида

$$[\varphi_\alpha(\bar{x}, x_\lambda), \pi_\beta(\bar{x}', x_\lambda)]_\pm = i \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x'). \quad (6)$$

Однако указанная аналогия не является полной, так как, в отличие от квантовой механики, здесь возможна не только коммутация, имеющая место для бозонов, но и антикоммутация для фермионов. Согласно важной теореме о связи спина и статистики, наиболее строгое доказательство которой содержится в работе Швингера¹, антикоммутация имеет место для частиц с полуцелым спином, а коммутация для частиц с целочисленным спином. При доказательстве упомянутой теоремы существенно используются свойства инвариантности лагранжиана.

Построенные указанным выше способом уравнения для операторов поля, истолковываемых как операторы уничтожения и порождения частиц, вместе с перестановочными соотношениями (6) и полным набором не зависящих от времени в гейзенберговском представлении векторов состояния (волновых функций), и в том числе состояния наименьшей энергии-вакуума, в принципе позволяют однозначно решить все задачи квантовой теории поля, сводящиеся к определению матричных элементов операторов.

Из лагранжиана непосредственно выводятся операторы всех физических величин: энергии-импульса, 4-вектора тока и т. д. Один из способов построения тензора плотности энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ совпадает с соответствующим способом классической механики. Существенно иной способ, предложенный Белинфанте², состоит в общерелятивистски-ковариантной записи лагранжиана и вариации его по $g_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta \int L(x) \sqrt{-g} dx}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (7)$$

с последующим приравнованием $g_{\mu\nu}$ галилеевским значениям. При этом тензор $T_{\mu\nu}$ автоматически получается симметричным, в то время как при первом способе необходима дополнительная симметризация, соответствующая учету собственного момента количества движения (спина). Вектор тока также получается из лагранжиана варьированием³. В качестве примера приведем лагранжиан наиболее подробно разработанного случая связанных электромагнитного и электронно-позитронного полей, где L задается в виде

$$L = -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \left[\bar{\gamma}_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) - ie A_\mu(x) + m \right] \psi(x) - \\ - \frac{1}{2} \bar{\psi}'(x) \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) + ie A_\mu(x) + m \right] \psi'(x). \quad (8)$$

¹ Schwinger I., *Proceed. Nat. Acad. of Sciences* **44**, № 2 (223), (1958) (см. также сборник «Проблемы современной физики» № 6, ИЛ, 1958).

² Belinfante F. I., *Physica*, **13**, 887 (1939).

³ Паули В., *Релятивистская теория элементарных частиц*, ИЛ, М., 1947.

Здесь $A_\mu(x) = (A(r, t), i\varphi(r, t))$ — четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля, γ_μ — так называемые матрицы Дирака¹, факторизирующие метрику, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4 = \gamma_4^T \psi^\dagger$ ($\psi^\dagger$ спинор эрмитовосопряженный с ψ ; $\bar{\psi}$ — спинор, сопряженный с ψ), $\psi' = c\bar{\psi}$, $\bar{\psi}' = c^{-1}\psi$ спиноры, зарядовосопряженные с ψ и $\bar{\psi}$ соответственно, c — унитарная, кососимметричная матрица², для которой

$$c \gamma_\mu^T = -\gamma_\mu c.$$

Заметим, что зарядовое сопряжение является определенным обобщением комплексного сопряжения; необходимость подобного обобщения связана с мнимостью части матриц γ_μ в конкретных представлениях и особенностями преобразования лагранжиана (8) при отражении времени.

Приведенный лагранжиан можно разбить на части следующим характерным образом:

$$L = L_0(A_\mu) + L_0(\psi) + L_{\text{int}}, \quad (9)$$

где $L_0(A_\mu)$ и $L_0(\psi)$ лагранжианы свободных полей и $L_{\text{int}} = A_\mu(x)j_\mu(x)$ — лагранжиан взаимодействия электромагнитного и спинорного (электронно-позитронного) полей. Уместно здесь заметить, что, в отличие от квантовой механики, лагранжиан взаимодействия может давать отличный от нуля вклад в средние значения даже при отсутствии реальных частиц какого-либо вида. Из выражения (8) тем же способом, что и в классической теории, получаются уравнения движения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta \int L(x) d^3x}{\delta \psi(x)} &\equiv \left[\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie A_\mu \right) + m \right] \psi = 0, \\ \frac{\delta \int L(x) d^3x}{\delta \psi'(x)} &\equiv \left[\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + ie A_\mu \right) + m \right] \psi' = 0, \\ \frac{\delta \int L(x) d^3x}{\delta A_\mu(x)} &\equiv \square A_\mu - j_\mu(x) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где симметризованный по электронам и позитронам ток равен

$$j_\mu(x) = ie[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi - \bar{\psi}'\gamma_\mu\psi']. \quad (11)$$

¹ См. цитированную книгу Э. Картана и цитированные выше курсы квантовой теории поля.

² Матрица A^* называется эрмитовосопряженной с A , если она получается из A заменой строк столбцами и всех элементов комплексно сопряженными им величинами. Матрица называется эрмитовой или самосопряженной, если она равна своей эрмитовосопряженной матрице. Матрица называется унитарной, если эрмитовосопряженная с ней матрица равна обратной: $A^* = A^{-1}$.

Трехмерные канонические перестановочные соотношения имеют при этом вид¹

$$\left. \begin{aligned} [\psi_a^*(\bar{x}, x_a), \psi_b(\bar{x}', x_a)]_+ &= \delta_{ab} \delta(\bar{x} - \bar{x}'), \\ \left[\frac{\partial A_\mu(\bar{x}, x)}{\partial x^a}, A_\nu(\bar{x}', x_a) \right] &= \delta_{\mu\nu} \delta(\bar{x} - \bar{x}'). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3. Конкретное решение задач в гейзенберговском представлении

Наметим теперь пути конкретного решения задач квантовой теории поля в гейзенберговском представлении, соответствующем лагранжеву формализму классической механики Гамильтона—Якоби. Для определения вероятностей переходов и уровней энергии необходимо от уравнений вида (10) для операторов перейти к уравнениями для амплитуд и, в частности, для элементов S -матрицы. Это делается следующими способами.

Прежде всего следует указать на метод Янга и Фельдмана². Поскольку, по аналогии с классическими задачами в квантовой теории рассеяния³ принимается, что на бесконечности рассеиваемые частицы не взаимодействуют друг с другом⁴, операторы поля на $\pm \infty$ подчиняются одним и тем же перестановочным соотношениям свободных полей. Следовательно, эти операторы унитарно-эквивалентны. Унитарный оператор, осуществляющий переход от значений различных операторов на $-\infty$ к соответствующим значениям на $+\infty$, называется S -матрицей и был введен впервые Гейзенбергом⁵. Матричные элементы этого оператора, взятые между функциями в гильбертовом пространстве числа частиц, определяют амплитуды вероятности различных процессов рассеяния. Фактически точное вычисление указанных амплитуд в гейзенберговском представлении встречает значительные трудности, не преодоленные полностью

¹ С помощью пространству-подобных гиперповерхностей в пространстве Минковского перестановочные соотношения записываются в явно релятивистском виде

$$\int_s [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu, \psi_\beta(x')]_+ d\sigma'_\mu = \delta_{\alpha\beta}; \quad \int_s \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^a}, A_\nu(x') \right] d\sigma'_a = \delta_{\mu\nu},$$

причем гиперповерхности s проходят через точку x . При частном выборе гиперповерхностей $x_a = \text{const}$ мы возвращаемся к тройным интегралам от (12).

² Yang C., Feldman D., Phys. Rev. **79**, 972 (1950).

³ Квантовая теория рассеяния рассматривает взаимодействие частиц, разделенных в начальный момент достаточно большим расстоянием, т. е. не взаимодействовавших.

⁴ Следует указать, что проблема о «выключении взаимодействия» в квантовой теории поля значительно усложняется по сравнению с соответствующим вопросом в классической теории рассеяния в конечном счете из-за невозможности пренебречь взаимодействием с нулевыми колебаниями полей — вакуумом.

⁵ Heisenberg W., Zs. f. Phys. **120**, 513, 673 (1943), Zs. f. Naturforsch **1**, 608 (1946).

до настоящего времени, так как при этом вычислении получается бесконечная система зацепляющихся уравнений.

Указанная система уравнений может быть записана различными способами, представляющими преимущества в тех или иных математических или физических отношениях.

Исторически первым методом подобной записи явился развитый в 1934 г. метод функционалов советского ученого В. А. Фока¹, который во многих отношениях предвосхитил так называемый метод Тамма—Данкова¹, предложенный последними независимо соответственно в 1945 и в 1950 годах. Сущность метода решения бесконечной системы зацепляющихся уравнений Тамма—Данкова состоит в том, что отбрасываются амплитуды, соответствующие наличию числа частиц, большего некоторого конечного значения; после выполнения этой операции бесконечная система приводится к конечной. Однако несмотря на релятивистскую инвариантность исходных уравнений, система уравнений, получающаяся после такого отбрасывания (обрезания), теряет релятивистский характер, что не позволяет произвести так называемую перенормировку (см. ниже), необходимую для получения конечных результатов в современной теории, содержащей расходящиеся. Этот недостаток метода Тамма—Данкова в значительной мере преодолен в (1955—1959 гг.) в работах американского ученого Ло², продолженных и обобщенных Мандельштамом³. Соответствующие уравнения имеют ту принципиальную особенность, что они носят релятивистский характер и поддаются перенормировке до отбрасывания амплитуд с высшим числом частиц, во многом аналогичной той же операции в методе Тамма—Данкова. Следует указать еще одну важную особенность уравнений Ло: они явным образом связаны с дисперсионными соотношениями, выражающими причинность и, тем самым, гамильтоновым характером современной теории (см. выше). С помощью подобных уравнений типа Ло в последние годы достигнуты определенные успехи в понимании целой области мезонно-ядерных явлений, так называемой мезодинамики при не слишком больших энергиях.

Замкнутая запись бесконечной системы зацепляющихся уравнений возможна с применением аппарата так называемых функциональных производных. Подобная запись уравнений, представляющая значительные преимущества для общего анализа, была предложена Швингером в 1951 г.³

Отметим, что в другой работе 1951 г. Швингер так определяет задачу своего исследования: «развиваемая нами в дальнейшем точка зрения заключается в замене ряда обычных допущений, осно-

¹ О методе Тамма—Данкова см. сборник «Проблемы современной физики, Метод Тамма—Данкова», Москва, ИЛ, 1956.

² Law F. E., Phys. Rev. **97**, 1392 (1955); Chew G. E., Law F. E., Phys. Rev. **101**, 1570, 1579 (1956); Mandelstam S., Phys. Rev. **112**, 1959, стр. 1344.

³ Schwinger J., Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 452 (1951).

ванных на классической гамильтоновой динамике и принципе соответствия, одним-единственным динамическим принципом»¹.

Между методами интегрирования задач, решаемых на основе волновой и классической механики, существует полный параллелизм. Если уравнение Шредингера некоторой задачи может быть решено методом разделения переменных в некоторых определенных координатах, то и уравнение Гамильтона—Якоби той же задачи также допускает разделение переменных в тех же координатах. Если уравнение Шредингера приводит к двучленной рекуррентной формуле и собственные значения могут быть вычислены по методу полиномов, то соответствующее уравнение Гамильтона—Якоби интегрируется в элементарных функциях. Если же уравнение Гамильтона интегрируется в эллиптических функциях, то соответствующее уравнение Шредингера приводит к трехчленной рекуррентной формуле, и в этом случае вычисление собственных значений ведется по способу непрерывных дробей.

Метод, во многих отношениях близкий к методу функциональных производных Швингера, был несколько ранее разработан Фейнманом². Важной чертой этого метода Фейнмана является установление прямой связи с интегралами по фазовым траекториям, что во многом аналогично построению схемы классической динамики.

Характерным для квантовой теории является то, что вся схема строится для амплитуды вероятности. Существенной особенностью упомянутых методов Фейнмана и Швингера является использование матричных элементов от операторов, упорядоченных по времени от прошлого к настоящему, что внутренне связано с локальностью и причинностью теории. Эти матричные элементы сопоставляются обобщенным причинным функциям Грина³. Заметим, что многие произведенные до настоящего времени, попытки решения уравнений в функциональных производных не привели к положительным результатам, что связано как с математическими трудностями, так и с внутренней неполнотой современной теории.

4. Шредингеровское представление и представление взаимодействия

Перейдем к рассмотрению так называемого шредингеровского представления в квантовой теории поля, являющегося наиболее полным аналогом классической гамильтоновой схемы. Исторически это представление, оказавшееся особенно плодотворным в нерелятивистской квантовой механике, наиболее широко и почти

¹ Новейшее развитие квантовой электродинамики, Сб. статей, М., ИЛ, 1954, стр. 116.

² См. Сборник «Проблемы современной физики, Теория поля», ИЛ, 1955.

³ Причинные функции одновременно с Фейнманом были введены также в работах Штюкельберга.

безраздельно использовалось в квантовой теории поля в первые периоды ее развития, начиная с первых работ в 1927 г. до примерно 1947—1949 гг., когда появились статьи Томанага, Фейнмана и Швингера¹. К шредингеровскому представлению можно перейти от гейзенберговского следующим образом. Согласно определению плотности оператора Гамильтона H как оператора сдвига по времени, из операторов в гейзенберговском представлении можно выделить зависимость от времени следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A_{\mu}(x_{\mu}) &= e^{iHt} A_{\mu}(\bar{x}_{\nu}, 0) e^{-iHt}, \\ \psi(x_{\mu}) &= e^{iHt} \psi(\bar{x}_{\nu}, 0) e^{-iHt} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и т. д.

Произведем теперь каноническое преобразование с помощью гамильтониана H , рассматриваемого в качестве производящей функции. Тогда новые операторы поля уже не будут зависеть от времени, а новая функция состояния Φ , получающаяся из гейзенберговской, будет равняться

$$\Phi = e^{-iHt} \psi \quad (14)$$

и подчиняться уравнению

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H \Phi, \quad (15)$$

называемому уравнением Шредингера.

Заметим, между прочим, что приведенные рассуждения показывают эквивалентность лагранжево — гейзенберговского и гамильтоново — шредингеровского формализмов. Наиболее существенным отличием шредингеровского представления является отчетливое разделение динамического и кинематического аспектов задачи. Это, в частности, объясняет успех шредингеровского представления в нерелятивистской теории и его затруднения в релятивистском случае, где подобное разделение встречается с принципиальными трудностями. Укажем здесь, что уравнение (15) легко допускает приближенное решение методом последовательных приближений, вполне аналогичным соответствующим методам небесной механики.

В известном смысле промежуточное место между шредингеровским и гейзенберговским представлениями занимает так называемое представление взаимодействия, бывшее наиболее популярным в 1947—1950 гг. Это представление в электродинамике и основном варианте мезодинамики без производных получается из гейзенберговского так же, как шредингеровское, каноническим преобразованием с тем лишь отличием, что в качестве функции преобразования берется не весь гамильтониан, а только член, описывающий взаимодействие полей H_{int} .

¹ См. статьи указанных авторов в сборнике переводов «Новейшее развитие квантовой электродинамики», М., ИЛ, 1954.

Уравнение Шредингера имеет в этом случае вид (15) с заменой полного гамильтониана системы H на H_{int} , а операторы поля зависят от времени как операторы свободных полей. В представлении взаимодействия была исторически впервые последовательно проведена программа перенормировки бесконечностей¹ в квантовой электродинамике.

5. Заключительные замечания

В предшествующем изложении нами специально не подчеркивалось следующее важное обстоятельство. Все рассмотренные формулировки квантовой теории, каждая из которых имеет, как уже отмечалось, классический аналог², не дают внутренне непротиворечивого решения проблем теории. Прямое вычисление большинства физических эффектов квантовой теории поля, в особенности в высших приближениях теории возмущений, приводит к расходящимся интегралам, что является выражением наличия существенных дефектов в современной теории. Указанная трудность, собственно говоря, не преодолевается, а только обходится с помощью программы перенормировок, основная идея которой состоит во включении расходимостей в наблюдаемые экспериментальные параметры (массы, заряды и т. п.) и выделении конечных эффектов (см. цитированную работу Дайсона).

В заключение отметим, что, как видно из предыдущего изложения, в основе современных вариантов квантовой теории поля лежит явная предпосылка о применимости принципа Гамильтона к данной области физических явлений. Важной очередной задачей является поэтому выяснение роли принципа Гамильтона в преодолении трудностей квантовой теории поля и в ее дальнейшем развитии.

Фундаментальное значение этого вопроса тем более велико, что этот принцип и связанный с ним гамильтонов и лагранжев формализм до настоящего времени являются одним из наиболее универсальных выражений обобщенного принципа причинности в физике.

¹ Dyson F. S., Phys. Rev. **75**, № 11, 1736 (1949).

² Заметим, что классическая теория точно так же может быть последовательно построена с помощью тех или иных формализмов квантовой теории полей.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамар Ж. (Hadamard J. S.) 260
 Александров П. С. 324, 326
 Амальди (Amaldi) 90
 Ампер А. (Ampère A.) 118
 Аппель П. (Appel P. E.) 189, 260, 261, 263, 264, 265, 266
 Араго Д. (Arago D. F.) 38, 76, 81, 118, 196
 Аржаных И. С. 536
 Архимед 302
 Ахизер Н. И. 14
- Берген Н. (Béguelin N.) 26
 Бейтмен (Bateman) 344
 Белинфанте (Belinfante) 581
 Бельтрами Е. (Beltrami E.) 137, 181, 272, 306, 312
 Бергман Г. (Bergmann H.) 495
 Берестецкий 573
 Беркли Д. (Berkeley G.) 107
 Бернулли Д. (Bernoulli D.) 34
 Бернулли И. (Bernoulli I.) 13, 21, 24, 26, 44
 Бернулли Я. (Bernoulli J.) 13, 16, 36, 40
 Бертран Ж. (Bertrand J. L. F.) 242, 280, 281
 Бессель-Хаген Э. (Bessel-Hagen E.) 329
 Бобылев Д. К. 62, 230, 249, 311
 Боголюбов Н. Н. 327, 335, 574, 578, 580
 Больца О. (Bolza O.) 59, 179
 Больцман Л. (Boltzmann L.) 222, 226, 262, 371, 393, 401, 411, 413
 Бонфиоли (Bonfioli) 35
 Бор Н. (Bohr N.) 183, 275, 277, 506, 513, 527, 528, 538, 545, 552, 564, 565
 Борн М. (Born M.) 316, 471, 479, 490, 491, 493, 550
 Боссе А. (Bosset A.) 282
 Бошкович Р. (Boscovich R. J.) 64, 108
 Брасин Ф. (Brassine F.) 280
 Брашман Н. Д. 205, 232, 238
 Бриллюэн Л. (Brillouin L. V.) 562
 Бриоски Ф. (Brioschi F.) 281
- Бройль Л. (Broglie L. de) 350, 582, 545, 560
 Брунс Г. (Bruns E. H.) 137, 138
 Брэлл Г. (Brell H.) 266
 Буняковский В. Я. 102, 103
 Бур Ж. (Bour J. E. E.) 281
 Бэкон Ф. (Bacon F.) 111
 Бургерс И. (Burgers J. M.) 277, 524
 Бюффон 56, 57
- Вавилов С. И. 113
 Вагнер В. В. 313
 Валле-Пуссен Ш. Ж. (Vallé-Poussin Ch.) 299
 Ван-дер-Варден (Van-der-Varden) 324, 326, 579
 Васильев С. Ф. 431
 Вейлер И. (Weiler J. A.) 210
 Вейль Г. (Weyl C. H. H.) 324, 325, 497, 503, 504
 Венцель Г. (Wentzel G.) 562, 574
 Винтнер А. (Wintner A.) 172
 Вихерт 576
 Вольтер (Voltaire F. M.) 31, 33, 56
 Вольф Х. (Wolff C.) 25, 34
 Воронеж П. В. 259, 260, 262, 263
 Вранчану Г. (Vranceanu G.) 312, 313
- Галилей Г. (Galilei G.) 9, 11, 12, 17, 55, 302, 341, 362, 483, 496
 Галлер 56
 Гамель Г. (Hamel G.) 179, 262, 272, 361, 362
 Гамильтон У. Р. (Hamilton W. R.) 57, 58, 78, 84, 91, 98, 116, 149, 179, 214, 240, 260, 254, 275, 291, 307, 310, 311, 337, 347, 364, 370, 380, 390, 392, 396, 421, 435, 439, 452, 457, 474, 477, 487, 488, 498, 503, 505, 529, 551, 557, 583
 Гаусс К. (Gauss K. F.) 72, 79, 261, 265, 295, 356
 Гейзенберг В. (Heisenberg W. L.) 131, 169, 367, 540, 545, 550, 571, 572, 573, 577, 582
 Гелл-Манн М. (Gell-Mann M.) 576
 Гельвеций 55

- Гельдер О. (Hölder L. O.) 70, 250, 255, 260, 311
 Гельмгольц (Helmholtz H. L. F.) 250, 282, 284, 286, 289, 311, 390, 413, 436, 439, 445, 450, 507
 Германн Я. (Hermann J.) 22
 Герон Александрийский 7
 Геронимус Я. Л. 6, 193, 249
 Герц Г. (Hertz H. R.) 254, 300, 341, 362, 396, 411, 440, 445
 Герцфельд К. (Herzfeld K.) 532
 Гершель В. (Herschel F. W.) 55, 106
 Гершель Дж. (Herschel J. F. W.) 106, 150
 Гиббс Д. (Gibbs J. W.) 299, 300, 311, 418, 429
 Гильберт Д. (Hilbert D.) 301, 314, 498, 500
 Глезер (Glaser) 146
 Гнеденко Б. В. 193, 195
 Гоббс 9
 Голдстейн Г. 369, 557
 Гольбах П. (Holbach P. H.) 55, 57, 71, 72
 Гольдсмит 99
 Горак З. (Horak Z. F. K.) 312
 Гордан П. (Gordan P. A.) 324
 Грей (Gray) 146
 Григорьев В. 578
 Григорьян А. Т. 249, 300
 Грин (Green) 222
 Грэйвс Г. (Graves G.) 99, 102
 Гюйгенс Х. (Huyghens C.) 10, 16, 55, 79, 80, 118, 119, 120, 216, 312, 346, 556
 Дайсон Ф. (Dyson F.) 587
 Д'Аламбер Ж. (D'Alembert J. le R.) 31, 32, 49, 50, 55, 57, 64, 65, 71, 76, 93, 252, 275, 310, 337, 368, 562
 Данков 584
 Даннеман Ф. 56
 Дарбу Ж. (Darboux J. G.) 189, 231, 266, 272, 282, 312
 Дарвин (Darwin C. C.) 563
 Дарси П. (D'Arcy P.) 30, 34
 Дебай П. (Debye P. J. W.) 143, 563
 Дебов (Desboves) 280
 Декарт Р. (и картезианцы) 9, 20, 21, 27, 32, 55, 78, 123, 124, 411, 474
 Делоне Ш. (Delaunay Ch.) 277
 Де Морган 106, 175
 Де Сен-Жермен (De Saint-Germain A.) 265
 Джеффрис Г. (Jeffreys H.) 259
 Джинс Дж. (Jeans J. H.) 512
 Дидро Д. (Diderot D.) 31, 56, 72
 Дирак П. (Dirac P. A. M.) 131, 167, 168, 336, 361, 540, 572, 573, 574
 Дирихле Г. (Dirichlet G. P. L.) 213
 Добронравов В. В. 260, 266
 Дондер (Donder) 294
 Донкин В. (Donkin W.) 204
 Држемер 351, 539
 Дэвисон 351, 539
 Дюга Р. (Dugas R.) 53
 Дюгем П. (Duhem P.) 392
 Дюпен Ф. (Dupin F. P. C.) 118
 Дюфе Ш. (Dufau C. F.) 56
 Евклид 99
 Ермаков В. П. 230, 249
 Жергон Ж. (Gergonne J.) 118
 Жуковский Н. Е. 62, 238, 249
 Журден Ф. (Jourdain F.) 300
 Зоммерфельд А. (Sommerfeld A.) 140, 299, 309, 459, 506, 507, 514, 517, 527, 538, 548
 Иваненко Д. Д. 352, 479, 487, 500, 577, 578, 579
 Идельсон Н. И. 78
 Иордан Е. (Jordan E. P.) 550, 568, 571
 Кабанис Ж. (Cabanis G.) 57
 Калуза Т. (Kaluza Th.) 504
 Кант И. (Kant I.) 75, 107, 108, 113, 114, 115
 Капон Р. Capon R. S. 259
 Каратеодори К. (Carathéodory C.) 97, 135, 161
 Карно Л. (Carnot L. N. M.) 80
 Картан Э. (Cartan E. Y.) 153, 291, 335, 579, 582
 Кастилиано К. (Castigliano C. A.) 342
 Качанов Л. М. 344
 Кениг С. (Koenig S.) 22, 30, 34, 42
 Кенигсбергер Л. (Koenigsberger L.) 282, 300
 Кеплер И. (Kepler J.) 55, 108, 276, 496
 Керр 77
 Кирхгоф Г. (Kirchhoff G. R.) 77, 238, 303, 310, 317, 368
 Клаузиус Р. (Clausius R.) 371, 372, 389, 394, 401, 413, 422
 Клебш А. (Clebsch R. F. A.) 160, 204
 Клейн Ф. (Klein F.) 72, 73, 77, 105, 107, 119, 130, 137, 139, 153, 158, 232, 312, 322, 334

- Клемм (Klemm) 35
 Клингештерн С. (Klingenstjerna S.)
 Кнезер А. (Kneser A.) 75, 478
 Коллинс 98
 Колмогоров А. Н. 326
 Комптон А. (Compton A. H.) 528
 Кондильяк Е. (Condillac E.) 57
 Кондорсе (Condorcet A. N.) 57, 64
 Космодемьянский А. А. 249
 Косслет В. 149
 Котов В. Ф. 309
 Кочин Н. Е. 266
 Коши О. (Cauchy A. L.) 107, 118, 167, 195
 Кошляков Н. С. 160
 Крамерс Х. (Kramers H. A.) 527
 Кристоффель Э. (Christoffel E. B.) 269, 494
 Крутков Ю. А. 6, 524
 Крылов А. Н. 6, 11, 195, 196
 Кулон Ш. (Coulomb C. A.) 56
 Куммер (Kummer) 117
 Курант Р. (Courant R.) 325
 Курош А. Г. 326
 Куртиврон Г. (Courtivron G.) 24, 30
 Кутюра Л. (Coutura L.) 21, 34
 Кэли А. (Cayley A.) 171
 Кэтлэ (Quetellet) 118
 Лаврентьев М. А. 59
 Лавуазье А. 56
 Лагранж Ж. (Lagrange J. L.) 7, 9, 36, 39, 47, 49, 50, 53, 55, 57, 58, 59, 62, 64, 69, 73, 75, 76, 78, 79, 84, 85, 86, 88, 93, 97, 117, 128, 150, 163, 169, 172, 179, 205, 230, 232, 235, 237, 250, 302, 310, 353, 361, 403, 410, 421, 435, 450, 475, 478, 508
 Лазарев П. П. 390
 Лаланд Ж. (Lalande J. J.) 34, 42, 57
 Ламарк 56
 Ламберт Ж. (Lambert J. H.) 56
 Ламетри Ж. (La Mettrie J.) 57
 Ланге Ф. А. 72
 Ландау Л. Д. 333, 487, 545
 Ланжевен П. (Langevin P.) 467
 Ланчос К. (Lanczos C.) 277
 Лаплас П. (Laplace P. C.) 47, 55, 71, 74, 76, 78, 79, 82, 84, 92, 100, 117, 155, 195, 310, 474, 506
 Лармор Дж. (Larmor J.) 119, 438, 446, 448, 453, 473, 479
 Леверрье Ю. 101
 Леви-Чивита Т. (Levi-Civita T.) 10, 269, 275, 313, 478
 Лежандр А. (Legendre A. M.) 81, 198, 521
 Лейбензон Л. С. 342
 Лейбниц Г. (Leibniz G. W.) 13, 18, 30, 34, 55, 73, 75, 158
 Лека М. (Lekat M.) 97, 474
 Ленин В. И. 368, 433, 447, 571
 Ленц Э. Х. 409
 Ли С. (Lie M. S.) 107, 130, 153, 172, 173, 208, 311, 334
 Линней 56
 Липка (Lipka) 272
 Липшиц Р. (Lipschitz R.) 137, 231, 266, 272, 297, 306, 312, 433
 Лиувиль Ж. (Liouville J.) 173, 222, 236, 280, 281, 312, 363, 542
 Лифшиц Е. 333, 487, 545
 Ликтемштейн (Lichtenstein) 342
 Ллойд Г. (Lloyd G.) 101, 110, 137
 Ло Ф. (Low F.) 583
 Лобачевский Н. И. 323
 Ловитт Е. (Lovitt E.) 153
 Лойцянский Л. Г. 187
 Ломоносов М. В. 56
 Лопиталь Г. (L'Hopital G. F.) 13
 Лоренц Г. (Lorentz H. A.) 334, 341, 355, 446, 456, 463, 465, 467, 468, 473, 479, 480, 490, 495, 500, 577, 579
 Лурье А. И. 187
 Лъенард А. М. 577
 Люстерник Л. А. 59
 Маджи (Maggi G. A.) 189, 365
 Майер А. (Mayer A.) 61, 210, 242, 260, 299
 Майкельсон А. (Michelson A. A.) 341
 Малюс Е. (Malus E. L.) 100, 117, 118
 Максвелл Дж. (Maxwell J. K.) 58, 107, 137, 222, 369, 450, 452, 455, 464, 467, 472, 479
 Марков М. 322
 Маркс К. (Marx K.) 54, 73
 Мах Э. (Mach E.) 9
 Менделеев Д. И. 527
 Ми Г. (Mie G. A. W. L.) 463, 490
 Миндинг Ф. Г. 230
 Минковский Г. (Minkowski H.) 474, 477, 481, 484, 486, 583
 Михельсон В. А. 372
 Михлин С. Г. 172
 Монж Г. (Monge G.) 76, 117
 Мопертюи П. (Maupertuis P. L. M.) 18, 22, 42, 43, 48, 52, 53, 64, 74, 75, 80, 253, 529
 Морера Г. (Morera G.) 282
 Мотт 11
 Мурнаган Ф. (Murnaghan F. O.) 532
 Муштарн М. Х. 260
 Мюллер (Müller J. J.) 386

- Нейман И. (Neumann J.) 571
 Нейман К. (Neumann K. G.) 260, 261
 Нернст В. (Nernst H. W.) 510
 Нетер Э. (Noether E.) 314, 322, 324, 326, 327, 580
 Нолле Ж. (Nollet J. A.) 56
 Нордхейм Л. (Nordheim L.) 226
 Ньютон И. (Newton I.) 11, 13, 18, 50, 53, 55, 108, 112, 120, 239, 275, 302, 309, 337, 362, 367, 369, 411, 496, 510, 529
 Ольсон 368
 Опп В. (Opp W.) 222
 Оствальд В. (Ostwald W.) 431
 Остроградский М. В. 98, 102, 103, 128, 193, 232, 237, 260, 310, 356
 Парс Л. (Pars L. A.) 259
 Паули В. (Pauli W.) 336, 485, 573, 578, 580
 Пельтье Ж. (Peltier J. C. A.) 409
 Пенлеве П. (Painlevé P.) 270
 Пирогов Н. Н. 428
 Пикт (Picht M. K.) 147
 Планк М. (Planck M. K. E.) 168, 350, 413, 439, 463, 470, 475, 483, 506, 509, 514, 538, 563
 Пойа Д. 368
 Пойнтинг 470
 Полак Л. С. 9, 105, 116, 249, 506
 Понтрягин 326
 Прандж Г. (Prange G.) 127
 Пратусевич Я. А. 172
 Преображенский 62, 229, 311
 Пуанкаре А. (Poincaré J. H.) 107, 282, 286, 478, 479, 480, 510
 Пуассон С. (Poisson S. D.) 80, 81, 163, 168, 172, 195, 196
 Пфафф Ф. (Pfaff J. F.) 167, 334
 Райт Е. (Wright E.) 313
 Рассел Б. (Russel B.) 509
 Раус (Routh E. J.) 239, 260, 282, 286, 434
 Рахманинов И. И. 232, 233
 Резерфорд Э. (Rutherford E.) 277, 513
 Рети М. (Rethy M.) 241, 281
 Риман Б. (Riemann B.) 312
 Риччи Г. (Ricci C. G.) 269, 313
 Родригес О. (Rodrigues O.) 93, 97, 188, 237, 239, 246
 Румер Ю. Б. 504
 Румовский С. 49
 Рунге И. (Runge J.) 140
 Руссо Ж. Ж. 55, 56
 Рэлей Д. (Rayleigh J. W.) 512
 Сабинин Е. Ф. 62, 195, 229, 311
 Серре Ж. (Serret J. A.) 40, 228, 248, 280, 311
 Сильвестр (Sylvester) 327
 Синдж Дж. (Synge J. L.) 272, 312, 313, 471, 534
 Скобелкин В. И. 344
 Скоутен Н. (Scouten J. A.) 313
 Слудский Ф. А. 62, 95, 96, 205, 232, 236, 238, 242, 243, 246, 249
 Снеллиус В. (Snel van Royen W.) 9
 Соболев С. Л. 172
 Соколик Г. А. 334
 Соколов А. 352, 487, 577, 579
 Соколов И. Д. 62, 232, 243, 249
 Соловьев В. 75
 Сольсбери 466
 Сомов О. И. 62, 230, 232, 244, 245, 246
 Суслов Г. К. 259, 306
 Талызин М. И. 62, 232, 233, 238, 239, 249, 311
 Тамм И. Е. 584
 Таннери П. 56
 Тартаковский С. П. 539
 Тетенс (Tetens) 35
 Тодхэнгер (Todhunter G.) 242
 Томанага 586
 Томсон Г. 539
 Томсон Дж. Дж. (Thomson J. J.) 284, 286, 413, 426, 434, 436, 448, 466
 Томсон У. (Thomson W.) 230, 266, 312, 346, 436, 437, 447
 Тэт П. (Tait P. G.) 102, 158, 230, 266, 312, 436, 437
 Уваров 102
 Уилсон У. (Wilson W.) 416, 517, 538, 548
 Уинтер 172
 Уиттекер Э. (Whittaker E. T.) 226, 260, 312, 571
 Умэдзава Х. 574
 Умов 472
 Уордсворт 106
 Урысон П. С. 326
 Уэвелл (Whewell) 106, 109, 150, 175
 Фарадей М. (Faraday M.) 393, 447
 Фейнман (Feynman) 573, 578, 585
 Фельдман Д. (Feldman G.) 583
 Ферма П. (Fermat P.) 7, 9, 87, 79, 136, 146, 437, 529, 534, 538, 539
 Ферми Э. (Fermi E.) 458
 Феррерс (Ferrers) 260
 Ферстерлинг К. (Försterling K.) 389

- Фирц М. (Fierz M.) 577
Фок В. А. 544, 584
Фосс А. (Voss A. E.) 241, 250, 256, 257, 311, 477
Франк 273
Франклин Б. (Franklin B.)
Фредерикс В. К. 6, 479, 500
Френель (Fresnel A. J.) 82, 110, 116, 120, 565
Френкель Я. И. 565
Функ (Funk) 146
Фурье Т. 58, 81, 82, 195, 197, 458
Фусс Н. И. 102, 107
- Хаас А. (Haas A.) 68
Хевисайд О. (Heaviside O.) 282
Хельм Г. (Helm G.) 433
Хуа-Чунг-Ли 216
- Ценов И. 259, 266
Цитович Н. 210
Цыганова Н. Я. 246, 249,
- Чаплыгин С. А. 260, 262, 263
Чеботарев Н. Г. 209
Черри Е. (Cherry E. C.) 338
Четаев Н. Г. 266, 368, 553
Чили К. (Szily C.) 371, 379, 380
Чью Г. (Chew G.) 584
- Шази И. (Chazy J.) 172
Шварцшильд К. (Schwarzschild K.) 410, 478, 479, 481, 491, 518, 520, 521
Швингер И. (Schwinger J.) 581, 584 585, 586
Шеринг Е. (Schering E.) 173
- Ширков Д. В. 327, 328, 335, 574, 580
Шредингер Э. (Schrödinger E.) 131, 169, 336, 342, 369, 520, 539, 535, 586, 587
Штарк И. (Stark J.) 517
Штауд К. (Staud K. G. C.) 518
Штуди Е. (Study E.) 153
Штурм Ф. (Sturm F.) 280, 363, 542
Штюкельберг 585
- Эддингтон А. (Eddington A. S.) 344, 366, 493, 497
Эйзенхарт (Eisenhart) 272
Эйлер Л. (Euler L.) 17, 23, 24, 30, 31, 33, 34, 36, 37, 50, 51, 52, 59, 62, 71, 74, 84, 93, 192, 242, 290, 306, 310, 343, 483, 494
Эйнштейн А. (Einstein A.) 354, 474, 486, 492, 494, 495, 496, 497, 498, 500, 501, 539
Эйри (Airy J.) 106
Энгельс Ф. (Engels F.)
Эпштейн П. (Epstein P. S.) 517, 520, 521, 532, 548
Эренфест П. (Ehrenfest P.) 522, 523
- Юнг Т. (Young Th.) 79, 82, 116, 120, 158
- Якоби К. (Jacobi C. G. J.) 5, 40, 42, 63, 102, 106, 107, 158, 160, 172, 173, 175, 206, 213, 228, 234, 236, 239, 242, 266, 273, 275, 280, 295, 299, 306, 307, 311, 312, 340, 583
Янг К. (Yang C.) 583

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация** 146, 147
Аксиоматизация физики Гильбертом 498
Алгебра некоммутативная 98, 103
Амплитуда вероятности 356, 543, 561, 585
Аналогии, метод 367, 538, 571
Аналогия 368
 — волновых уравнений 566
 — гидродинамическая 140, 145, 220, 272
 — квантовой и классической механики 168, 587
 — математических форм 346, 368, 529, 537, 551, 570
 — оптико-механическая 9, 24, 98, 120, 124, 140, 149, 177, 226, 310, 345, 348, 366, 528, 537, 539, 557, 570
 — — — И. Бернулли 13, 15, 16
 — — — Гамильтона 116
 — структур теорий 368, 369, 448
 — теории преобразований и термодинамики 443
 — термодинамическая 158, 389, 393, 401, 403, 406, 410, 412, 427, 445
 — физическая 272, 369, 415
 — электромеханическая 338
 — явлений 368, 463, 529, 537, 570
Антропоморфизм 35, 75, 362
Априорность — апостериорность 10, 43, 53, 113, 114, 346
Астрономия (небесная механика) 55, 82, 83, 103, 122, 149, 170, 276, 278, 341
Атом Бора—Зоммерфельда 183, 277, 506, 513, 514, 515, 517, 527, 528, 544
 — как центр силы 109
 — строение 464, 465, 539, 542, 551, 568
Атомистика 108, 497
Брахистохрона 9, 11, 13, 15, 17, 22, 36, 40
 — и циклоида 15, 16, 36
Вариация 9, 11, 15, 43, 59, 70, 232, 241, 242, 311
 Вариация в смысле Гельдера 222
 — вторая 163, 228
 — изохронная 96, 232, 248, 251
 — изоэнергетическая 232, 251
 — обобщенная 412
 — первая 165
 — полная 163, 246, 248
 — у Фосса 222
Варьирование 9, 66, 240, 385
Вектор 105
 — Умова—Пойнтинга 472
Вероятность состояния 366, 412
 — и действие 366
Вихрь 105, 290
Возмущение 47, 82, 84, 122
Волны материи 350, 532, 536
 —, распространение 366
Время 7, 83, 84, 107, 284, 291
 — и закон сохранения энергии 284
 — собственное 474
Вырождение 526
Гамильтона функция см. функции
Гамильтониан 156, 170, 187, 199, 275, 335, 477
Гамильтонов формализм 358
Геометризация механики 63, 111, 150, 216, 266, 300, 312, 352
 — физики 500
 — электромагнитного поля 496
Геометрия нериманова 352
 — обобщенная 496
 — риманова 273, 496
Гидродинамика 140, 220, 221, 342
Гипотеза адиабатическая Эренфеста 522
 — квантовая Планка 506, 510, 515
Группа (матем.) 209
 — вращений 105
 — галилей—ньютонова 336
 — интегрируемая 210
 — канонических преобразований 209
 — Ли 209, 335
 — Лоренца 334, 480, 484
 — неоднородная 334
 — непрерывная 209, 210, 217, 330
 — преобразований 209, 214, 324, 328

- Группа преобразований касательных 346
- разрешимая 210
 - (физическая) волновая 550
- Дальнодействие зарядов 576
- Движение варьированное 10, 69
- возмущенное 47, 82, 84, 212, 277, 280
 - действительное 10, 69
 - , его мера 20, 21, 30
 - как преобразование 219
 - несжимаемой жидкости 287
 - периодическое 279, 526
 - по эквипотенциальной поверхности 233
 - скрытое 284, 300, 303, 309, 390, 391, 393, 400, 406
 - условно-периодическое 412, 518, 519
 - циклическое 284, 389, 391, 404, 406
- Дедукция см. индукция
- Действие 9, 34, 42, 64, 75, 123, 214, 350, 366, 506, 507, 563
- по Вейлю 504
 - по Гамильтону 150, 240, 292
 - по Лейбницу 18, 19, 25
 - по Мопертью 30
 - по Планку 506
- Детерминизм 114, 366, 413, 546 см. причинность
- Динамика 5, 63, 65, 83, 109, 113, 207
- Гамильтона 149
 - Гамильтона—Якоби 5, 175, 371, 511, 522
 - Ньютона 337, 496, 510
 - , связь с оптикой 150
 - системы 163, 167
- Дискрегация 372, 377, 379
- Дифракция 120, 140, 528, 539, 564, 565, 567
- Дуализм и синтез корпускулярно (эмиссионно)-волновой 79, 80, 116, 117, 120, 131, 133, 136, 177, 209, 220, 528, 564, 568
- — — прерывности—непрерывности 109, 506, 510, 547
- Задача вариационная 23, 36, 38, 40, 62, 501
- Дидоны 36
 - Дирихле 213
 - Кеплера 276
 - с разделяющимися переменными 275
 - трех тел 153, 154, 171
- Закон взаимности 407, 409, 410
- — термодинамический 409
 - — термоэлектрический 409
 - — электродинамический Ленца 409
 - живых сил 26, 31, 41, 42, 73, 91, 94, 156, 188, 205, 234, 282
 - количества движения 32, 33
 - минимума отрицательного кинетического потенциала 397
 - переменного действия 129, 157, 179
 - периодический Менделеева 527
 - сохранения движения центра тяжести 334
 - — количества движения 333
 - — заряда 574
 - — моментов 34, 333
 - — энергии 42, 69, 179, 284, 285, 307, 333, 344, 475
 - — — и время 284
- Законы сохранения механики 222, 333, 334
- физики, их инвариантность 485
- Излучение абсолютно черного тела 506, 510, 548, 550
- Импульс как координата 82, 316
- Инвариант 222, 322, 325, 328
- адиабатический 424, 523, 524
 - группы Лоренца 480
 - интегральный Пуанкаре 286
 - простейшей теории относительности 474
- Инвариантность 6, 78, 90, 106, 168, 212, 333, 336, 341, 366, 579
- вариационных принципов, 474
 - законов физики 485
 - интеграла действия Шварцшильда 479
 - калибровочная 336, 469, 473, 575
 - , лоренц = — 469, 473, 474, 479
 - релятивистская 355, 474, 480, 574
 - уравнений Гамильтона 222
 - — Лагранжа 475
- Индукция—дедукция 10, 78, 108, 111, 112, 113, 119, 124, 413, 474, 570
- Интеграл движения 222
- действия (Эйлера—Лагранжа) 130, 150, 228, 285, 478, 507
- Интегрирование уравнений движения 183, 275
- Интегрируемость в механике 205, 237
- и структура группы 210
- Интерференция 538, 539, 561, 564
- Исчисление вариационное 5, 8, 11, 13, 15, 38, 40, 63, 79, 82, 92, 161, 181, 314, 372

- Исчисление кватернионов** 98
— операционное 98, 103, 105
Картина мира единая физическая 351, 353, 468—473
— — механистическая 351, 352, 362, 371, 390, 392, 462
— — электромагнитная 351
Качение твердого тела 255, 261
Квант действия Планка 350, 506
Кватернион 98, 103, 105
Ковариантность 485, 486, 487
Количество действия 51, 75
Координата по Дж. Дж. Томсону 438
Координаты абсолютные 219
— дискретные 458, 462
— игнорируемые 434, 436, 439
— исключенные 434
— киностенические 436
— непрерывные 458, 462
— обобщенные 68, 82, 165, 178, 225, 262, 282, 339, 345
— относительные 219
— циклические 283, 436
Кривизна траектории 304, 309

Лагранжа функция см. функция
Лагранжев формализм 358
Лагранжиан 94, 169, 198, 286, 334, 353, 578
— взаимодействующих полей 487, 582
— локальный 353
Линза электронная 146
Линия геодезическая 38, 40, 267, 274, 300, 304, 312, 340, 363, 477, 478
Локальность поля 575
Лоренц-инвариантность 469, 473, 474, 479

Масса игнорируемая 437
— скрытая 439
Материализм, критика идеализма 22, 49, 55, 75, 109, 115, 116, 238, 308, 413, 547, 571
— механистический 447
Матрица Дирака 582
— самосопряженная 582
— эрмитова 582
— S 359, 583
Мезодинамика 584, 586
Метафизика 25, 34, 43, 47, 49, 52, 64, 74, 75, 76, 80, 109, 114, 189, 437
Метод обобщенных координат 68
— прямой 172
— функциональных производных 584

Механика 5, 7, 49, 63, 68, 86, 102, 105, 139, 207, 300, 446
— аналитическая 57, 63, 65, 76, 78, 82, 93, 150, 175, 177, 282
— без силы 309
— векториальная 199
— волновая 348, 528, 538, 541, 542, 558, 561, 567, 571, 572, 585
— квантовая 74, 167, 214, 311, 364, 366, 369, 485, 506, 513, 521, 571
— классическая 167, 178, 179, 201, 214, 226, 279, 284, 302, 335, 485, 506, 515, 561, 585
— матричная Гейзенберга—Борна 571, 572
— небесная см. астрономия
— релятивистская 74, 178, 179, 266, 284, 291, 311, 351, 352, 366, 447, 469, 474, 476, 561
— сплошной среды 342
— статистическая 167, 365, 366, 428
— — Гиббса 429
— строительная 172
— техническая 341
Механицизм 352, 390, 411, 446, 447, 568
— динамический 412
— кинетический 412
Меропределение конфигурационного пространства 552
— релятивистское 477
Множитель неопределенный Лагранжа 94, 95
— последний Якоби 192, 511

Натурфилософия 18, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 33, 34, 43, 48, 49, 68, 74, 173, 510
Начало второе термодинамики 371, 389, 390
— наименьшей работы 342

Обратимость—необратимость 366, 371, 402, 406, 410, 416
Оператор 89, 98, 105, 366
— Гамильтона 98, 105
— Лапласа 105
— линейный 89
— унитарный 583
Операторы уничтожения и порождения частиц 581
Оптика волновая 11, 110, 116, 131, 133
— гамильтонова 148
— геометрическая 7, 9, 11, 15, 27, 68, 74, 92, 100, 117, 119, 120, 123, 129, 136, 139, 140, 145
— неоднородной среды 137, 142

- Оптика физическая 121, 136, 139, 140, 145
 — электронная 145, 146
 Отражение—преломление света 7, 9, 27, 92
- Пакет волновой 550
 — энергии 561
- Переменные канонические 172, 214
 — киностенические 172, 214
 — отсутствующие 286
 — циклические 184, 286
- Перемещения виртуальные 241, 254
- Перенормировка 584, 587
- Переход квантовый 547
- Плотность вероятности 336
- Поверхность волновая 137
 — равного действия 349, 511, 536
- Поле 105, 106, 220, 309
 — гравитационное 44, 351, 497, 501
 — и частица 351, 487
 — квантованное 328, 452, 454, 469, 473, 480, 574
 — классическое 355
 — физическое 446
 — центральных сил 62
 — экстремалей 316
 — электромагнитное 351, 446, 481, 497
 — электронно-позитронное 581
- Потенциал 42, 372
 — кинетический 311, 403, 410
 «Потенция» у Лейбница 19, 21
- Преобразование 78, 163, 169, 170, 208, 333
 — бесконечно малое 214, 322
 — в фазовом пространстве 215
 — вещественное ортогональное 334
 — вращения 105, 333, 335
 — Галилея 341
 — градиентное 469
 — инверсии 333
 — калибровочное 334, 336, 469
 — каноническое 90, 170, 172, 184, 185, 187, 213, 214, 217, 218, 277, 278, 287, 294, 460
 — касательное 90, 130, 153, 163, 168, 169, 172, 208, 212, 312, 346
 — Лежандра 198, 521
 — Лоренца 333, 341, 342, 355, 479
 — непрерывное 209, 210, 217, 330, 333
 — ортогональное 334, 335
 — отражения зеркального 333
 — переноса 333, 335, 336
 — точечное 215, 270, 277, 333
- Прерывности—непрерывности синтез 109, 506, 510, 547
- Принцип вариационный 5, 7, 98, 228, 232, 295, 342, 355, 484
 — — Бейтмена 344
 — — в гидродинамике 342, 344
 — — в теории упругости 342
 — — в форме Шварцшильда 481, 491
 — — Кастилиано 342
 — — Скобелкина 344
 — возможных перемещений 55, 65, 78, 196, 341
 — Гамильтона—Остроградского 98, 128, 183, 190, 202, 214, 233, 251, 252, 275, 337, 344, 363, 380, 439, 452, 462, 473, 477, 479, 488, 529, 551, 587
 — — и инерция 362
 — —, обобщение Больцмана 421
 — — Гельмгольца 397
 — Гаусса (наименьшего принуждения) 265, 295
 — — и инерция 303
 — Герца (прямейшего пути) 297, 300, 341
 — Гюйгенса 153, 312, 346, 439, 556
 — Д'Аламбера 65, 236, 252, 275, 299, 337, 340
 — живых сил 26, 31, 41, 42, 63, 68, 73, 80, 179, 189
 — инерции 303, 362
 — кратчайшего пути 15, 91
 — наименьшего времени 7, 9, 11, 124
 — — действия 7, 18, 21, 41, 51, 63, 68, 74, 78, 93, 122, 126, 153, 163, 177, 205, 251, 266, 337, 340, 344, 378, 421, 439, 475
 — — у Лагранжа 53, 62, 70, 73, 232, 366
 — — — Мопертюи 22, 24, 26, 43, 51, 53, 80, 243, 529
 — — — Лейбница 22
 — — — Остроградского 237
 — — — Планка 441, 470, 473
 — — — Пуассона 80, 91
 — — — Эйлера 36, 41, 43, 53, 62
 — — — Якоби 42, 63, 274, 307, 312, 477
 — переменного действия Гамильтона 157, 240
 — постоянного (стационарного) действия 126
 — причинности 31, 114, 362, 486, 548
 — прямейшего пути 297, 300, 341
 — соответствия Бора 522, 549
 — сохранения количества движения и энергии 291
- Принцип сохранения действия 34
 — суперпозиции волн 565

- Принцип Ферма 7, 11, 16, 79, 113, 121, 146, 153, 529, 534, 536, 551
 — Эйлера—Лагранжа 233, 243, 247, 306
 — Эренфеста 523
 Принципы вариационные единой теории поля 496
 — —, их инвариантность 474
 — —, их эквивалентность 337
 — — механики квантовой 506, 573
 — — — классической 7, 88, 228, 314, 346, 361, 371, 390, 413, 446
 — — — релятивистской 474
 — — в теории атома Бора 506
 — — оптики 7, 88
 — — — поля квантовой 574,
 — — — классической 446
 — — — теплоты 371, 413, 439
 — — электродинамики 439, 470
 — дифференциальные 341
 — интегральные 341
 Причинность (каузальность) 24, 47, 114, 364, 486, 546, 586, 587
 — квантовая 366
 — статистическая 366
 Причины конечные 48, 52 см. финализм
 Производная функциональная 355, 584, 585
 Производящая функция см. функция
 Пространство гильбертово 572
 —, изотропность 333
 — конфигурационное 163, 267, 270, 273, 274, 287, 311
 — Минковского 477, 486, 582
 — обобщенное 111, 177, 270, 311, 312
 —, однородность 333
 —, разбиение 458
 — риманово 352
 — состояний 292
 — топологическое 210
 — фазовое 42, 170, 184, 215, 220, 222, 287, 311, 515
 — — дискретное 515
 — функциональное 14
 Псевдоскаляр 106
 Путь оптический 129, 147
 Разделимость переменных 277, 513, 517, 526
 Расходимости в квантовой теории поля 587
 Рефракция коническая 98, 116, 119, 136
 Связи 254—266
 — голономные 255, 265
 — неголономные 254, 260, 265
 — склерономные 189, 201
 Сила 65, 108, 109, 300, 302, 309
 — возмущающая 170
 — движущая 20
 — живая 158
 — кинетическая концепция 436
 — консервативная 65, 84
 — потерянная 298
 — упругая 50
 — ускоряющая 20
 — центральная 40, 41, 62, 63, 91, 109, 371, 413
 Синтез физических понятий 313, 446, 510, 528, 537, 560 см. аналогия, дуализм, эквивалентность
 Система голономная 254, 255, 266, 337
 — каноническая 191, 210
 — консервативная 42, 65, 74
 — неголономная 181, 189, 254, 260, 263, 266, 300, 303, 311
 — разделяющаяся 526
 — с игнорируемыми исключенными координатами 434
 — склерономная 189, 201, 285
 — тел 85
 — условно периодическая 513
 — циклическая 283
 Скобки Лагранжа 86
 — Пуассона 80, 87, 89, 281, 335
 — — квантовые 168
 Скорость волновая (фазовая) 11, 350
 — групповая 529
 — как алгебраическая величина 20
 Соотношения дисперсионные 580
 — перестановочные 579
 Состояние системы 217
 — — «призрачное» 578
 — — с отрицательной нормой 578
 Спин 581
 Спинор 579
 Способ наименьших квадратов и принцип Гаусса 295, 298
 Стационарность интеграла 60—62
 Таутохрона Гюйгенса 16, 17
 Телеологизм (критика его) 7, 23, 30, 32, 33, 47, 48, 53, 64, 74, 75, 307, 361, 362
 Тензор Кристоффеля 269
 — метрический 273, 477
 — фундаментальный 269
 — электромагнитного поля 488

- Теорема Бельтрами—Липшица 137, 306
 — Галилея 12
 — Гаусса—Остроградского 343, 356
 — Герца 306
 — Лиувилля 173, 222, 515
 — Малюса—Дюпена 138
 — независимости Гильберта 314
 — Нетер 314, 322, 330, 331, 332
 — фундаментальная оптики 120
 — Якоби 160
 Теоремы сохранения 329
 Теория атома 275, 277, 506, 510, 522, 529, 532
 — Бора см. Атом Бора—Зоммерфельда
 — возмущений 84, 311
 — волновая-корпускулярная 10, 82, 116, 351
 — Гамильтона—Якоби 160, 338
 — Гейзенберга 571, 582
 — групп преобразований 5, 170, 172, 190, 208, 226, 311, 322, 327
 — единая материи 579
 — — поля 352, 479, 496, 497, 503, 510
 — — — Вейля 503
 — — — Калузы 504
 — Зоммерфельда 517
 — инвариантов 582, 502
 — квантованных полей 328, 356, 454, 469, 473, 480
 — Лоренца 495
 — Ми 463, 490
 — моно- и полициклических систем 284
 — нелинейная поля 490, 579
 — оптических приборов 122, 131, 137, 138
 — относительности 474 см. механика релятивистская
 — — общая 499
 — поверхностей 5, 82, 100, 117, 306
 — — квантовая 574, 587
 — полей квантовая локальная, не-локальная 576, 577
 — «систем лучей» 100, 101, 117, 121, 136
 — теплоты 371, 413
 — тяготения Эйнштейна 496
 — Уилсона 517
 — упругости 342, 470
 — Шварцшильда 518
 — Шредингера 541
 — Эйнштейна 474
 — Эпштейна 517
 Термодинамика 69, 158, 284, 309, 371, 402, 422
 Техника 98, 105, 158, 172, 311, 463, 465, 551
 Траектория возможная 10
 — геодезическая 254
 — действительная 10
 — динамическая 270
 Удар 28, 29, 30, 80, 309
 — упругих тел 29, 30, 80
 — твердых тел 28, 30
 Уравнение Аппеля 264, 265
 — Боронца 262
 — волновое 551, 562, 566
 — Гамильтона—Якоби 135, 146, 181, 183, 187, 225, 322, 556
 — — —, его интегрирование 275
 — динамики общее 68, 70
 — живых сил 66
 — Лапласа 474, 505
 — присоединенное 319
 — Чаплыгина 263
 — Шредингера 336, 342, 541, 542, 544, 557, 562, 586, 587
 — Штурма—Лиувилля 363, 542
 — Эйлера 343
 Уравнения Гамильтона канонические 98, 130, 160, 167, 178, 200, 206, 222, 283, 335, 477, 571
 — —, их инвариантность 222
 — движения неголономных систем 260
 — Лагранжа 97, 128, 163, 164, 165, 199, 216, 269, 283, 310, 339, 478, 486
 — — в тензорной форме 269
 — —, их инвариантность 475
 — —, их интегрирование 286
 — —, обобщение Пуанкаре 282
 — Максвелла 336, 452, 455, 467, 472, 479, 481
 — Рауса 282
 — Эйлера—Лагранжа 39, 163, 200, 271, 475, 482
 — Эйнштейна гравитационного поля 501, 502
 Условия квантовые 548
 Физика квантовая 506, 513
 —, микро-макро 509, 529, 549, 551, 557, 570
 — статистическая 222, 412
 — эфира 465
 Финализм 24, 33, 48, 53 см. телеология
 Флюид фазовый 184, 220, 221, 289
 Фокус кинетический 23
 Форма математическая 31, 43, 53, 63, 69, 75, 77, 82, 105, 110, 136, 149, 164, 169, 175, 228

- Функционал** 15, 36,
Функция 73
— волновая 336, 539, 543, 544, 559, 571
— возмущающая 84, 85, 171
— Гамильтона 84, 98, 152, 157, 164, 167, 171, 177, 180, 184, 278, 279, 283
— действия 154
— Лагранжа 139, 283, 458, 479
— пертурбационная 164
— потенциальная 65, 70, 84, 211
— причинная 585
— производящая 90, 187, 214, 217, 220, 279
— силовая 84, 201, 283
— точки 105
— характеристическая 102, 109, 123, 125, 127, 129, 146, 147, 150, 157, 174, 181
- Циркуляция** 288
- Число гиперкомплексное** 103
- Эйконал** 138, 139, 145, 350
Эквивалентность принципов вариационных 337, 338, 341, 350
— формализмов лагранжево—гейзенберговского и гамильтоново—шредингеровского 585
«Экономия природы» 74, 173
- Эксперимент** 78, 82, 116, 137, 341, 351, 370, 464, 474, 566, 570
Экстремум 8, 14, 36
— и стационарное значение 163
— условный 36, 95
Электродинамика 69, 82, 140, 446, 450, 470
— вакуума 461
— квантовая 451, 473
— Ми 463
— нелинейная 463, 469
— обобщенная 469
— релятивистская 478
— Шварцшильда 481
Электрон 447, 464, 465, 481, 523
Элементы оскулирующие 83, 86
Энергетизм 430, 431
Энергия 21, 158, 300
— и частота 546
— полная 70, 150, 158, 164, 222, 285
— потенциальная, приведение к кинетической 437
— свободная 158, 311
— «ускорения» 265
Энтропия 391, 416
Эргал 376, 384
Эрмитовость лагранжиана 579
Эфир 446, 451, 465
- Якобиан** 192

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



URSS

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

Жуковский Н. Е. Механика системы. Динамика твердого тела.

Жуковский Н. Е. Аналитическая механика.

Жуковский Н. Е. Кинематика, статика, динамика точки: университетский курс.

Чаплыгин С. А. Исследования по динамике негोलомонных систем.

Арнольд В. И. Математические методы классической механики.

Арнольд В. И. и др. Математические аспекты классической и небесной механики.

Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике.

Якоби К. Лекции по динамике.

Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика.

Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред.

Розенблат Г. М. Механика в задачах и решениях.

Розенблат Г. М., Паншина А. В., Козлова З. П. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского. Кн. 1–3.

Чуркин В. М. Теоретическая механика в решениях задач из сборника И. В. Мещерского: Кинематика.

Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара.

Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем.

Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. Прикладная математика.

Пфайффер П. Колебания упругих тел.

Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний.

Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.

Геккелер И. В. Статика упругого тела.

Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.

Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле.

Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов.

Серия «Физико-математическое наследие физика (механика)»

Тимошенко С. П., Воиновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.

Вебстер А. Г. Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. В 2 т.

Сокольников И. С. Тензорный анализ: Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред.

Кирпичев В. Л. Беседы о механике.

Вилля А. Теория вихрей.

Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс (499) 135–42–16, 135–42–46
 или **электронной почтой** URSS@URSS.ru
 Полный каталог изданий представлен
 в **интернет-магазине**: <http://URSS.ru>

**Научная и учебная
литература**

Л. С. Полак

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

ИХ РАЗВИТИЕ
И ПРИМЕНЕНИЯ
В ФИЗИКЕ

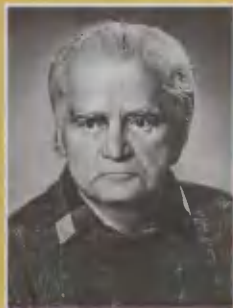
От классической механики
до квантовой теории поля



URSS

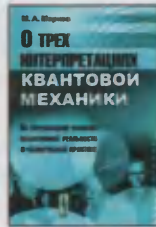
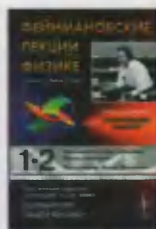
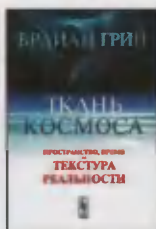
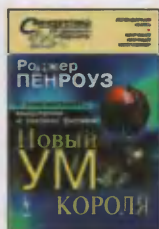
(1908–2002)

Выдающийся отечественный физик и физико-химик, историк науки, основатель отечественной школы плазмохимии. Родился в Кенигсберге (ныне Калининград). Окончил Ленинградский университет (1933). В 1934–1937 гг. работал в Ленинградском институте точной механики и оптики, в 1955–1957 гг. — в Институте истории естествознания и техники АН СССР, в 1957–2002 гг. — в Институте нефтехимического синтеза АН СССР (РАН). Доктор физико-математических наук (1958), заслуженный деятель науки и техники РСФСР (1970). Лауреат Государственной премии СССР (1989).



Основное направление исследований Л. С. Полака — химия экстремальных состояний. Он создал теоретические основы плазмохимии; разработал методы расчета параметров принудительной закалки продуктов реакции в плазменной струе и способы управления химическими процессами в низкотемпературной плазме; предложил способы оптимизации процессов получения в плазменной струе ацетилена из метана, олефинов из низкооктановых бензинов, формальдегида из метана, оксидов азота из азот-кислородных смесей. Также Л. С. Полак создал методы математического моделирования явлений физической и химической кинетики. Его историко-научные работы были посвящены вариационным принципам механики, истории аналитической механики, квантовой механики, оптики, теории теплоты и т. д. Под его редакцией издавались книги серии «Классики науки» и был подготовлен двухтомный коллективный труд «Развитие физики в СССР, 1917–1967».

Представляем другие книги нашего издательства:



5247 ID 59539

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА



Тел./факс: 7 (499) 135-42-16
Тел./факс: 7 (499) 135-42-46



E-mail:
URSS@URSS.ru
Каталог изданий
в Интернете:
<http://URSS.ru>

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу URSS@URSS.ru. Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>